सत्यमेव जयते

# ভারতের সংবিধান

## প্রস্তাবনা

"আমরা, ভারতের জনগণ, ভারতকে সার্বভৌম, সমাজতান্ত্রিক, ধর্মনিরপেক্ষ, গণতান্ত্রিক, সাধারণতন্ত্ররূপে গড়ে তুলতে এবং তার সকল নাগরিকই যাতে সামাজিক, অর্থনৈতিক ও রাজনৈতিক, ন্যায়বিচার, চিন্তা, মতপ্রকাশ, বিশ্বাস, ধর্ম এবং উপাসনার স্বাধীনতা, সামাজিক প্রতিষ্ঠা অর্জন ও সুযোগের সমতা প্রতিষ্ঠা এবং তাদের সকলের মধ্যে ব্যক্তির মর্যাদা এবং জাতীয় ঐক্য ও সংহতি সুনিশ্চিতকরণের মাধ্যমে তাদের মধ্যে যাতে ভ্রাতৃত্বের ভাব গড়ে ওঠে তার জন্য সত্যনিষ্ঠার সঙ্গে শপথ গ্রহণ করে, আমাদের গণপরিষদে আজ, ১৯৪৯ সালের ২৬ নভেম্বর, এতদ্দ্বারা এই সংবিধান গ্রহণ, বিধিবদ্ধ এবং নিজেদের অর্পণ করছি।"

# Constitution of India

**Part IV A (Article 51 A)**

## Fundamental Duties

It shall be the duty of every citizen of India —

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers, wildlife and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence;

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

*(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be, ward between the age of six and fourteen years.

**Note:** The Article 51A containing Fundamental Duties was inserted by the Constitution (42nd Amendment) Act, 1976 (with effect from 3 January 1977).

*(k) was inserted by the Constitution (86th Amendment) Act, 2002 (with effect from 1 April 2010).

# গণিত

*একাদশ শ্রেণির পাঠ্যবই*

**প্রস্তুতকরণ**

জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, নতুন দিল্লি

**অনুবাদ ও অভিযোজন**

রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ

ত্রিপুরা সরকার

এন সি ই আর টি
অনুমোদিত
প্রথম বাংলা সংস্করণ

এন সি ই আর টি কর্তৃক সর্বস্বত্ব সংরক্ষিত
গণিত
একাদশ শ্রেণির পাঠ্যবই

(এন সি ই আর টি-র গণিত
পাঠ্যবইয়ের ২০১৭ সালের অনূদিত সংস্করণ)

প্রথম প্রকাশ :
মার্চ, ২০১৯
**পুনর্মুদ্রণ :**
**মার্চ, ২০২০**

প্রকাশক : রাজ্য শিক্ষা গবেষণা
ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ
ত্রিপুরা।

প্রচ্ছদ : প্রসাদ স্বরূপ রায়

**অক্ষর বিন্যাস**

প্রসাদ স্বরূপ রায়
পীযূষ পাল
রানা বনিক
সুদীপ দাস

মূল্য : ২১০.০০

**মুদ্রণ :** সত্যযুগ এমপ্লয়িজ কো-অপারেটিভ
ইন্ডাস্ট্রিয়াল সোসাইটি লিমিটেড
১৩ প্রফুল্ল সরকার স্ট্রিট,
কলকাতা-৭২

# ভূমিকা

২০০৬ সাল থেকে রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ প্রথম থেকে অষ্টম শ্রেণি পর্যন্ত প্রাথমিক ও উচ্চপ্রাথমিক স্তরের পাঠ্যপুস্তকের মুদ্রণ ও প্রকাশের দায়িত্ব পালন করে আসছে।

রাজ্যের বিদ্যালয়স্তরে উন্নত ও সমৃদ্ধতর পাঠ্যক্রম চালু করার লক্ষ্যে ত্রিপুরা রাজ্য শিক্ষা দপ্তরের প্রচেষ্টায় প্রথম থেকে অষ্টম, নবম ও একাদশ শ্রেণির জন্য ২০১৯ শিক্ষাবর্ষ থেকে জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের (এন সি ই আর টি) পাঠ্যপুস্তকসমূহ গ্রহণ করার সিদ্ধান্ত নেওয়া হয়।

বাংলা বিষয় ছাড়া অন্যান্য বিষয়গুলোর জন্য জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের প্রকাশিত পুস্তকগুলোর অনূদিত ও অভিযোজিত সংস্করণ ২০১৯ সালে প্রথম প্রকাশ করা হয় এবং এ বছর ওইসব পুস্তকগুলোর পুনর্মুদ্রণ করা হল। পাশাপাশি দশম ও দ্বাদশ শ্রেণির বাংলা বিষয় ছাড়া অন্যান্য বিষয়গুলোর জন্য জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের প্রকাশিত পুস্তকগুলোর অনূদিত ও অভিযোজিত সংস্করণ ২০২০ শিক্ষাবর্ষে প্রথম প্রকাশ করা হয়। এখানে উল্লেখ্য যে, বাংলা বিষয়ে পাঠ্যপুস্তক রচনা ও প্রকাশনার দায়িত্বও রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ পালন করে আসছে।

বিশাল এই কর্মকাণ্ডে যেসব শিক্ষক-শিক্ষিকা, অধ্যাপক-অধ্যাপিকা, শিক্ষাবিদ, অনুবাদক, অনুলেখক, মুদ্রণকর্মী ও শিল্পীরা আমাদের সঙ্গে থেকে নিরলসভাবে অক্লান্ত পরিশ্রমে এই উদ্যোগ বাস্তবায়িত করেছেন তাদের সবাইকে সকৃতজ্ঞ ধন্যবাদ জানাচ্ছি।

প্রকাশিত এই পাঠ্যপুস্তকটির উৎকর্ষ ও সৌন্দর্য বৃদ্ধির জন্য শিক্ষানুরাগী ও গুণীজনের মতামত ও পরামর্শ বিবেচিত হবে।

**উত্তম কুমার চাকমা**
অধিকর্তা
রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ

আগরতলা
মার্চ, ২০২০

# উপদেষ্টা

ড. অর্ণব সেন, সহ অধ্যাপক, এন ই আর আই ই (এন সি ই আর টি), শিলং
ড. অরূপ কুমার সাহা, সহ অধ্যাপক, আর আই ই (এন সি ই আর টি), ভুবনেশ্বর

## অনুবাদক

- মৃণাল কান্তি বৈদ্য, (স্নাতকোত্তর শিক্ষক)
- জয়দীপ চৌধুরী, (স্নাতকোত্তর শিক্ষক)
- অমিতাভ মজুমদার, (স্নাতকোত্তর শিক্ষক)
- মধুমিতা চৌধুরী, (স্নাতকোত্তর শিক্ষিকা)
- অর্ণব কুমার রায়, (স্নাতকোত্তর শিক্ষক)
- মৃণাল কান্তি রায়, (স্নাতকোত্তর শিক্ষক)
- ড. শুভেন্দু বণিক, (সহযোগী অধ্যাপক)
- জয়দীপ ভট্টাচার্য, (সহকারী অধ্যাপক )

## প্রুফ রিডিং

* শুক্লা সিংহ (শিক্ষিকা)
* সৌমিত্র কিশোর সরকার (শিক্ষক)
* সোলানী ভট্টাচার্য্য (শিক্ষিকা)
* বিশ্বনাথ রায় (শিক্ষক)
* প্রবুদ্ধ সুন্দর কর (শিক্ষক)
* ইন্দু মাধব চক্রবর্তী (শিক্ষক)

# প্রাক্‌কথন

জাতীয় পাঠ্যক্রমের রূপরেখা (২০০৫)-এর নির্দেশ অনুযায়ী, শিশুদের স্কুলজীবন ও স্কুলের বাইরের জীবনের মধ্যে একটি বিশেষ সম্পর্ক থাকা খুব প্রয়োজন। তার কারণ, শিশুদের শিক্ষা যদি শুধুমাত্র স্কুল এবং পাঠ্যবইয়ের গণ্ডির মধ্যে সীমিত থাকে, তাহলে সেইসব শিশুদের স্কুল, বাড়ি এবং সম্প্রদায়— এই তিন জায়গার শিক্ষায় একটি বড়ো ফাঁক থাকার সম্ভাবনা রয়ে যায়। মূলত এই শূন্যস্থানটাকে পূরণ করার লক্ষ্যেই জাতীয় পাঠ্যক্রমের রূপরেখার উপর ভিত্তি করে নতুন পাঠ্যক্রম ও নতুন ধরনের পাঠ্যবই তৈরি করার উদ্যোগ নেওয়া হয়েছে. এর ফলে শিশুদের মুখস্থ করা এবং শিক্ষার বিভিন্ন বিষয়গুলোকে প্রকোষ্ঠবদ্ধ করার প্রবণতা বন্ধ হবে বলে মনে করা হচ্ছে। পাশাপাশি এটাও আশা করা হচ্ছে যে, এই পরিবর্তন জাতীয় শিক্ষানীতির (১৯৮৬) শিশুকেন্দ্রিক শিক্ষার লক্ষ্যকে উল্লেখযোগ্যভাবে এগিয়ে নিয়ে যাবে।

তবে এই ধরনের প্রচেস্টার সাফল্য অনেকটাই নির্ভর করছে স্কুলের প্রধান শিক্ষক এবং অন্যান্য শিক্ষক/শিক্ষিকাদের উপরে, যাঁরা শিশুদের শিখন সম্পর্কে প্রশ্ন করতে এবং বিভিন্ন কাজে শিশুদের কল্পনাশক্তির প্রয়োগ করতে উৎসাহিত করবেন। আমাদের এটা মনে রাখা খুব জরুরি, শিশুরা যদি সময়, স্থান এবং স্বাধীনভাবে কাজ করার সুযোগ পায়, তাহলে বড়োদের কাছ থেকে প্রাপ্ত জ্ঞান নিয়ে তারা নতুন অনেক কিছু সৃষ্টি করতে পারবে। একমাত্র পাঠ্যবই পড়েই পরীক্ষায় পাস করা যায় - মূলত এই ধারণার ফলেই শিক্ষার অন্যান্য দিকগুলো সর্বদা উপেক্ষিত হয়ে থাকে। আমাদের ভুলে গেলে চলবে না, শিশুদের মধ্যে সৃজনশীলতার বিকাশ তখনই সম্ভব, যখন আমরা ওদের এই গোটা শিখন প্রক্রিয়ার কেবলমাত্র গ্রহীতা না ভেবে একটা পূর্ণ অংশীদার মনে করব।

তবে এই লক্ষ্যপূরণ করতে গেলে স্কুলের দৈনন্দিন কার্যসূচি ও ব্যবস্থাপনায় অনেক ধরনের পরিবর্তন আশা অনিবার্য। স্কুলের দৈনন্দিন সময় সূচি যেমন নমনীয় হওয়া উচিত, ঠিক তেমনই বার্ষিক কার্যসূচি এমনভাবে তৈরি হওয়া প্রয়োজন যাতে শিক্ষাদানের দিনগুলোর সংখ্যায় কোনো পরিবর্তন না আসে। তবে বাস্তবে এই নতুন পাঠ্যবই শিশুদের কতটুকু কাজে লাগবে, ওদের স্কুলজীবন কতটা সমৃদ্ধ করবে কিংবা ওদের স্কুলজীবনকে দুর্বিষহ করে তুলবে কিনা, সবটাই নির্ভর করছে শিক্ষক/শিক্ষিকারা কী পদ্ধতি অবলম্বন করে এই বইটি স্কুলে পড়াবেন এবং কীভাবে সেই পড়ার মূল্যায়ন

করবেন। বিগত দিনগুলোর ন্যায় শিশুদের যাতে পাঠ্যবইয়ের বোঝা বইতে না হয়, এই নতুন পাঠ্যক্রম তৈরি করার সময় এই ব্যাপারে বিশেষ নজর দেওয়া হয়েছে। তার জন্য শিক্ষাদানের প্রদত্ত সময় এবং শিশুদের মানসিক বিকাশের কথা মাথায় রেখে প্রতিটি স্তরের পাঠ্যবইয়ে অন্তর্ভুক্ত শিক্ষার বিষয়বস্তুগুলো এক নতুন দৃষ্টিভঙ্গি নিয়ে পুনর্গঠন করা হয়েছে। এই প্রচেষ্টাকে আরো এগিয়ে নিয়ে যাবার জন্য এই পাঠ্যবইয়ের মাধ্যমে শিশুদের নানারকম প্রশ্ন করা, নতুন বিষয় নিয়ে ভাবনা-চিন্তা, তর্ক-বিতর্ক, ছোটো ছোটো গ্রুপ বানিয়ে আলোচনা করা এবং হাতে-কলমে শিক্ষা এইসব কিছুর উপর গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছে।

পাঠ্যবই উন্নয়ন কমিটির দায়িত্বপ্রাপ্ত সকল ব্যক্তিবর্গ যাঁরা কঠোর পরিশ্রম করে এই বইটি রূপায়ন করেছেন তাঁদেরকে এন সি ই আর টি প্রশংসা জানাচ্ছে। এই কমিটির কার্যকলাপকে সঠিক পথে চালিত করার জন্য সমাজবিজ্ঞান বিষয়ের উপদেষ্টা কমিটির চেয়ারপার্সন অধ্যাপক হরি বাসুদেবন এবং এই পাঠ্য বইয়ের মুখ্য উপদেষ্টা অধ্যাপক যোগেন্দ্র যাদব এবং অধ্যাপক সুহাস পাল মহোদয়গণের প্রতি আন্তরিক কৃতজ্ঞতা এবং ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছি। এই পাঠ্যবই পুনর্গঠনের পিছনে বহু শিক্ষক/শিক্ষিকার অবদান অনস্বীকার্য।

আমরা সেইসব স্কুলের প্রধান শিক্ষকদেরও বিশেষভাবে ধন্যবাদ জানাচ্ছি। এই পাঠ্যবই তৈরির ক্ষেত্রে যেসব প্রতিষ্ঠান এবং সংগঠন তাঁদের বহুমূল্য সম্পদ, উপাদান এবং লোকবল নিয়ে কাজ করার অনুমতি দিয়ে উদার মনের পরিচয় দিয়েছেন, তাঁদের সবার প্রতি আমরা বিশেষভাবে কৃতজ্ঞতা স্বীকার করছি এবং ধন্যবাদ জানাচ্ছি। মানব সম্পদ উন্নয়ন মন্ত্রকের (এম এইচ আর ডি) চেয়ারপার্সন অধ্যাপক মৃণাল মিরি এবং অধ্যাপক জি পি দেশপান্ডের তত্ত্বাবধানে মাধ্যমিক এবং উচ্চতর শিক্ষা বিভাগ দ্বারা নিযুক্ত জাতীয় পর্যবেক্ষণ সমিতির সদস্যদের বহুমূল্য সময় ও অবদানের জন্য পর্ষদের পক্ষ থেকে তাঁদের বিশেষ ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছি। নিজেদের প্রকাশনা এবং ব্যবস্থাপনার গুণগত মান সংস্কারের কাজে নিরন্তর নিয়োজিত থাকা এন সি ই আর টি কর্তৃপক্ষ সর্বদা পাঠকদের মতামত এবং পরামর্শকে স্বাগত জানায়, যাতে ভবিষ্যতে পাঠ্যবই সংশোধনী প্রক্রিয়াগুলো সফলভাবে সম্পন্ন হতে পারে।

নিউ দিল্লি
২০ ডিসেম্বর ২০০৫

**অধিকর্তা**
রাষ্ট্রীয় শিক্ষা গবেষণা এবং প্রশিক্ষণ পরিষদ
(এন সি ই আর টি)

## Textbook Development Committee

**Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics**

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor,* Chairman, Advisory Committee Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCCA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

**Chief Advisor**

P.K. Jain, *Professor,* Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi

**Chief Coordinator**

Hukum Singh, *Professor,* DESM, NCERT, New Delhi

**Members**

A.K. Rajput, *Associate Professor,* RIE Bhopal, M.P.

A.K. Wazalwar, *Associate Professor,* DESM NCERT, New Delhi

B.S.P. Raju, *Professor,* RIE Mysore, Karnataka

C.R. Pradeep, *Assistant Professor,* Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, Karnataka.

Pradeepto Hore, *Sr. Maths Master*, Sarla Birla Academy Bangalore, Karnataka.

S.B. Tripathy, *Lecturer*, Rajkiya Pratibha Vikas Vidyalaya, Surajmal Vihar, Delhi.

S.K.S. Gautam, *Professor,* DESM, NCERT, New Delhi

Sanjay Kumar Sinha, *P.G.T.,* Sanskriti School Chanakyapuri, New Delhi.

Sanjay Mudgal, *Lecturer,* CIET, New Delhi

Sneha Titus, *Maths Teacher,* Aditi Mallya School Yelaharika, Bangalore, Karnataka

Sujatha Verma, *Reader* in Mathematics, IGNOU, New Delhi.

Uaday Singh, *Lecturer,* DESM, NCERT, New Delhi.

**Member-coordinator**

V.P. Singh, *Associate Professor,* DESM, NCERT, New Delhi

## Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: P. Bhaskar Kumar, *P.G.T.,* Jawahar Navodaya Vidyalaya, Ananthpur, (A.P.); Vinayak Bujade, *Lecturer,* Vidarbha Buniyadi Junior College, Sakkardara Chowk Nagpur, Maharashtra; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalaya Vikashpuri District Centre, New Delhi; P.L. Sachdeva Deptt. of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, Karnataka; P.K.Tiwari *Assistant Commissioner (Retd.),* Kendriya Vidyalaya Sangathan; Jagdish Saran, Department of Statistics, University of Delhi; Quddus Khan, *Lecturer,* Shibli National P.G. College Azamgarh (U.P.); Sumat Kumar Jain, *Lecturer,* K.L. Jain Inter College Sasni Hathras (U.P.); R.P. Gihare, *Lecturer* (BRC), Janpad Shiksha Kendra Chicholi Distt. Betul (M.P.); Sangeeta Arora, *P.G.T.,* A.P.J. School Saket, New Delhi; P.N. Malhotra, *ADE* (Sc.), Directorate of Education, Delhi; D.R. Sharma, *P.G.T.,* J.N.V. Mungespur, Delhi; Saroj, *P.G.T.* Government Girls Sr. Secondary School, No. 1, Roop Nagar, Delhi, Manoj Kumar Thakur, *P.G.T.*, D.A.V. Public School, Rajender Nagar, Sahibabad, Ghaziabad (U.P.) and R.P. Maurya, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi.

Acknowledgements are due to Professor M. Chandra, *Head,* Department of Education in Science and Mathematics for her support.

The Council acknowledges the efforts of the Computer Incharge, Deepak Kapoor; Rakesh Kumar, Kamlesh Rao and Sajjad Haider Ansari, D.T.P. Operators; Kushal Pal Singh Yadav, Copy Editor and Proof Readers, Mukhtar Hussain and Kanwar Singh.

The contribution of APC–Office, administration of DESM and Publication Department is also duly acknowledged.

# সূচিপত্র

অধ্যায় **1**

# সেটসমূহ (SETS)

❖*In these days of conflict between ancient and modern studies, there must surely be something to be said for a study which did not begin with Pythagoras and will not end with Einstein; but is the oldest and the youngest.* — *G.H. HARDY* ❖

## 1.1 ভূমিকা

জর্জ ক্যান্টর
**(1845-1918)**

সেটের ধারণা বর্তমান গণিতশাস্ত্রে একটি মৌলিক অংশ হিসেবে ব্যবহৃত। আজকাল গণিতের প্রায় সব শাখায় এই ধারণার প্রয়োগ হয়। সম্বন্ধ এবং অপেক্ষকের ধারণা সংজ্ঞায়িত করতে সেটতত্ত্ব ব্যবহৃত হয়। জ্যামিতি, অনুক্রম, সম্ভাবনা ইত্যাদি অধ্যয়নে সেটসমূহের জ্ঞান থাকা আবশ্যক।

জার্মান গণিতজ্ঞ জর্জ ক্যান্টর (1845-1918) সেটতত্ত্বের বিকাশ করেন। "ত্রিকোণমিতির শ্রেণির সমস্যা" নিয়ে কাজ করতে গিয়ে প্রথমে তিনি সেটসমূহের সম্মুখীন হন। এই অধ্যায়ে আমরা সেট সম্পর্কিত কিছু মৌলিক সংজ্ঞা এবং প্রক্রিয়া নিয়ে আলোচনা করব।

## 1.2 সেটসমূহ এবং এদের উপস্থাপন (Sets and their Representations)

দৈনন্দিন জীবনে আমরা প্রায়ই বস্তু বিশেষের সংগ্রহের কথা বলি, যেমন এক প্যাকেট তাস, একদল জনতা, একটি ক্রিকেট দল ইত্যাদি। গণিতশাস্ত্রেও আমরা এসব সংগ্রহের কথা বলে থাকি, যেমন— স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহ, বিন্দুসমূহ, মৌলিক সংখ্যা সমূহ ইত্যাদি। আরও বিশেষভাবে, আমরা নীচের সংগ্রহগুলোর পরীক্ষা করতে পারি।

(ii) 10-এর চেয়ে ছোটো অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোর, অর্থাৎ, 1, 3, 5, 7, 9 ।

(ii) ভারতের নদ-নদী সমূহ।

(iii) ইংরেজি বর্ণমালার স্বরবর্ণগুলো, অর্থাৎ $a, e, i, o, u$ ।

(iv) বিভিন্ন প্রকারের ত্রিভুজ সমূহ।

(v) 210-এর মৌলিক উৎপাদকগুলো, অর্থাৎ 2,3,5 এবং 7।

(vi) $x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণের সমাধানগুলো, অর্থাৎ 2 এবং 3।

আমরা লক্ষ করি যে, উপরের প্রতিটি উদাহরণের সুসংজ্ঞাত বস্তুসমূহের সমাহারের কথা বলা হয়েছে যা থেকে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে কোনো নির্দিষ্ট বস্তু প্রদত্ত সমাহারে থাকবে, কি থাকবে না। উদাহরণস্বরূপ

আমরা বলতে পারি নীল নদ ভারতবর্ষের নদীগুলোর সংগ্রহের মধ্যে পড়ে না। অপরদিকে গঙ্গা নদী এই সংগ্রহের অন্তর্ভুক্ত।

নিম্নে আমরা আরও কিছু সেটের উদাহরণ দিচ্ছি যাদের গণিতে বিশেষ প্রয়োগ আছে।

**N** **:** সব স্বাভাবিক সংখ্যার সেট ।
**Z** **:** সব অখণ্ড সংখ্যার সেট ।
**Q** **:** সব মূলদ সংখ্যার সেট ।
**R** **:** বাস্তব সংখ্যার সেট ।
$\mathbf{Z}^+$ **:** ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার সেট ।
$\mathbf{Q}^+$ **:** ধনাত্মক মূলদ সংখ্যার সেট এবং
$\mathbf{R}^+$ **:** ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট ।

উপরে প্রদত্ত বিশেষ সেটের এই সংকেতগুলো পাঠ্যবই-এর সর্বত্র এরূপে আলোচিত হবে।

আবার, পৃথিবীর সবচেয়ে বিখ্যাত পাঁচজন গণিতজ্ঞদের সমাহার সুসংজ্ঞাত নয়, কারণ সবচেয়ে বিখ্যাত গণিতজ্ঞ নির্ণয়ের মানদণ্ড ব্যক্তি বিশেষে পরিবর্তনশীল। সুতরাং, এটি সুসংজ্ঞাত সংগ্রহ নয়।

আমরা বলব যে, *সেট হল একটি সুসংজ্ঞাত বস্তুসমূহের সংগ্রহ*।

নীচের বিষয়গুলো লক্ষ করো :

(i) কোনো সেটে বস্তু, পদ এবং সদস্য সমার্থক শব্দ।
(ii) সেটকে সাধারণত A, B, C, X, Y, Z ইত্যাদি ইংরেজি বর্ণমালার বড়ো হরফে প্রকাশ করা হয়।
(iii) সেটের পদগুলোকে $a, b, c, x, y, z$ ইত্যাদি ইংরেজি বর্ণমলার ছোটো হরফে প্রকাশ করা হয়।

যদি $a$ একটি A সেটের পদ হয়, তবে আমরা বলি যে, '$a$ পদটি A সেটে আছে', গ্রিক সংকেত $\in$ (epsilon) ব্যবহার করে 'অন্তর্ভুক্ত' (*belongs to*) বোঝানো হয়। অতএব, আমরা লিখি $a \in A$ । যদি $b$, A সেটের একটি পদ না হয়, তবে আমরা লিখি $b \notin A$ এবং '$b$, A সেটের অন্তর্ভুক্ত নয়' এভাবে পড়া হয়।

এরূপে ইংরেজি বর্ণমালার স্বরবর্ণের সেট V-এর ক্ষেত্রে, $a \in V$ কিন্তু $b \notin V$। 30 এর মৌলিক উৎপাদকগুলোর সেট-এর ক্ষেত্রে, $3 \in P$ কিন্তু $15 \notin P$ ।

(i) ছক বন্দিকরণ বা তালিকাবন্ধ পদ্ধতি (Roster or tabular form) ।
(ii) সেট গঠন বা ধর্মভিত্তিক পদ্ধতি (Set-builder form) ।

(i) ছক বন্দিকরণ পদ্ধতিতে, সব পদগুলোকে তালিকায় সাজানো হয়, প্রতিটি পদকে দ্বিতীয় বন্ধনী { }-এর মধ্যে আবদ্ধ রেখে বিরামচিহ্ন (,) দিয়ে আলাদা করা থাকে, উদাহরণস্বরূপ 7-এর চেয়ে ছোট সব ধনাত্মক যুগ্ম সংখ্যার সেটকে তালিকাবন্ধ পদ্ধতিতে $\{2, 4, 6\}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। এরকম আরও সেটকে তালিকাবন্ধ পদ্ধতিতে প্রকাশের উদাহরণ নীচে দেওয়া হল :

(a) যে সব স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে 42 বিভাজ্য তাদের সেট হল $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$

**দ্রষ্টব্য** তালিকাবদ্ধ পদ্ধতিতে পদগুলোর তালিকা ক্রম নিরপেক্ষ হয়। অতএব, উপরোক্ত সেটের প্রকাশ $\{1, 3, 7, 21, 2, 6, 14, 42\}$ এরূপে করা যায়।

(b) ইংরেজি বর্ণমালার স্বরবর্ণগুলোর সেট হল $\{a, e, i, o, u\}$।

(c) সকল অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সেটের প্রকাশ হল $\{1, 3, 5, \ldots\}$। ডট্‌গুলো দিয়ে আমরা বুঝি অযুগ্ম সংখ্যাগুলোর অসীম পর্যন্ত ক্রমান্বয়ে আছে।

**দ্রষ্টব্য** তালিকাবদ্ধ পদ্ধতিতে কোনো সেটকে প্রকাশের ক্ষেত্রে সাধারণত কোনো পদের পুনরুল্লেখ হয় না, অর্থাৎ সবগুলো পদ বিভিন্ন রূপে নেওয়া হয়। উদাহরণস্বরূপ 'SCHOOL' শব্দটির বর্ণমালাগুলোকে নিয়ে গঠিত সেট হবে { S, C, H, O, L} অথবা {H, O, L, C, S} । এখানে তালিকায় পদগুলোর ক্রম বিবেচ্য নয়।

(ii) সেট গঠন পদ্ধতিতে সব পদগুলোর একটি সাধারণ ধর্ম থাকে যা সেটের বাইরের কোনো পদের থাকে না। উদাহরণস্বরূপ, সেট $\{a, e, i, o, u\}$-এর সবগুলো পদের একটি সাধারণ ধর্ম আছে। সেটি হল এরা প্রত্যেকে ইংরেজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ এবং অন্য কোনো বর্ণমালার এই ধর্মটি নেই। সেটটিকে V দ্বারা নির্দেশ করে আমরা লিখি

V = $\{x : x$ হল একটি ইংরেজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ $\}$।

এটিও লক্ষণীয় যে আমরা সেটের কোনো পদকে সংকেতে চিহ্নিত করি (অন্য সংকেত $y$, $z$ ইত্যাদি বর্ণমালাও ব্যবহার করা হয়ে থাকে) এবং এর পরে কোলন " : " চিহ্ন দেওয়া হয়। এই কোলন চিহ্নের পরে সেটের পদ যে ধর্ম বহন করে তা লেখা হয় এবং অবশেষে পুরো বিবরণকে দ্বিতীয় বন্ধনীর সাহায্যে আবদ্ধ করা হয়। উপরে V সেটের বর্ণনা পড়া হয় "সকল $x$-এর সেট এরূপ যে $x$ হল ইংরেজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ"। এই বিবরণে দ্বিতীয় বন্ধনী বোঝায় "সকলের সেট", এবং কোলন বোঝায় "এরূপ যে"। উদাহরণস্বরূপ, সেট

A = $\{x : x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $3 < x < 10\}$-কে পড়া হয় "সকল $x$-এর সেটে $x$ এরূপ যে স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $x$-এর মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং, 4, 5, 6, 7, 8 এবং 9 -এই সংখ্যাগুলো A সেটের পদ।

যদি আমরা $(a)$, $(b)$ এবং $(c)$ -তে বর্ণিত ছকবন্দিকরণ পদ্ধতির সেটগুলোকে যথাক্রমে A, B, C দ্বারা প্রকাশ করি, তবে A, B, C -কে সেট গঠন পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত রূপেও উপস্থাপন করা যায় :

A= $\{x : x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা যা দিয়ে 42 বিভাজ্য $\}$

B= $\{y : y$ হল ইংরেজি বর্ণমালায় একটি স্বরবর্ণ $\}$

C= $\{z : z$ হল একটি অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$

**উদাহরণ 1 :** $x^2 + x - 2 = 0$ সমীকরণের সমাধান সেটটিকে ছকবন্দিকরণ রূপে লেখো।

**সমাধান :** প্রদত্ত সমীকরণটিকে লেখা যায়— $(x - 1)\ (x + 2) = 0$ অর্থাৎ $x = 1, -2$

সুতরাং, ছকবন্দিকরণ পদ্ধতিতে প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান সেট হল $\{1, -2\}$।

**উদাহরণ 2 :** $\{x : x$ একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং $x^2 < 40\}$ সেটটিকে তালিকাবদ্ধ পদ্ধতিতে লেখো।

**সমাধান :** এখানে নির্ণেয় সংখ্যাগুলো হল 1, 2, 3, 4, 5, 6। সুতরাং প্রদত্ত সেটের তালিকাবদ্ধরূপ হল $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$।

**উদাহরণ 3 :** $A = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ সেটটিকে সেট-গঠন (বা ধর্মভিত্তিক) পদ্ধতিতে লেখো।

**সমাধান :** A সেটকে আমরা লিখি

$$A = \{x : x \text{ হল স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ}\}$$

বিকল্পরূপে, আমরা লিখতে পারি

$$A = \{x : x = n^2, \text{ যেখানে } n \in \mathbf{N}\}$$

**উদাহরণ 4 :** $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\}$ কে সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখো।

**সমাধান :** আমরা দেখতে পাই যে, প্রদত্ত সেটের প্রতিটি পদে লবের চেয়ে হর 1 বেশি। উপরন্তু লব শুরু হয় 1 দিয়ে এবং শেষ হয় 6 দিয়ে। অতএব সেট গঠন পদ্ধতিতে সেটের রূপটি হবে—

$$\left\{x : x = \frac{n}{n+1}, \text{ যেখানে } n \text{ স্বাভাবিক সংখ্যা এবং } 1 \leq n \leq 6\right\}$$

**উদাহরণ 5 :** বাঁদিকের ছকবন্দিকরণ পদ্ধতিতে বর্ণিত প্রতিটি সেটের সাথে ডানদিকে বর্ণিত সেট গঠন অনুরূপ সেটের মিল করো :

| | | |
|---|---|---|
| (i) | {P, R, I, N, C, A, L} | (a) $\{x : x$ একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা এবং 18 -এর একটি ভাজক$\}$ |
| (ii) | $\{0\}$ | (b) $\{x : x$ একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $x^2 - 9 = 0\}$ |
| (iii) | $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ | (c) $\{x : x$ একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $x + 1 = 1\}$ |
| (iv) | $\{3, -3\}$ | (d) $\{x : x$ হল PRINCIPAL শব্দের একটি অক্ষর$\}$ |

**সমাধান :** যেহেতু (d)-তে শব্দের 9 টি অক্ষর এবং যার মধ্যে P এবং I দুইবার আছে, সুতরাং, (*i*) -এর মিল হবে (d)-এর সাথে। অনুরূপে (*ii*) মিলবে (c) -এর সাথে, যেহেতু $x + 1 = 1$ বোঝায় $x = 0$। উপরন্তু 1, 2, 3, 6, 9, 18 এদের প্রত্যেকে 18-এর ভাজক এবং তাই (*iii*) -এর মিল (a) -এর সাথে। সবশেষে, $x^2 - 9 = 0$ বোঝায় $x = 3, -3$, অতএব (*iv*) -এর মিল (b) -এর সাথে।

## অনুশীলনী 1.1

**1.** নীচের কোনগুলো সেট? তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(i) একটি বছরে যে মাসগুলো J অক্ষর দিয়ে শুরু হয় তাদের সমাহার।

(ii) ভারতের সবচেয়ে প্রতিভাবান দশজন লেখকের সমাহার।

(iii) বিশ্বের সর্বশ্রেষ্ঠ এগারোজন ক্রিকেট ব্যাটসম্যানের সমাহার

(iv) তোমাদের শ্রেণির সব বালকদের সংগ্রহ।

(v) 100 থেকে ক্ষুদ্রতর সব স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহের সমাহার।

(vi) মুন্সি প্রেমচাঁদ রচিত উপন্যাসগুলোর একটি সংগ্রহ।

(vii) সব যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যার সমাহার।

(viii) এ অধ্যায়ের সব প্রশ্নগুলোর সংগ্রহ।

(ix) বিশ্বের সবচেয়ে বেশি ভয়ঙ্কর জানোয়ারের সমাহার।

**2.** ধরো, A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}। শূন্যস্থানগুলোতে উপযুক্ত সাংকেতিক চিহ্ন $\in$ বা $\notin$ বসাও :

(i) 5. . . A (ii) 8 . . . A (iii) 0. . . A

(iv) 4. . . A (v) 2. . . A (vi) 10. . . A

**3.** নিম্নলিখিত সেটগুলোর তালিকাবদ্ধ রূপ লেখো :

(i) A = {$x$ : $x$ একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $-3 < x < 7$}

(ii) B = {$x$ : $x$ হল 6 থেকে ছোটো স্বাভাবিক সংখ্যা}

(iii) C = {$x$ : $x$ হল একটি দুই অঙ্ক বিশিষ্ট স্বাভাবিক সংখ্যা যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 8}

(iv) D = {$x$ : $x$ হল একটি মৌলিক সংখ্যা যা 60 -এর ভাজক}

(v) E = TRIGONOMETRY শব্দটির সব অক্ষরগুলোর সেট।

(vi) F = BETTER শব্দটির সব অক্ষরগুলোর সেট।

**4.** নিম্নলিখিত সেটগুলোকে সেট গঠন রূপে লেখো :

(i) (3, 6, 9, 12} (ii) {2, 4, 8, 16, 32} (iii) {5, 25, 125, 625}

(iv) {2, 4, 6, . . .} (v) {1, 4, 9, . . .,100}

**5.** নিম্নলিখিত সেটের সব পদগুলো তালিকাবদ্ধ করো :

(i) A = {$x$ : $x$ হল একটি অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা}।

(ii) B = {$x$ : $x$ একটি অখণ্ড সংখ্যা, $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{9}{2}$}

(iii) C = {$x$ : $x$ একটি অখণ্ড সংখ্যা, $x^2 \le 4$}

(iv) D = {$x$ : $x$ হল "LOYAL" শব্দের একটি অক্ষর}

(v) E = {$x$ : $x$ হল বছরের সেই মাস যা 31 দিনের নয়}

(vi) F = {$x$ : $x$ হল একটি ইংরেজি ব্যাঞ্জনবর্ণ যা $k$ -এর পূর্ববর্তী }

**6.** বাঁদিকের তালিকাবদ্ধ সেটের সাথে ডানদিকের সেট গঠন রূপের স্তম্ভ মিলাও :

(i) {1, 2, 3, 6} (a) {$x$ : $x$ হল একটি মৌলিক সংখ্যা যা 6 -এর ভাজক}

(ii) {2, 3} (b) {$x$ : $x$ হল 10 -এর ছোটো একটি স্বাভাবিক সংখ্যা}

(iii) {M,A,T,H,E,I,C,S} (c) {$x$ : $x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা যা 6 -এর ভাজক}

(iv) {1, 3, 5, 7, 9} (d) {$x$ : $x$ হল MATHEMATICS শব্দের একটি অক্ষর}।

## 1.3 শূন্য সেট (The Empty Set )

মনে করো,

A = { $x$ : $x$ হল একটি বিদ্যালয়ে একাদশ শ্রেণিতে অধ্যয়নরত একজন শিক্ষার্থী }

আমরা বিদ্যালয়ে গিয়ে একাদশ শ্রেণিতে অধ্যয়নরত শিক্ষার্থীদের গুণে এদের সংখ্যা জানতে পারি। অতএব A সেটের সদস্য সংখ্যা সসীম হবে।

আমরা এখন অপর একটি সেট B নিম্নলিখিত রূপে লিখি :

B = { $x$ : $x$ হল দশম এবং একাদশ উভয় শ্রেণিতে বর্তমানে অধ্যয়নরত একজন শিক্ষার্থী }
আমরা লক্ষ করি, কোনো একজন শিক্ষার্থী দশম এবং একাদশ উভয় শ্রেণিতে একই সাথে অধ্যয়ন করে না।

সুতরাং, B সেটে কোনো পদ থাকবে না।

**সংজ্ঞা 1**: যে সেটে কোনো পদ বা সদস্য থাকে না তাকে *শূন্য সেট* (*empty set* or the *null set* or the *void set*) বলে।

এই সংজ্ঞানুসারে, B একটি শূন্য সেট কিন্তু A শূন্য সেট নয়। শূন্য সেটকে $\phi$ বা { } সংকেতে প্রকাশ করা হয়।

নীচে কয়েকটি শূন্য সেটের উদাহরণ দেওয়া হল।

(i) ধরো, A = $\{x : 1 < x < 2,\ x$ হল একটি স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$। তাহলে A একটি শূন্য সেট কেননা 1 এবং 2 -এর মধ্যবর্তী কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা নেই।

(ii) B = $\{x : x^2 - 2 = 0$ এবং $x$ একটি মূলদ সংখ্যা$\}$। তাহলে B একটি শূন্য সেট কারণ $x^2 - 2 = 0$ সমীকরণটি $x$ -এর কোনো মূলদ মানে সিদ্ধ হয় না।

(iii) C = $\{x : x$ একটি যুগ্ম মূলদ সংখ্যা যা 2 থেকে বড়ো$\}$। এখানে C একটি শূন্য সেট কারণ 2 হল একমাত্র যুগ্ম মৌলিক সংখ্যা।

(iv) D = $\{ x : x^2 = 4,\ x$ অযুগ্ম সংখ্যা$\}$। D একটি শূন্য সেট কারণ $x$ এর কোনো অযুগ্ম মান দিয়ে $x^2 = 4$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

## 1.4 সসীম এবং অসীম সেট (Finite and Infinite Sets)

মনে করো, A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = $\{a, b, c, d, e, g\}$
এবং C = { পৃথিবীর বিভিন্ন অংশে বর্তমানে বসবাসকারী পুরুষগণ}
আমরা লক্ষ করি যে A-এর মধ্যে 5 টি পদ এবং B-এর মধ্যে 6 টি পদ আছে। কিন্তু C-এর পদ সংখ্যা কত হবে? যেহেতু C-এর পদসংখ্যা আমাদের জানা নেই, কিন্তু এটি একটি স্বাভাবিক সংখ্যা যা অনেক বড়। কোনো সেট S-এর পদ সংখ্যা বলতে আমরা বুঝি ওই সেটের ভিন্ন ভিন্ন পদগুলোর সংখ্যা এবং এটিকে $n$ (S) দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। যদি $n$ (S) একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হয়, তবে S হবে *অশূন্য সসীম* সেট।

এখন স্বাভাবিক সংখ্যার সেটটিকে বিবেচনা করো। লক্ষ করো এই সেটের পদ সংখ্যা সসীম নয়, যেহেতু অসীম সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা আছে। আমরা বলতে পারি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অসীম সেট। উপরে প্রদত্ত A, B এবং C সেটগুলো সসীম সেট। এবং $n$(A) = 5, $n$(B) = 6 এবং $n$(C) = কোনো সসীম সংখ্যা।

**সংজ্ঞা 2** : একটি সেট, যা শূন্য সেট বা সেটটি সসীম সংখ্যক পদ নিয়ে গঠিত হলে, একে *সসীম সেট* বলে, অন্যথায় সেটটিকে *অসীম সেট* বলে।

কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করা যাক :

(i) ধরো, W হল সপ্তাহের বিভিন্ন দিনগুলোর সেট। তাহলে W সসীম সেট।

(ii) মনে করো, S হল $x^2 - 16 = 0$ সমীকরণের সমাধানগুলোর সেট। অতএব, S একটি সসীম সেট।

(iii) ধরো, G হল একটি সরলরেখার উপরিস্থ বিন্দুগুলোর সেট। সুতরাং, G অসীম সেট।

যখন আমরা কোনো সেটকে ছক বন্দিকরণ বা তালিকাবদ্ধ রূপে উপস্থাপন করি, তখন ওই সেটের সবগুলো পদকে { } বন্ধনীর মাঝে প্রকাশ করি। কিন্তু একটি অসীম সেটের সব পদগুলোকে { } বন্ধনীর ভেতরে লেখা যায় না কারণ এ ধরনের সেটের পদ সংখ্যা সসীম নয়। সুতরাং, কয়েকটি অসীম সেটের কিছু পদকে

লিখে আমরা তালিকাবন্দ্ধ পদ্ধতিতে প্রকাশ করতে পারি যেখানে সামনের দিকে (বা পেছনের দিকে) তিনটি ডট্ দিয়ে সেটের অন্য পদগুলোর অসীম পর্যন্ত উপস্থাপন করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, $\{1, 2, 3 \ldots\}$ হল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট এবং $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ হল অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ হল অখণ্ড সংখ্যার সেট। এগুলো হল সব অসীম সেট।

> **দ্রষ্টব্য** সব অসীম সেটকে ছক বন্দিকরণ পদ্ধতিতে প্রকাশ করা যায় না। উদাহরণস্বরূপ, বাস্তব সংখ্যার সেটকে এই পদ্ধতিতে প্রকাশ করা যায় না। কারণ এই সেটের পদগুলো কোনো বিশেষ নমুনাকে অনুসরণ করে না।

**উদাহরণ 6 :** নিচের কোনটি সসীম বা অসীম সেট বলো :

(i) $\{x : x \in \text{N}$ এবং $(x - 1)(x - 2) = 0\}$

(ii) $\{x : x \in \text{N}$ এবং $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in \text{N}$ এবং $2x - 1 = 0\}$

(iv) $\{x : x \in \text{N}$ এবং $x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$

(v) $\{x : x \in \text{N}$ এবং $x$ অযুগ্ম সংঘ্যা$\}$

**সমাধান :** (i) প্রদত্ত সেট = $\{1, 2\}$ । তাই, এটি সসীম সেট।

(ii) প্রদত্ত সেট = $\{2\}$। সুতরাং, এটি সসীম সেট।

(iii) প্রদত্ত সেট = $\phi$. । অতএব, এটি সসীম সেট।

(iv) প্রদত্ত সেটটি হল সব মৌলিক সংখ্যার সেট এবং যেহেতু মৌলিক সংখ্যা অসীম সংখ্যক, সুতরাং, প্রদত্ত সেটটি অসীম সেট।

(v) যেহেতু অযুগ্ম সংখা অসীম সংখ্যক, সুতরাং প্রদত্ত সেটটি একটি অসীম সেট।

## 1.5 সমান সেট (Equal Sets)

প্রদত্ত দুটি সেট A এবং B এর ক্ষেত্রে, যদি A-এর প্রতিটি পদ B-এরও পদ হয় এবং যদি A-এর প্রতিটি পদ B-এরও পদ হয় এবং যদি B -এর প্রতিটি পদ A-এরও পদ হয়, তবে A ও B সেটদ্বয়কে সমান সেট বলা হবে। স্পষ্টতই সেট দুটিতে পদ সংখ্যা একই।

**সংজ্ঞা 3** : দুটি সেট A ও B কে *সমান* সেট বলা হবে যদি উভয়েরই ঠিক একই পদ থাকে এবং A = B রূপে লেখা হয়। অন্যথায় সেট দুটিকে অসমান বলা হবে এবং লেখা হয় $\text{A} \neq \text{B}$।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলোকে বিবেচনা করা যাক :

(i) ধরো, $\text{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $\text{B} = \{3, 1, 4, 2\}$ । তাহলে A = B ।

(ii) ধরো, A হল 6 হতে ছোটো মৌলিক সংখ্যা সমূহের সেট এবং P হল 30-এর মৌলিক উৎপাদকের সেট। তাহলে A এবং P সমান সেট, যেহেতু 30-এর মৌলিক উৎপাদকগুলো 2, 3 এবং 5 যারা 6 অপেক্ষা ছোটো।

> **দ্রষ্টব্য** কোনো সেটে এক বা একাধিক পদের পুনরাবৃত্তি হলে ওই সেটের কোনো পরিবর্তন হয় না। উদাহরণস্বরূপ $\text{A} = \{1, 2, 3\}$ এবং $\text{B} = \{2, 2, 1, 3, 3\}$ দুটি সমান সেট, যেহেতু A সেটের প্রতিটি পদ

B সেটেরও একটি পদ এবং বিপরীতক্রমে এটি সত্য। সেজন্য সেটের উপস্থাপনায় কোনো পদের পুনরাবৃত্তি আমরা করি না।

**উদাহরণ 7 :** যদি অস্তিত্ব থাকে তবে, সমান সেট যুগল নির্ণয় করো, এবং যুক্তি দাও :

A = {0}, B = {$x$ : $x$ > 15 এবং $x$ < 5},

C = {$x$ : $x$ – 5 = 0 }, D = {$x$: $x^2$ = 25},

E = {$x$ : $x$ হল $x^2 - 2x - 15 = 0$ সমীকরণের ধনাত্মক অখণ্ড বীজ}।

**সমাধান :** যেহেতু 0 ∈ A এবং B, C, D এবং E সেটের কোনোটিতেই 0 নেই, সুতরাং, এটি প্রকাশ করে A ≠ B, A ≠ C, A ≠ D, A ≠ E।

যেহেতু B = φ এবং অন্য কোনোটিই শূন্য সেট নয়। সুতরাং, B ≠ C, B ≠ D এবং B ≠ E। অধিকন্তু C ={5} এবং –5 ∈ D, অতএব C ≠ D ।

যেহেতু E = {5}, C = E। তাছাড়া D = {–5, 5} এবং E = {5}, সুতরাং, আমরা পাই D ≠ E। অতএব, C এবং E কেবলমাত্র সমান সেট যুগল।

**উদাহরণ 8 :** নিম্নলিখিত সেটের কোন্ জোড়াগুলো সমান? তোমার উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দাও।

(i) X, হল "ALLOY" শব্দের অক্ষরগুলোর সেট এবং B হল "LOYAL" শব্দের অক্ষরগুলোর সেট।

(ii) A = {$n$ : $n$ ∈ Z এবং $n^2 \le 4$} এবং B = {$x$ : $x$ ∈ R এবং $x^2 - 3x + 2 = 0$}।

**সমাধান :** (i) আমরা পাই, X = {A, L, L, O, Y}, B = {L, O, Y, A, L} ।তাহলে X এবং B উভয়েই সমান সেট কারণ পদের পুনরাবৃত্তি সেটের পরিবর্তন সাধন করে না।

সুতরাং, X = {A, L, O, Y} = B

(ii) A ={–2, –1, 0, 1, 2}, B = {1, 2}। যেহেতু 0 ∈ A কিন্তু 0 ∉ B, তাই A এবং B সমান সেট নয়।

## অনুশীলনী 1.2

**1.** নীচের কোন সেটগুলো শূন্য সেটের উদাহরণ :

(i) 2 দিয়ে বিভাজ্য অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সেট।

(ii) যুগ্ম মৌলিক সংখ্যার সেট।

(iii) { $x$ : $x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা , $x$ < 5 এবং $x$ > 7 }

(iv) { $y$ : $y$ হল দুটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি সাধারণ বিন্দু}

**2.** নীচের সেটগুলোর কোনগুলো সসীম বা অসীম?

(i) এক বছরের মাসগুলোর সেট।

(ii) {1, 2, 3, . . .}

(iii) {1, 2, 3, . . ., 99, 100}

(iv) 100 থেকে বড় ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার সেট।

(v) 99 থেকে ছোটো মৌলিক সংখ্যাগুলোর সেট।

**3.** নীচের প্রতিটি সেট সসীম বা অসীম কি না বিবৃত করো :

(i) $x$- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাগুলোর সেট।

(ii) ইংরেজি বর্ণমালায় অক্ষরগুলোর সেট।

(iii) 5 -এর গুণিতক সংখ্যাগুলোর সেট।

(iv) পৃথিবীতে বসবাসকারী প্রাণীদের সেট।

(v) মূলবিন্দু (0,0) গামী বৃত্তগুলোর সেট।

**4.** নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে A = B হবে কি না বিবৃত করো :

(i) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{d, c, b, a\}$

(ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$ $B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{x : x$ ধনাত্মক যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা এবং $x \leq 10\}$

(iv) $A = \{x : x$ হল 10 -এর গুণিতক$\}$, $B = \{10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$

**5.** নীচের সেটযুগলগুলো সমান কি? যুক্তি দাও।

(i) $A = \{2, 3\}$, $B = \{x : x$ হল $x^2 + 5x + 6 = 0$ সমীকরণের সমাধান$\}$

(ii) $A = \{x : x$ হল FOLLOW শব্দের একটি বর্ণমালা$\}$

$B = \{y : y$ হল WOLF শব্দের একটি বর্ণমালা$\}$

**6.** নিম্নে প্রদত্ত সেটগুলো হতে সমান সেটগুলো নির্বাচন করো :

$A = \{2, 4, 8, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{4, 8, 12, 14\}$, $D = \{3, 1, 4, 2\}$

$E = \{-1, 1\}$, $F = \{0, a\}$, $G = \{1, -1\}$, $H = \{0, 1\}$

## 1.6 উপসেট (Subsets)

মনে করো, X = তোমার বিদ্যালয়ে সব শিক্ষার্থীদের সেট, Y = তোমার শ্রেণিতে সব শিক্ষার্থীদের সেট।

আমরা লক্ষ করি Y-এর প্রতিটি পদ X এরও একটি পদ; আমরা বলতে পারি Y হল X -এর উপসেট। Y, X -এর উপসেট এটিকে $Y \subset X$ সাংকেতিক রূপে লেখা হয়। $\subset$ সংকেতটি ‘উপসেট’ বা ‘অন্তবর্তী’ হওয়া প্রকাশ করে।

**সংজ্ঞা 4** : একটি সেট A-কে B সেটের উপসেট বলা হবে যদি A সেটের প্রতিটি পদ B সেটেরও পদ হয়।

অন্যভাবে বলা যায়, $A \subset B$ হবে। যদি $a \in A$ হয়, তবে $a \in B$ হয়। এটিকে প্রায়ই “$\Rightarrow$” চিহ্নের মাধ্যমে ব্যবহার করা হয়, যার অর্থ প্রকাশ করা। এই চিহ্ন প্রয়োগে উপসেটের সংজ্ঞা আমরা নিম্নলিখিত রূপে লিখতে পারি :

$$A \subset B \text{ হবে, যদি } a \in A \Rightarrow a \in B \text{ হয়।}$$

উপরোক্ত বিবৃতিটি পড়া হয়— “*A*, *B* এর উপসেট হবে যদি *a*, A এর একটি পদ হয় তা বোঝায় যে *a* , B-এরও একটি পদ।” যদি A , B -এর উপসেট না হয়, তবে আমরা লিখি $A \not\subset B$।

আমাদের এটি লক্ষ করা উচিত যে, A সেটকে B-এর উপসেট হতে হলে A-এর প্রতিটি পদ অবশ্যই B-এরও একটি পদ হতে হবে। এটি সম্ভব যে B-এর প্রতিটি পদ A সেটের পদ হতে পারে বা নাও হতে পারে। যদি এমনটা হয় যে B-এর প্রতিটি পদ A এরও একটি পদ হয়, তবে $B \subset A$। এক্ষেত্রে A ও B একই সেট। সুতরাং, আমরা পাই, $A \subset B$ এবং $B \subset A \Leftrightarrow A = B$ , যেখানে “$\Leftrightarrow$” চিহ্নটি উভয়মুখী তাৎপর্য প্রকাশ করে এবং সাধারণত এটাকে যদি এবং কেবলমাত্র যদি এভাবে পড়া হয় (সংক্ষেপে লেখা হয় “iff” দিয়ে)।

উপরোক্ত সংজ্ঞা থেকে এটি বলা যায় যে, প্রত্যেক *A* সেট, নিজের উপসেট অর্থাৎ $A \subset A$। যেহেতু শূন্য সেট $\phi$ -এর কোনো পদ নেই, তাই আমরা সহমত পোষণ করতে পারি যে, $\phi$ প্রত্যেক সেটের উপসেট। কয়েকটি উদাহরণ নিয়ে এখন আমরা আলোচনা করছি :

(i) মূলদ সংখ্যার সেট **Q**, বাস্তব সংখ্যার সেট **R** -এর উপসেট এবং আমরা লিখি $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$।

(ii) যদি 56-এর সব উৎপাদকগুলোর সেট A হয় এবং 56 এর সব মৌলিক উৎপাদকগুলোর সেট B হয় তবে B হবে A-এর উপসেট এবং আমরা লিখি $B \subset A$ ।

(iii) ধরো $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{x : x$ হল 6 থেকে ছোটো একটি অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$ । তাহলে $A \subset B$ এবং $B \subset A$ , অতএব $A = B$ ।

(iv) ধরো $A = \{ a, e, i, o, u\}$ এবং $B = \{ a, b, c, d\}$ । তাহলে A, B এর উপসেট নয়, আবার Bও, A এর উপসেট নয়।

ধরো A এবং B দুটি সেট। যদি $A \subset B$ এবং $A \neq B$ হয়, তবে A-কে বলা হয় B-এর একটি যথার্থ *উপসেট* (*proper subset*) এবং B কে বলা হয় A-এর *অধিসেট* (*superset* )।

উদাহরণস্বরূপ, $A = \{1, 2, 3\}$ সেটটি $B = \{1, 2, 3, 4\}$ সেটের যথার্থ উপসেট।

যদি একটি সেট A-এর শুধুমাত্র একটি পদ থাকে, একে আমরা *একক সেট* (*singleton* ) বলি। সুতরাং, $\{ a \}$ হল একটি একক সেট।

**উদাহরণ 9 :** ধরো কয়েকটি সেট

$$\phi, A = \{ 1, 3 \}, \quad B = \{1, 5, 9\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}।$$

নিম্নলিখিত প্রদত্ত সেটযুগলের প্রতিটির মাঝে $\subset$ অথবা $\not\subset$ চিহ্ন বসাও :

(i) $\phi$ . . . B (ii) A . . . B (iii) A . . . C (iv) B . . . C

**সমাধান :** (i) $\phi \subset B$ যেহেতু $\phi$ প্রতিটি সেটের একটি উপসেট।

(ii) $A \not\subset B$, যেহেতু $3 \in A$ এবং $3 \notin B$ ।

(iii) $A \subset C$, যেহেতু $1, 3 \in A$ , এরা আবার C-এরও পদ।

(iv) $B \subset C$ যেহেতু B-এর প্রতিটি পদ C -এরও একটি পদ।

**উদাহরণ 10 :** ধরো $A = \{ a, e, i, o, u\}$ এবং $B = \{ a, b, c, d\}$ A কি B-এর উপসেট হবে? না (কেন?) । B কি A-এর উপসেট হবে? না। (কেন?)

**উদাহরণ 11 :** ধরো A, B এবং C তিনটি সেট। যদি $A \in B$ এবং $B \subset C$, তাহলে $A \subset C$ সত্য হবে কি? যদি না হয় উদাহরণ দাও।

**সমাধান :** না। ধরো $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$ এবং $C = \{\{1\}, 2, 3\}$ । এখানে $A \in B$, যেহেতু $A = \{1\}$ এবং $B \subset C$ । কিন্তু $A \not\subset C$ কারণ $1 \in A$ এবং $1 \notin C$।

লক্ষ করো, একটি সেটের কোনো পদ তার নিজের উপসেট হতে পারে না।

### 1.6.1 বাস্তব সংখ্যা সেটের উপসেট (*Subsets of set of real numbers*)

1.6 অনুচ্ছেদে উল্লেখ করা হয়েছে বাস্তব সংখ্যার সেট R-এর অনেক গুরুত্বপূর্ণ উপসেট আছে। নীচে আমরা এই উপসেটগুলোর কয়েকটির নাম উল্লেখ করছি।

স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, . . .\}$

অখণ্ড সংখ্যার সেট $\mathbf{Z} = \{. . ., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . .\}$

মূলদ সংখ্যার সেট $\mathbf{Q} = \{ x : x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbf{Z} \text{ and } q \neq 0\}$

যাকে পড়া হয় — "**Q** হল সকল $x$-এর সেট এরূপ যে $x$ এর মান $\frac{p}{q}$ এর সমান, যেখানে $p$ ও $q$ অখণ্ড সংখ্যা এবং $q$ শূন্য নয়।" $-5$ হল **Q**-এর একটি সদস্য (যাকে $\frac{-5}{1}$ রূপে প্রকাশ করা যায়), $\frac{5}{7}$, $3\frac{1}{2}$ (যাকে $\frac{7}{2}$ রূপে লেখা যায়) এবং $\frac{-11}{3}$।

অমূলদ সংখ্যা সেট **T** দিয়ে সূচিত হয়, যা অপর সব বাস্তব সংখ্যাগুলো নিয়ে গঠিত। সুতরাং, $\mathbf{T} = \{x : x \in \mathbf{R} \text{ and } x \notin \mathbf{Q}\}$ অর্থাৎ, যে সকল বাস্তব সংখ্যা যারা মূলদ নয়। $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ এবং $\pi$ এরা **T**-এর সদস্য।

এই উপসেটগুলোর মধ্যবর্তী কয়েকটি স্পষ্ট সম্পর্ক হল :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q},\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{R},\ \mathbf{T} \subset \mathbf{R},\ \mathbf{N} \not\subset \mathbf{T}$$ ।

**1.6.2 *R* -এর উপসেট রূপে অন্তরাল (*Intervals as subsets of R*)** ধরো $a, b \in \mathbf{R}$ এবং $a < b$। তাহলে সব বাস্তব সংখ্যাগুলোর সেট $\{y : a < y < b\}$-কে *মুক্ত অন্তরাল* (*open interval*) বলা হয় এবং $(a, b)$ দিয়ে সূচিত করা হয়। $a$ ও $b$ -এর মধ্যবর্তী সব বিন্দুগুলো মুক্ত অন্তরাল $(a, b)$-এর অন্তর্ভুক্ত কিন্তু $a, b$ নিজেরা এই অন্তরালের অন্তর্ভুক্ত নয়।

যে অন্তরালে এই প্রান্তবিন্দু দুটিও অন্তর্ভুক্ত হয়, একে *বন্ধ অন্তরাল* (*closed interval*) বলা হয় এবং $[a, b]$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

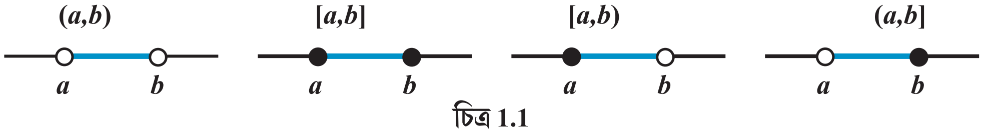
সুতরাং, $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$

আমরা আবার অন্তরালের একটি প্রান্ত বন্ধ এবং অপর প্রান্ত মুক্ত পেতে পারি, অর্থাৎ,

$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$ হল $a$ থেকে $b$ এর একটি *মুক্ত অন্তরাল* যেখানে $a$ অন্তর্ভুক্ত কিন্তু $b$ বর্জিত।

$(a, b] = \{x : a < x \le b$ হল $a$ থেকে $b$ এর একটি *মুক্ত অন্তরাল*, যেখানে $b$ অন্তর্ভুক্ত কিন্তু $a$ বর্জিত।

এই সংকেতগুলো দিয়ে বাস্তব সংখ্যার সেটের উপসেটগুলো প্রকাশের বিকল্প রীতি পাওয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ, যদি $A = (-3, 5)$ এবং $B = [-7, 9]$ হয়, তবে $A \subset B$। $[0, \infty)$ সেটটি সকল অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যাকে সংজ্ঞায়িত করে, অপরদিকে $(-\infty, 0)$ সেটটি সব ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যাগুলোকে সংজ্ঞায়িত করে। $(-\infty, \infty)$ সেটটি সংখ্যা রেখায় $-\infty$ থেকে $\infty$ পর্যন্ত সব বাস্তব সংখ্যাগুলোকে প্রকাশ করে।




চিত্র 1.1

চিত্রে বাস্তব সংখ্যা রেখায় উপর **R**-এর উপসেট হিসেবে বিভিন্ন ধরনের অন্তরালগুলো দেখানো হয়েছে। এখানে আমরা লক্ষ করি যে, একটি অন্তরালে অসীম সংখ্যক বিন্দু থাকে।

উদাহরণস্বরূপ, সেট গঠন পদ্ধতিতে লিখিত সেট $\{x : x \in \mathbf{R}, -5 < x \le 7\}$ কে $(-5, 7]$ অন্তরালে লেখা হয় এবং $[-3, 5)$ অন্তরালকে সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখা হয় $\{x : -3 \le x < 5\}$ রূপে।

$(b - a)$ সংখ্যাটিকে অন্তরাল $(a, b)$, $[a, b]$, $[a, b)$ বা $(a, b]$ -এর যে কোনো একটির দৈর্ঘ্য বলা হয়।

## 1.7 ঘাতসেট (Power Set)

মনে করা যাক $\{1, 2\}$একটি সেট। চলো আমরা $\{1, 2\}$ সেটের সবগুলো উপসেটকে লিখি। আমরা জানি $\phi$ সব সেটের একটি উপসেট। সুতরাং, $\phi$ সেট $\{1, 2\}$-এর একটি উপসেট। আমরা লক্ষ করি যে $\{1\}$এবং $\{2\}$ সেট দুটিও $\{1, 2\}$ -এর উপসেট। আবার প্রত্যেক সেট তার নিজের উপসেট। সুতরাং, $\{1, 2\}$এর একটি উপসেট $\{1, 2\}$। অতএব সব মিলিয়ে $\{1, 2\}$সেটের চারটি উপসেট আছে, যেমন $\phi$, $\{1\}$, $\{2\}$ এবং $\{1, 2\}$। এই সবগুলো উপসেটের সেটটিকে বলা হয় $\{1, 2\}$ সেটের *ঘাতসেট*।

**সংজ্ঞা 5** : A সেটের সব উপসেটের সমাহার বা সংগ্রহকে বলা হবে A সেটের *ঘাতসেট*। এটিকে P(A) দিয়ে সূচিত করা হয়। সেট P(A) -এর প্রতিটি পদ একটি সেট।

সুতরাং, উপরোক্ত সেট A = { 1, 2 } হলে

$$P(A) = \{ \phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

আরও লক্ষ করো, $n [ P (A) ] = 4 = 2^2$

সাধারণভাবে, যদি A সেটের $n(A) = m$ হয়, তবে এটি দেখানো যায় যে $n [ P(A)] = 2^m$।

## 1.7 সার্বিক সেট (Universal Set)

সাধারণত কোনো বিশেষ প্রসঙ্গে আমরা কোনো একটি মূল সেটের পদ এবং এর উপসেট নিয়ে আলোচনা করি যা ওই বিশেষ প্রসঙ্গের সাথে সংগতিপূর্ণ। উদাহরণস্বরূপ, যখন আমরা সংখ্যা পদ্ধতি নিয়ে অধ্যয়ন করি, আমরা স্বাভাবিক সংখ্যার সেটে আগ্রহী এবং উপসেটগুলো যেমন সব মৌলিক সংখ্যার সেট, সব যুগ্ম সংখ্যার সেট ইত্যাদি। এই মূল সেটটিকে বলা হয় "*সার্বিক সেট*"। সার্বিক সেটকে সাধারণত U দিয়ে চিহ্নিত করা হয় এবং এর সব উপসেটগুলো A, B, C ইত্যাদি দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, সকল অখণ্ড সংখ্যার সেটের ক্ষেত্রে, মূলদ সংখ্যার সেট সার্বিক সেট **R** হতে পারে, অথবা এক্ষেত্রে বাস্তব সংখ্যার সেট হতে পারে। অপর উদাহরণ হিসেবে, জনসংখ্যা সম্পর্কিত অধ্যয়নে সমস্ত পৃথিবীর লোকসংখ্যা হবে সার্বিক সেট।

### অনুশীলনী 1.3

**1.** শূন্যস্থানগুলোতে $\subset$ বা $\not\subset$ চিহ্ন দিয়ে পূর্ণ করে বিবৃতিগুলোকে সঠিক করো :

(i) $\{2, 3, 4\} \ldots \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ii) $\{a, b, c\} \ldots \{b, c, d\}$

(iii) $\{x : x$ হল তোমার বিদ্যালয়ে একাদশ শ্রেণির একজন শিক্ষার্থী $\} \ldots \{x : x$ হল তোমার বিদ্যালয়ের একজন শিক্ষার্থী $\}$

(iv) $\{x : x$ হল সমতলে একটি বৃত্ত$\} \ldots \{x : x$ হল এক একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট ঐ একই সমতলের একটি বৃত্ত$\}$

(v) $\{x : x$ হল সমতলের একটি ত্রিভুজ$\} \ldots \{x : x$ হল ঐ সমতলটিতে একটি আয়তক্ষেত্র$\}$

(vi) $\{x : x$ হল সমতলের সমবাহু ত্রিভুজ$\} \ldots \{x : x$ হল ঐ একই সমতলের একটি ত্রিভুজ$\}$

(vii) $\{x : x$ হল একটি যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা$\} \ldots \{x : x$ হল একটি অখণ্ড সংখ্যা$\}$

**2.** নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলো সত্য বা মিথ্যা কি না পরীক্ষা করো :

(i) $\{a, b\} \not\subset \{b, c, a\}$ (ii) $\{a, e\} \subset \{x : x$ হল ইংরেজি বর্ণমালার একটি স্বরবর্ণ$\}$

(iii) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$ (iv) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$

(v) $\{a\} \in \{a, b, c\}$

(vi) $\{x : x$ হল 6 থেকে ছোটো যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা$\} \subset \{x : x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা যা দিয়ে 36 বিভাজ্য$\}$

**3.** ধরো নিম্নলিখিত কোন বিবৃতিগুলো অসত্য এবং কেন ?

(i) $\{3, 4\} \subset A$ (ii) $\{3, 4\} \in A$ (iii) $\{\{3, 4\}\} \subset A$

(iv) $1 \in A$ (v) $1 \subset A$ (vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$

(vii) $\{1, 2, 5\} \in A$ (viii) $\{1, 2, 3\} \subset A$ (ix) $\phi \in A$

(x) $\phi \subset A$ (xi) $\{\phi\} \subset A$

**4.** নিম্নলিখিত সেটগুলোর সব উপসেটগুলো লেখো :

(i) $\{a\}$ (ii) $\{a, b\}$ (iii) $\{1, 2, 3\}$ (iv) $\phi$

**5.** যদি $A = \phi$ হয়, তবে P(A) -এর পদ সংখ্যা কত ?

**6.** নীচের সেটগুলোকে অন্তরালরূপে লেখো :

(i) $\{x : x \in R, -4 < x \le 6\}$ (ii) $\{x : x \in R, -12 < x < -10\}$

(iii) $\{x : x \in R, 0 \le x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in R, 3 \le x \le 4\}$

**7.** নিম্নলিখিত অন্তরালগুলোকে সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখো :

(i) $(-3, 0)$ (ii) $[6, 12]$ (iii) $(6, 12]$ (iv) $[-23, 5)$

**8.** নিম্নলিখিত প্রতিটি ক্ষেত্রে তুমি কোন্ সার্বিক সেটের প্রস্তাব করবে :

(i) সমকোণী ত্রিভুজের সেট। (ii) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সেট।

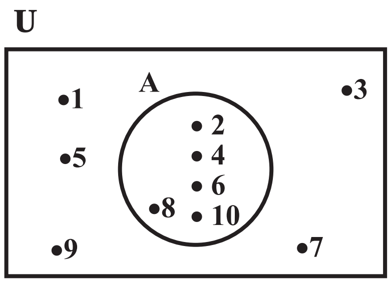
**9.** $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, প্রদত্ত সেটগুলোর জন্য নিম্নলিখিত কোন্ কোন্ সেট A, B এবং C সেট তিনটির সার্বিক সেট হিসেবে বিবেচনা করা যাবে ?

(i) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $\phi$ (iii) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(iv) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

## 1.9 ভেনচিত্র (Venn Diagrams)

সেটের অধিকাংশ সম্পর্কগুলো চিত্রাকারে উপস্থাপন করা যেতে পরে যা *ভেন চিত্র* হিসেবে খ্যাত। ইংরেজ ন্যায়বিদ, জন ভেন (1834-188)-এর নামানুসারে ভেনচিত্র নামাকরণ হয়েছে। আয়তক্ষেত্র এবং আবদ্ধ বক্র মূলত বৃত্ত দিয়ে ভেনচিত্র গঠিত হয়। সার্বিক সেটটিকে সাধারণত আয়তক্ষেত্র এবং এর উপসেটগুলোকে বৃত্তের সাহায্য উপস্থাপন করা হয়।



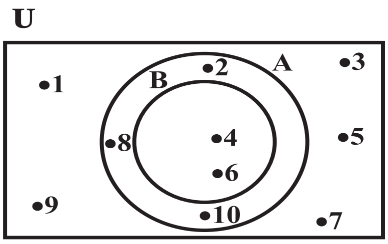
চিত্র **1.2**

ভেনচিত্র (1.2 এবং 1.3)-তে সেটের পদগুলো তাদের অনুরূপ বৃত্তে লেখা হল।

**দৃষ্টান্ত 1.** চিত্র 1.2-তে U = {1,2,3, ..., 10} হল সার্বিক সেট যার উপসেট A = {2,4,6,8,10}

**দৃষ্টান্ত 2.** চিত্র 1.3-তে U = {1,2,3, ..., 10} হল সার্বিক সেট, যার A = {2,4,6,8,10} এবং B = {4, 6} হল উপসেট এবং B ⊂ A।

আমরা যখন সেটের সংযোগ, ছেদ এবং অন্তর নিয়ে আলোচনা করব তখন শিক্ষার্থীরা ভেনচিত্রের ব্যাপক প্রয়োগ দেখতে পাবে।



চিত্র **1.3**

## 1.10 সেটের উপর প্রক্রিয়া সমূহ (Operations on Sets)

পূর্বের শ্রেণিগুলোতে সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ ইত্যাদি প্রক্রিয়াগুলো কীভাবে সম্পন্ন করতে হয় যে সম্পর্কে আমরা জেনেছি। এই প্রক্রিয়াগুলোর প্রতিটি এক জোড়া সংখ্যার মধ্যে সম্পন্ন করে অপর একটি সংখ্যা পাওয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ, যখন আমরা সংখ্যা জোড় 5 এবং 13 এর মধ্যে যোগ প্রক্রিয়া সম্পন্ন করি। তখন আমরা 18 সংখ্যাটি পাই। আবার 5 এবং 13 -এর মাঝে গুণ প্রক্রিয়া সম্পন্ন করে আমরা 65 পাই। অনুরূপে দুটি সেটের মধ্যবর্তী কিছু প্রক্রিয়া সম্পন্ন করার মাধ্যমে আমরা আরেকটি সেট পাই। আমরা সেটের নির্দিষ্ট কিছু প্রক্রিয়া সংজ্ঞায়িত করব এবং তাদের সেটের নির্দিষ্ট কিছু প্রক্রিয়া সংজ্ঞায়িত করব এবং তাদের ধর্মগুলো পরীক্ষা করব। অতএব, আমরা সেটগুলোকে কোনো এক সার্বিক সেটের উপসেট হিসেবে বিচার করে নেব।

**1.10.1 সেটের সংযোগ (*Union of sets*)** ধরো A ও B যে কোনো দুটি সেট। A এবং B -এর সংযোগ সেটটিতে A -এর সব পদগুলো থাকবে এবং B-এর সবগুলো পদ থাকবে। সাধারণ পদগুলোকে একবারই নেওয়া হবে। সংযোগ প্রক্রিয়া '∪' -প্রতীক দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। সাংকেতিক রূপে আমরা লিখি A ∪ B এবং 'A সংযোগ B' রূপে সাধারণত পড়া হয়।

**উদাহরণ 12 :** ধরো A = { 2, 4, 6, 8} এবং B = { 6, 8, 10, 12} , তবে A ∪ B নির্ণয় করো।
**সমাধান :** আমরা পাই A ∪ B = { 2, 4, 6, 8, 10, 12} ।

**উদাহরণ 13 :** ধরো A = { *a, e, i, o, u* } এবং B = { *a, i, u* }। দেখাও যে, A ∪ B = A।
**সমাধান :** আমরা পাই, A ∪ B = { *a, e, i, o, u* } = A।

এই উদাহরণ এটা নির্দেশ করে যে, A সেট এবং এর উপসেট B-এর সংযোগ প্রক্রিয়ায় A সেট নিজেই হয়। অর্থাৎ, যদি B ⊂ A হয়, তবে A ∪ B = A।

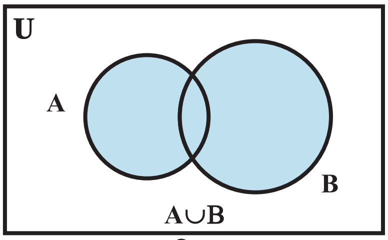
**উদাহরণ 14 :** ধরো X = {রাম, গীতা, আকবর} হল একাদশ শ্রেণির শিক্ষার্থী যারা বিদ্যালয়ের হকি দলে যুক্ত। ধরো Y = {গীতা, ডেভিড, অশোক} হল একাদশ শ্রেণির শিক্ষার্থী যারা বিদ্যালয়ের ফুটবল দলে যুক্ত। X ∪ Y নির্ণয় করো এবং সেটটি ব্যাখ্যা করো।
**সমাধান :** আমরা পাই, X ∪ Y = {রাম, গীতা, আকবর, ডেভিড, অশোক} । এটি শ্রেণির শিক্ষার্থীদের সেট যারা বিদ্যালয়ের হকি দল অথবা ফুটবল দল অথবা উভয় দলের অন্তর্গত।

সুতরাং, দুটি সেটের সংযোগ আমরা নিম্নলিখিতরূপে সংজ্ঞায়িত করতে পারি :

**সংজ্ঞা 6** : দুটি সেট A ও B-এর সংযোগে C সেট হল এমন একটি সেট যা A অথবা B -এর পদ (উভয় সেটে অন্তর্গত পদও) নিয়ে গঠিত। আমরা লিখি,

$A \cup B = \{ x : x \in A$ অথবা $x \in B \}$

দুটি সেটের সংযোগে ভেনচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করা যায়, যা চিত্র 1.4 -এ দেখানো হয়েছে।



চিত্র **1.4**

চিত্র 1.4-এ ছায়াবৃত অঞ্চলটি $A \cup B$ দিয়ে প্রকাশ করা হল।

**সংযোগ প্রক্রিয়ার কয়েকটি ধর্ম (Some Properties of the Operation of Union)**

(i) $A \cup B = B \cup A$ [বিনিময় নিয়ম (Commutative law)]

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ [সংযোগ নিয়ম (Associative law)]

(iii) $A \cup \phi = A$ [অভেদ নিয়ম, $\phi$ হল $\cup$ -এর অভেদ পদ (Law of identity element, $\phi$ is the identity of $\cup$)]

(iv) $A \cup A = A$ [বর্গৈকসম নিয়ম (Idempotent law)]

(v) $U \cup A = U$ [U এর নিয়ম (Law of U)]

**1.10.2 সেটের ছেদ (*Intersection of sets*)** A ও B সেটের ছেদ হল এমন একটি সেট যা A ও B উভয়েরই সব সাধারণ পদগুলো নিয়ে গঠিত। '$\cap$' চিহ্নিটি দিয়ে *ছেদ* প্রকাশ করে। দুটি সেট A এবং B-এর ছেদ হল একটি সেট, যাতে A ও B উভয়েরই সব সাধারণ পদগুলো থাকে। সাংকেতিকরূপে আমরা লিখি—

$A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$।

**উদাহরণ 15** মনে করো, উদাহরণ 12-এর A ও B সেট । $A \cap B$ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা দেখতে পাই 6, 8 কেবলমাত্র সাধারণ পদ যারা A ও B উভয় সেটেই আছে।

অতএব $A \cap B = \{ 6, 8 \}$.

**উদাহরণ 16** মনে করো, উদাহরণ 14-এর X এবং Y সেট। $X \cap Y$ নির্ণয় করো।

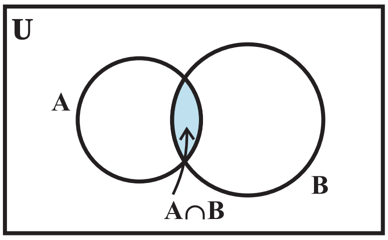
**সমাধান :** আমরা দেখতে পাই শুধুমাত্র 'গীতা' উভয় সেটেরই সাধারণ পদ। অতএব $X \cap Y = \{$গীতা$\}$ ।

**উদাহরণ 17** ধরো, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ এবং $B = \{ 2, 3, 5, 7 \}$। $A \cap B$ নির্ণয় করো এবং অতঃপর দেখাও যে $A \cap B = B$ ।

**সমাধান :** আমরা পাই $A \cap B = \{ 2, 3, 5, 7 \} = B$। আমরা লক্ষ করি যে $B \subset A$ এবং ফলে $A \cap B = B$ ।

**সংজ্ঞা 7** : দুটি সেট A ও B-এর ছেদ হল এমন একটি সেট যাতে A ও B উভয়েরই সাধারণ পদগুলো থাকে। সাংকেতিকরূপে, আমরা লিখি

$A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$



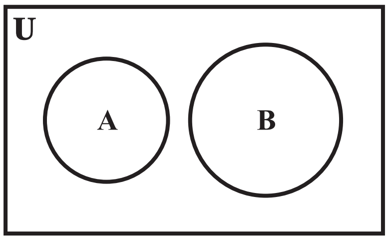
চিত্র **1.5**

চিত্র 1.5-এর ছায়াবৃত অংশটি A ও B-এর ছেদ প্রকাশ করে।

যদি A ও B এমন দুটি সেট যে $A \cap B = \phi$ হয়, তবে A ও B-কে *বিচ্ছেদ সেট* (*disjoint sets*) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, ধরো $A = \{2, 4, 6, 8\}$ এবং $B = \{1, 3, 5, 7\}$। তাহলে A এবং B বিচ্ছেদ সেট, কারণ তাদের মাঝে কোনো সাধারণ পদ নেই।

চিত্র 1.6 -তে ভেনচিত্রের মাধ্যমে বিচ্ছেদ সেট দেখানো হল। উপরোক্ত চিত্রে A এবং B হল বিচ্ছেদ সেট।




চিত্র **1.6**

## ছেদ প্রক্রিয়ার কয়েকটি ধর্ম (Some Properties of Operation of Intersection)

(i) $A \cap B = B \cap A$ [বিনিময় নিয়ম (Commutative law)]

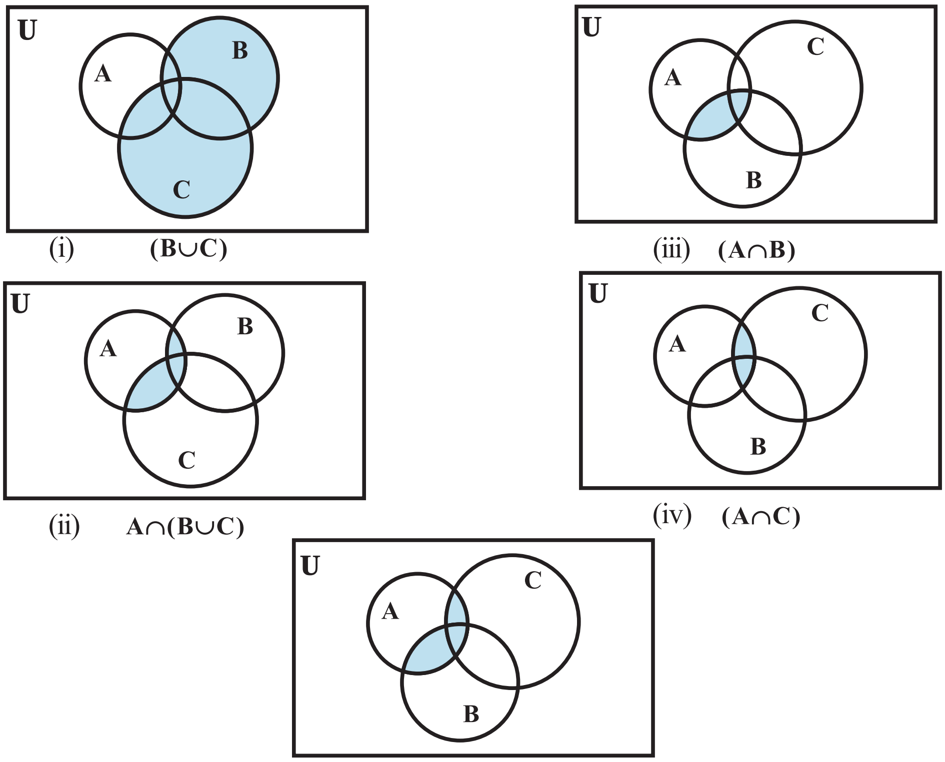
(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ [সংযোগ নিয়ম (Associative law)]

(iii) $\phi \cap A = \phi$, $U \cap A = A$ [$\phi$ এবং U-এর নিয়ম (Law of $\phi$ and U)]

(iv) $A \cap A = A$ [বর্গৈকসম নিয়ম (Idempotent law)]

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [বণ্টন সূত্র অর্থাৎ $\cup$ -এর উপর $\cap$ -এর বণ্টন (Distributive law) i. e., $\cap$ distributes over $\cup$]

এটিকে ভেনচিত্রের মাধ্যমে সহজে দেখানো যেতে পারে [(চিত্র 1.7 (i) থেকে (v)]




(v) (A∩B) ∪ (A∩C)

চিত্র **1.7 (i)** থেকে **(v)**

**1.10.3 সেটের অন্তর (*Difference of sets*)** A এবং B সেটের ক্রমিক অন্তর হল একটি সেট যার মধ্যে A-এর পদগুলো আছে কিন্তু B-এর পদগুলো নেই। সাংকেতিকরূপে, আমরা লিখি A – B এবং পড়া হয় "A বিয়োগ B"।

**উদাহরণ 18 :** ধরো A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = { 2, 4, 6, 8 }। A – B এবং B – A নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা পাই, A – B = { 1, 3, 5 } , যেহেতু 1, 3, 5 পদগুলো A-তে আছে কিন্তু B-তে নেই। এবং B – A = { 8 } , যেহেতু 8 পদটি B-তে আছে কিন্তু A-তে নেই।

আমরা লক্ষ করি যে, A – B ≠ B – A।

**উদাহরণ 19 :** ধরো V = { *a, e, i, o, u* } এবং B = { *a, i, k, u*} , V – B এবং B – V নির্ণয় করো।

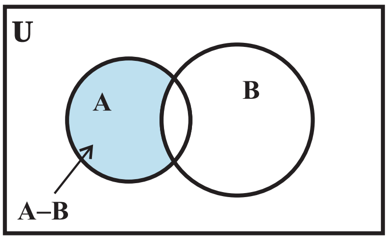
**সমাধান :** আমরা পাই, V – B = { *e, o* } যেহেতু *e, o* পদগুলো V-তে আছে কিন্তু B -তে নেই এবং B – V = { *k* }, যেহেতু *k* পদটি B সেটে আছে V সেটে নেই।

আমরা লক্ষ করি যে, V – B ≠ B – V । সেট গঠন পদ্ধতির প্রতীকের সাহায্যে, আমরা অন্তরের সংজ্ঞা পুনরায় লিখতে পারি নিম্নলিখিত রূপে

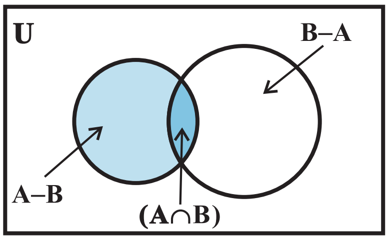
$$A – B = \{ x : x \in A \text{ এবং } x \notin B \}$$

A ও B দুটি সেটের অন্তর ভেনচিত্রের সাহায্যে চিত্র 1.8 এ দেখানো হল।

ছায়াবৃত অংশটি A ও B সেটের অন্তরকে প্রকাশ করে।




চিত্র **1.8**




**চিত্র 1.9**

**মন্তব্য :** A – B, A ∩ B এবং B – A সেটগুলো পরস্পর বিচ্ছিন্ন (mutually disjoint) অর্থাৎ এদের যে কোনো দুটি সেটের ছেদ শূন্য সেট, চিত্রে 1.9 দেখানো হল।

## অনুশীলনী 1.4

1. নিম্নলিখিত প্রতিটি সেট যুগলের সংযোগ সেট নির্ণয় করো :
   (i) X = {1, 3, 5} Y = {1, 2, 3}
   (ii) A = [ *a, e, i, o, u*} B = {*a, b, c*}
   (iii) A = {*x* : *x* একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং 3 -এর গুণিতক}
   B = {*x* : *x* একটি স্বাভাবিক সংখ্যা যা 6 থেকে ছোটো}
   (iv) A = {*x* : *x* একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $1 < x \leq 6$ }
   B = {*x* : *x* একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $6 < x < 10$ }
   (v) A = {1, 2, 3}, B = ϕ
2. ধরো A = { *a, b* }, B = {*a, b, c*}। A ⊂ B হবে কি ? A ∪ B কিরূপ হবে?
3. যদি দুটি সেট A ও B এমন হয় যে A ⊂ B, A ∪ B কীরূপ হবে?
4. যদি A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5, 6}, C = {5, 6, 7, 8 } এবং D = { 7, 8, 9, 10 }হয়, তবে নির্ণয় করো—

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cup C$ (iii) $B \cup C$ (iv) $B \cup D$
(v) $A \cup B \cup C$ (vi) $A \cup B \cup D$ (vii) $B \cup C \cup D$

**5.** উপরোক্ত প্রশ্ন 1-এর প্রতিটি সেট যুগলের ছেদ নির্ণয় করো।

**6.** যদি $A=\{3, 5, 7, 9, 11\}$, $B=\{7, 9, 11, 13\}$, $C=\{11, 13, 15\}$ এবং $D=\{15, 17\}$; নির্ণয় করো—
(i) $A \cap B$ (ii) $B \cap C$ (iii) $A \cap C \cap D$
(iv) $A \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $A \cap (B \cup C)$
(vii) $A \cap D$ (viii) $A \cap (B \cup D)$ (ix) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$
(x) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

**7.** যদি $A = \{x : x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$, $B = \{x : x$ একটি জোড় স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$
$C = \{x : x$ একটি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$ এবং $D = \{x : x$ একটি মৌলিক সংখ্যা$\}$।
(i) $A \cap B$ (ii) $A \cap C$ (iii) $A \cap D$
(iv) $B \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $C \cap D$

**8.** নীচের কোন্ সেট যুগলগুলো পরস্পর বিচ্ছেদ সেট :
(i) $\{1, 2, 3, 4\}$ এবং $\{x : x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $4 \le x \le 6\}$
(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ এবং $\{c, d, e, f\}$
(iii) $\{x : x$ একটি জোড় অখণ্ড সংখ্যা$\}$ এবং $\{x : x$ একটি বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা$\}$

**9.** যদি $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$,
$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, $D = \{5, 10, 15, 20\}$; তবে নির্ণয় করো—
(i) $A - B$ (ii) $A - C$ (iii) $A - D$ (iv) $B - A$
(v) $C - A$ (vi) $D - A$ (vii) $B - C$ (viii) $B - D$
(ix) $C - B$ (x) $D - B$ (xi) $C - D$ (xii) $D - C$

**10.** যদি $X= \{a, b, c, d\}$ এবং $Y = \{f, b, d, g\}$, হয়, তবে নির্ণয় করো—
(i) $X - Y$ (ii) $Y - X$ (iii) $X \cap Y$

**11.** যদি বাস্তব সংখ্যার সেট **R** হয় এবং মূলদ সংখ্যার সেট **Q** হয় তবে **R** – **Q** কী হবে?

**12.** নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলো সত্য বা মিথ্যা কি না বলো । তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও ।
(i) $\{2, 3, 4, 5\}$ এবং $\{3, 6\}$ বিচ্ছেদ সেট।
(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ এবং $\{a, b, c, d\}$ বিচ্ছেদ সেট।
(iii) $\{2, 6, 10, 14\}$ এবং $\{3, 7, 11, 15\}$ বিচ্ছেদ সেট।
(iv) $\{2, 6, 10\}$ এবং $\{3, 7, 11\}$ বিচ্ছেদ সেট।

## 1.11 পূরক সেট (Complement of a Set)

ধরো U সার্বিক সেট যা সব মৌলিক সংখ্যা নিয়ে গঠিত এবং A হল U-এর একটি উপসেট যা 42-এর ভাজক নয় এমন মৌলিক সংখ্যা। সুতরাং, $A = \{x : x \in U$ এবং $x$, 42 -এর ভাজক নয়$\}$ আমরা লক্ষ করি যে, $2 \in U$ কিন্তু $2 \notin A$, কারণ 2, 42 -এর ভাজক। অনুরূপে $3 \in U$ কিন্তু $3 \notin A$ এবং $7 \in U$ কিন্তু $7 \notin A$। এখন U-এর কেবলমাত্র 2, 3 এবং 7 পদগুলো A-এর অন্তর্গত নয়। এই তিনটি মৌলিক সংখ্যার সেট অর্থাৎ $\{2, 3, 7\}$ সেটটিকে U-এর সাপেক্ষে A-এর *পূরক সেট* বলা হয় এবং $A'$ দিয়ে চিহ্নিত

করা হয়। সুতরাং, আমরা পাই, $A' = \{2, 3, 7\}$। অতএব, আমরা দেখি যে,

$A' = \{x : x \in U$ এবং $x \notin A\}$ যা থেকে পরবর্তী সংজ্ঞা পাওয়া যায়।

**সংজ্ঞা 8** : ধরো U হল সার্বিক সেট এবং A হল U-এর একটি উপসেট। তাহলে A-এর পূরক সেট হল এমন একটি সেট যার মধ্যে U সেটের সেসব পদগুলো আছে যেগুলো A সেটে নেই। সাংকেতিক রূপে, U-এর সাপেক্ষে A-এর পূরক সেটকে $A'$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। সুতরাং,

$A' = \{x : x \in U$ এবং $x \notin A\}$ । স্পষ্টতই $A' = U - A$

আমরা লক্ষ করি, A-এর পূরক সেট অন্যভাবে দেখানো যেতে পারে সার্বিক সেট U এবং A সেটের অন্তররূপে।

**উদাহরণ 20 :** ধরো $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ এবং $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ তাহলে $A'$ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা লক্ষ করি যে U-এর শুধু 2, 4, 6, 8, 10 পদগুলো A-এর অন্তর্গত নয়।

সুতরাং, $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

**উদাহরণ 21 :** ধরো, একটি সহশিক্ষামূলক স্কুলের একাদশ শ্রেণির শিক্ষার্থীদের সেট হল সার্বিক সেট U এবং A হল একাদশ শ্রেণির সব বালিকাদের সেট। তাহলে $A'$ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** যেহেতু সব বালিকাদের সেট A, স্পষ্টতই $A'$ হল শ্রেণির সকল বালকদের সেট।

**দ্রষ্টব্য** যদি A সার্বিক সেট U-এর একটি উপসেট হয়, তবে এর পূরক সেট $A'$ ও U-এর একটি উপসেট।

আবার উপরের উদাহরণ 20 থেকে আমরা পাই, $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

সুতরাং, $(A')' = \{x : x \in U$ এবং $x \notin A'\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$

পূরক সেটের সংজ্ঞা থেকে এটি স্পষ্ট যে, সার্বিক সেট U-এর যে কোনো উপসেটের জন্য,

আমরা পাই, $(A')' = A$

এখন আমরা নিম্নের উদাহরণগুলোতে $(A \cup B)'$ এবং $A' \cap B'$ এর ফলাফল নির্ণয় করতে চাই।

**উদাহরণ 22 :** ধরো $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3\}$ এবং $B = \{3, 4, 5\}$, তাহলে

$A', B', A' \cap B', A \cup B$ এবং অতঃপর দেখাও যে $(A \cup B)' = A' \cap B'$।

**সমাধান :** স্পষ্টতই $A' = \{1, 4, 5, 6\}$, $B' = \{1, 2, 6\}$। অতএব $A' \cap B' = \{1, 6\}$

আবার, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$, সুতরাং, $(A \cup B)' = \{1, 6\}$

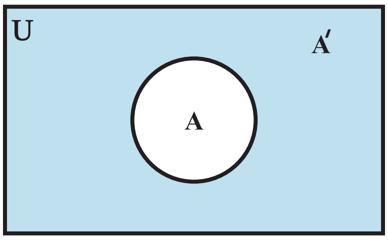
$$(A \cup B)' = \{1, 6\} = A' \cap B'$$

এটি দেখানো যেতে পারে উপরোক্ত ফলাফল সাধারণভাবে সত্য। যদি সার্বিক সেট U-এর যে কোনো দুটি উপসেট A এবং B হয়, তাহলে $(A \cup B)' = A' \cap B'$।

অনুরূপে, $(A \cap B)' = A' \cup B'$। এই দুটি ফলাফলকে নিম্নলিখিতরূপে বিবৃত করা যায় :

*দুটি সেটের সংযোগের পূরক, তাদের নিজেদের পূরকগুলোর ছেদের সমান এবং দুটি সেটের ছেদের পূরক তাদের নিজেদের পূরকগুলোর সংযোগের সমান। এগুলোকে ডি-মরগ্যানের নিয়ম (De Morgan's laws) বলা হয়। গণিতজ্ঞ ডি-মরগ্যানের* নামানুসরে এটা করা হয়।

A সেটের পূরক সেট A′-কে ভেনচিত্রের মাধ্যমে চিত্র 1.10-তে দেখানো হল।




চিত্র **1.10**

ছায়াবৃত অংশ A-এর পূরক সেটকে প্রকাশ করে।

## পূরক সেটের কিছু ধর্মাবলী (Some Properties of Complement Sets)

**1.** পূরক নিয়ম: (i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap A' = \phi$

**2.** ডি মরগ্যানের নিয়ম : (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

**3.** দ্বি-পূরক নিয়ম : $(A')' = A$

**4.** শূন্য সেট ও সার্বিক সেটের নিয়ম : $\phi' = U$ এবং $U' = \phi$.

ভেনচিত্রের সাহায্যে এই নিয়মগুলো যথার্থতা যাচাই করা যায়।

## অনুশীলনী 1.5

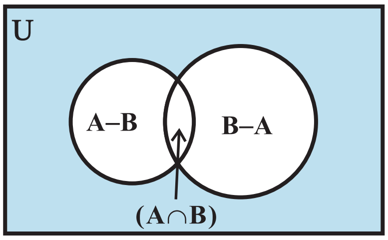
1. ধরো $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6\}$, নির্ণয় করো : (i) $A'$ (ii) $B'$ (iii) $(A \cup C)'$ (iv) $(A \cup B)'$ (v) $(A')'$ (vi) $(B - C)'$
2. যদি $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ হয়, তবে নিম্নলিখিত সেটগুলোর পূরক সেট নির্ণয় করো:
   (i) $A = \{a, b, c\}$ (ii) $B = \{d, e, f, g\}$
   (iii) $C = \{a, c, e, g\}$ (iv) $D = \{f, g, h, a\}$
3. স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে সার্বিক সেট ধরে নিয়ে, নিম্নলিখিত সেটগুলোর পূরক সেট লেখো :
   (i) $\{x : x$ হল একটি জোড় স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$ (ii) $\{x : x$ একটি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$
   (iii) $\{x : x$ হল 3-এর ধনাত্মক গুণিতক$\}$ (iv) $\{x : x$ একটি মৌলিক সংখ্যা $\}$
   (v) $\{x : x$ হল 3 এবং 5 দিয়ে বিভাজ্য স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$
   (vi) $\{x : x$ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা $\}$ (vii) $\{x : x$ একটি পূর্ণঘন সংখ্যা$\}$
   (viii) $\{x : x + 5 = 8\}$ (ix) $\{x : 2x + 5 = 9\}$
   (x) $\{x : x \geq 7\}$ (xi) $\{x : x \in N$ এবং $2x + 1 > 10\}$
4. যদি $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ এবং $B = \{2, 3, 5, 7\}$ হয়, তবে যাচাই করো—
   (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
5. নিম্নলিখিত প্রতিটি ক্ষেত্রের যথাযথ ভেনচিত্র আঁকো :
   (i) $(A \cup B)'$, (ii) $A' \cap B'$, (iii) $(A \cap B)'$, (iv) $A' \cup B'$
6. ধরো সমতলের সব ত্রিভুজগুলোর সেট U। A হল কমপক্ষে একটি কোণ 60° ব্যাতিরেকে গঠিত সকল ত্রিভুজের সেট। তবে A′ কী হবে?

**7.** শূন্যস্থান পূর্ণ করে নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলোকে সঠিক বিবৃতিতে পরিণত করো :

(i) $A \cup A' = \ldots$ (ii) $\phi' \cap A = \ldots$

(iii) $A \cap A' = \ldots$ (iv) $U' \cap A = \ldots$

## 1.12 দুটি সেটের সংযোগ ও ছেদ প্রয়োগে ব্যবহারিক সমস্যা (Practical Problems on Union and Intersection of Two Sets)




চিত্র **1.11**

পূর্বের অনুচ্ছেদে, আমরা দুটি সেটের সংযোগ, ছেদ এবং অন্তর শিখেছি। এই অনুচ্ছেদে, আমাদের বাস্তব জীবনের সাথে সম্পর্কিত কিছু ব্যবহারিক সমস্যা নিয়ে আলোচনা করব।

এই অনুচ্ছেদে নির্ণীত সূত্রগুলো পরবর্তী সম্ভাবনা অধ্যায়ে (16 অধ্যায়ে) প্রয়োগ হবে।

ধরো A ও B দুটি সসীম সেট। যদি $A \cap B = \phi$ হয়, তবে

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ... (1)

$A \cup B$ -এর পদগুলো হয় A সেটে বা B সেটে আছে কিন্তু উভয় সেটে না থাকলে তবে $A \cap B = \phi$। সুতরাং, (1) নং সম্পর্কটি সরাসরি সিদ্ধ হয়।

সাধারণভাবে যদি A ও B দুটি সসীম সেট হয়, তবে

(ii) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ... (2)

লক্ষ করো যে, $A - B$, $A \cap B$ এবং $B - A$ সেটসমূহ বিচ্ছিন্ন এবং এদের সংযোগ হল $A \cup B$ (চিত্র 1.11)। অতএব,

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$
$$= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) + n(A \cap B) - n(A \cap B)$$
$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$, যা (2) -কে সিদ্ধ করে।

(iii) যদি A, B এবং C সসীম সেট হয়, তাহলে

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad \ldots (3)$$

প্রকৃতপক্ষে, আমরা পাই—

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)]$$ [(2) এর সাহায্যে]

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[A \cap (B \cup C)]$$ [(2) এর সাহায্যে]

যেহেতু $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, আমরা পাই

$$n[A \cap (B \cup C)] = n(A \cap B) + n(A \cap C) - n[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$
$$= n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

অতএব,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

যা (3) -কে প্রমাণ করে।

**উদাহরণ 23:** যদি X ও Y দুটি সেট এরূপ হয় যে $X \cup Y$-এর 50 টি পদ, X-এর 28 টি পদ এবং Y-এর 32 টি পদ আছে, তবে $X \cap Y$-এর কয়টি পদ আছে?

**সমাধান :** প্রদত্ত

$n(X \cup Y) = 50$, $n(X) = 28$, $n(Y) = 32$, $n(X \cap Y) = ?$

$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$, সূত্র প্রয়োগে আমরা পাই—

$$n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$$
$$= 28 + 32 - 50 = 10$$

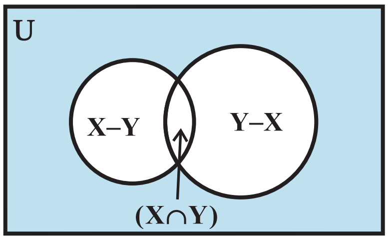



Fig 1.12

**বিকল্পরূপে,** ধরো $n(X \cap Y) = k$, তবে

$n(X - Y) = 28 - k$ , $n(Y - X) = 32 - k$ ( চিত্র 1.12 -এর ভেনচিত্র থেকে )

এটি থেকে পাওয়া যায়, $50 = n(X \cup Y) = n(X - Y) + n(X \cap Y) + n(Y - X)$
$= (28 - k) + k + (32 - k)$

সুতরাং, $k = 10$.

**উদাহরণ 24 :** একটি বিদ্যালয়ে 20 জন শিক্ষক আছেন যারা গণিত অথবা পদার্থবিদ্যায় শিক্ষাদান করেন। এদের মধ্যে 12 জন গণিতে এবং 4 জনের প্রত্যেকে পদার্থবিদ্যা ও গণিত উভয় বিষয়ে শিক্ষাদান করেন। কতজন পদার্থবিদ্যায় শিক্ষাদান করেন?

**সমাধান :** ধরো, গণিত শিক্ষকের সেট M এবং পদার্থবিদ্যার শিক্ষকের সেটকে P দিয়ে সূচিত হয়। প্রদত্ত সমস্যার বিবরণে 'অথবা' শব্দটি সংযোগ প্রক্রিয়ার ইঙ্গিত দেয়, অপরদিকে 'এবং' শব্দটি ছেদ প্রক্রিয়ার ইঙ্গিত দেয়। অতএব, আমরা পাই—

$n(M \cup P) = 20$ , $n(M) = 12$ এবং $n(M \cap P) = 4$

আমরা প $n(P)$ নির্ণয় করব।

$n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P)$, প্রয়োগে আমরা পাই—

$20 = 12 + n(P) - 4$

সুতরাং, $n(P) = 12$

অতএব, 12 জন শিক্ষক পদার্থবিদ্যায় শিক্ষাদান করেন।

**উদাহরণ 25 :** একটি শ্রেণির 35 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 24 জন ক্রিকেট খেলে এবং 16 জন ফুটবল খেলে। প্রতি শিক্ষার্থী যদি কমপক্ষে একটি খেলা খেলে, তবে কতজন শিক্ষার্থী উভয় খেলা, অর্থাৎ ক্রিকেট এবং ফুটবল খেলে?

**সমাধান :** ধরো, যে সব শিক্ষার্থী ক্রিকেট খেলে তাদের সেট X এবং যারা ফুটবল খেলে তাদের সেট Y। সুতরাং, কমপক্ষে একটি খেলা খেলে এমন শিক্ষার্থীদের সেট $X \cup Y$ এবং উভয় খেলাই খেলে এমন শিক্ষার্থীর সেট $X \cap Y$।

দেওয়া হয়েছে, $n(X) = 24$, $n(Y) = 16$, $n(X \cup Y) = 35$, $n(X \cap Y) = ?$

$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$, সূত্র প্রয়োগে আমরা পাই—

$35 = 24 + 16 - n(X \cap Y)$

সুতরাং, $n(X \cap Y) = 5$

অর্থাৎ, 5 জন শিক্ষার্থী উভয় খেলা খেলে।

**উদাহরণ 26 :** একটি বিদ্যালয়ে 400 জন শিক্ষার্থীর উপর একটি সমীক্ষায় দেখা গেল, 100 জন আপেলের সিরাপ, 150 জন কমলার সিরাপ এবং 75 জন উভয় সিরাপ পান করে। কতজন শিক্ষার্থী আপেল বা কমলা কোনোটিরই সিরাপ পান করে না, নির্ণয় করো।

**সমাধান :** ধরো, সমীক্ষা করা সব শিক্ষার্থীর সেট U এবং আপেলের সিরাপ পান করে এমন শিক্ষার্থীদের সেট A ও কমলার সিরাপ পান করে এমন শিক্ষার্থীদের সেট B। তাহলে,

$n\,(\mathrm{U}) = 400,\ n\,(\mathrm{A}) = 100,\ n\,(\mathrm{B}) = 150$ এবং $n\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 75.$

এখানে, $n\,(\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}') = n\,(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'$

$= n\,(\mathrm{U}) - n\,(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$

$= n\,(\mathrm{U}) - n\,(\mathrm{A}) - n\,(\mathrm{B}) + n\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

$= 400 - 100 - 150 + 75 = 225$

অতএব, 225 জন শিক্ষার্থী আপেল বা কমলার কোনোটিরই সিরাপ পান করে না।

**উদাহরণ 27 :** 200 জন ব্যক্তি চর্মরোগে পীড়িত। এর মধ্যে 120 জন $\mathrm{C}_1$ রাসায়নিক, 50 জন $\mathrm{C}_2$ রাসায়নিক এবং 30 জন উভয় রাসায়নিক $\mathrm{C}_1$ ও $\mathrm{C}_2$ দিয়ে প্রভাবিত। তবে ব্যক্তি সংখ্যা নির্ণয় করো যারা প্রভাবিত হয়েছেন—

(i) $\mathrm{C}_1$ রাসায়নিক কিন্তু $\mathrm{C}_2$ রাসায়নিক নয়। (ii) $\mathrm{C}_2$ রাসায়নিক কিন্তু $\mathrm{C}_1$ রাসায়নিক নয়।

(iii) $\mathrm{C}_1$ রাসায়নিক বা $\mathrm{C}_2$ রাসায়নিক।

**সমাধান :** ধরো, চর্মরোগ পীড়িত ব্যক্তিদের সেট U সার্বিক, $\mathrm{C}_1$ রাসায়নিকে প্রভাবিত ব্যক্তিদের সেট A এবং $\mathrm{C}_2$ রাসায়নিক প্রভাবিত ব্যক্তিদের সেট B।

এখানে $n\,(\mathrm{U}) = 200,\ n\,(\mathrm{A}) = 120,\ n\,(\mathrm{B}) = 50$ এবং $n\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 30$

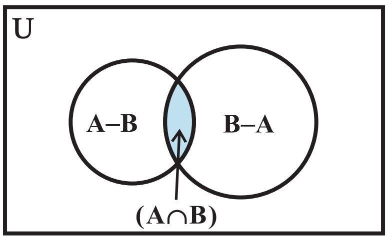
(i) চিত্র 1.13 -এর ভেনচিত্র থেকে, আমরা পাই—

$\mathrm{A} = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$

$n\,(\mathrm{A}) = n(\mathrm{A} - \mathrm{B}) + n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ (যেহেতু $\mathrm{A} - \mathrm{B}$) ও $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ সেটদ্বয় বিচ্ছিন্ন)

অথবা $n\,(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = n\,(\mathrm{A}) - n\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 120 - 30 = 90$

সুতরাং, $\mathrm{C}_1$ রাসায়নিকে প্রভাবিত কিন্তু $\mathrm{C}_2$ রাসায়নিকে প্রভাবিত নয় এমন ব্যক্তির সংখ্যা 90 ।



চিত্র **1.13**

(ii) চিত্র 1.13 থেকে, আমরা পাই

$\mathrm{B} = (\mathrm{B} - \mathrm{A}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$

এবং, $n\,(\mathrm{B}) = n\,(\mathrm{B} - \mathrm{A}) + n\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

(যেহেতু $\mathrm{B} - \mathrm{A}$ এবং $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ সেটদ্বয় বিচ্ছিন্ন)

অথবা $n\,(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = n\,(\mathrm{B}) - n\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

$= 50 - 30 = 20$

$\mathrm{C}_2$ রাসায়নিকে প্রভাবিত, কিন্তু $\mathrm{C}_1$ রাসায়নিকে প্রভাবিত নয় এমন ব্যক্তির সংখ্যা 20 ।

(iii) $C_1$ রাসায়নিক বা $C_2$ রাসায়নিকে প্রভাবিত ব্যক্তির সংখ্যা, অর্থাৎ

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 120 + 50 - 30 = 140.$$

## অনুশীলনী 1.6

**1.** যদি X ও Y দুটি সেট এরূপ যে, $n(X) = 17$, $n(Y) = 23$ এবং $n(X \cup Y) = 38$, তবে $n(X \cap Y)$ নির্ণয় করো।

**2.** দুটি সেট X এবং Y এরূপ যে, $X \cup Y$ সেটের পদসংখ্যা 18 , X সেটে 8 টি পদ, Y সেটে 15 টি পদ থাকলে $X \cap Y$ -এর পদ সংখ্যা কত হবে?

**3.** 400 জনের একটি দলে, 250 জন হিন্দিতে কথা বলে এবং 200 জন ইংরেজিতে কথা বলে। কতজন লোক হিন্দি এবং ইংরেজি উভয় ভাষায় কথা বলতে পারে?

**4.** যদি S ও T দুটি সেট এমন যে S -এর 21 টি পদ, T এর 32 টি পদ এবং $S \cap T$ -এর 11 টি পদ আছে। $S \cup T$ -এর পদ সংখ্যা কত হবে?

**5.** যদি X ও Y দুটি সেট এরূপ যে X -এর 40 টি পদ, $X \cup Y$ -এর 60 টি পদ এবং $X \cap Y$ -এর 10 টি পদ থাকে, তবে Y -এর পদ সংখ্যা কত?

**6.** 70 জনের একটি দলে, 37 জন কফি, 52 জন চা এবং প্রতিটি লোক কমপক্ষে একটি পানীয় পছন্দ করে, তবে উভয় পানীয় পছন্দ করে এমন লোকের সংখ্যা কত?

**7.** 65 জনের একটি দলে, 40 জন ক্রিকেট, 10 জন ক্রিকেট ও টেনিস দুটোই পছন্দ করে। কতজন শুধু টেনিস পছন্দ করে কিন্তু ক্রিকেট পছন্দ করে না? কতজন টেনিস পছন্দ করে?

**8.** একটি কমিটিতে 50 জন ফরাসি ভাষায়, 20 জন স্পেনিস ভাষায় এবং 10 জন ফরাসি ও স্পেনিস উভয় ভাষাতেই কথা বলে। কতজন কমপক্ষে একটি ভাষায় কথা বলে?

### *বিবিধ উদাহরণমালা*

**উদাহরণ 28 :** দেখাও যে, " CATARACT " শব্দটির বানানে বর্ণমালার সেট এবং" TRACT" শব্দের বানানে বর্ণমালার সেট সমান।

**সমাধান :** ধরো X হল " CATARACT " শব্দের বর্ণমালার সেট, তাহলে

$$X = \{ C, A, T, R \}$$

ধরো X হল " TRACT" শব্দের বর্ণমালার সেট তাহলে

$$Y = \{ T, R, A, C, T \} = \{ T, R, A, C \}$$

যেহেতু X এর প্রতিটি পদ Y-এর অন্তর্গত এবং Y-এর প্রতিটি পদ X-এর অন্তর্গত, এটি থেকে পাওয়া যায় X =Y ।

**উদাহরণ 29 :** $\{ -1, 0, 1 \}$ সেটটির সব উপসেটগুলোর তালিকা প্রস্তুত করো ।

**সমাধান :** ধরো $A = \{ -1, 0, 1 \}$। A-এর একটি উপসেট যার কোনো পদ নেই তা হল শূন্য সেট $\phi$। একপদ বিশিষ্ট A-এর উপসেটগুলো হল $\{ -1 \}$, $\{ 0 \}$, $\{ 1 \}$। দুইপদ বিশিষ্ট A-এর উপসেটগুলো হল $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$ ,$\{0, 1\}$। তিনটি পদ বিশিষ্ট A-এর উপসেট হল A সেট নিজেই। সুতরাং, A-এর সব উপসেটগুলো হল $\phi$, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$ এবং $\{-1, 0, 1\}$।

**উদাহরণ 30 :** দেখাও যে, $A \cup B = A \cap B$ প্রকাশ করে $A = B$।

**সমাধান :** ধরো $a \in A$. তাহলে $a \in A \cup B$ । যেহেতু $A \cup B = A \cap B$ , $a \in A \cap B$ । সুতরাং, $a \in B$। অতএব $A \subset B$। অনুরূপে, যদি $b \in B$ হয়, তবে $b \in A \cup B$ । যেহেতু

$A \cup B = A \cap B$, $b \in A \cap B$। সুতরাং, $b \in A$ । সুতরাং, $B \subset A$ । সুতরাং, $A = B$ ।

**উদাহরণ 31** যে কোনো দুটি সেট A ও B -এর ক্ষেত্রে দেখাও যে,

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B).$$

**সমাধান :** ধরো $X \in P(A \cap B)$ । তাহলে $X \subset A \cap B$, তাই $X \subset A$ এবং $X \subset B$ । সুতরাং, $X \in P(A)$ এবং $X \in P(B)$ যা বোঝায় $X \in P(A) \cap P(B)$ । তা থেকে পাওয়া যায় $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$ । ধরো $Y \in P(A) \cap P(B)$ । সুতরাং $Y \in P(A)$ এবং $Y \in P(B)$ । সুতরাং, $Y \subset A$ এবং $Y \subset B$ । অতএব $Y \subset A \cap B$, যা থেকে পাওয়া যায় $Y \in P(A \cap B)$ । সুতরাং, $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$
অতএব $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ ।

**উদাহরণ 32 :** একটি বাজার অনুসন্ধানকারীদল 1000 জন ভোক্তার উপর সমীক্ষা করে রিপোর্ট করেন যে 720 জন A -সামগ্রী পছন্দ করে এবং 450 জন B-সামগ্রী পছন্দ করে, তবে ন্যূনতম কতজন উভয় সামগ্রী পছন্দ করে ?

**সমাধান :** ধরা যাক, যে সব ভোক্তার উপর সমীক্ষা চালানো হল তাদের সেট U। S ও T হল যথাক্রমে সামগ্রী A ও সামগ্রী B - পছন্দ করে এরূপ ভোক্তার সেট। দেওয়া আছে—

$$n(U) = 1000, n(S) = 720, n(T) = 450$$

সুতরাং, $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$

$$= 720 + 450 - n(S \cap T) = 1170 - n(S \cap T)$$

অতএব, $n(S \cup T)$-এর মান সর্বোচ্চ হবে যখন $n(S \cap T)$-এর মান সর্বনিম্ন হয়। কিন্তু $S \cup T \subset U$ বোঝায় $n(S \cup T) \leq n(U) = 1000$ । সুতরাং, $n(S \cup T)$ -এর সর্বনিম্ন মান 1000 । অতএব, $n(S \cap T)$ এর সর্বনিম্নমান 170 । সুতরাং, উভয় সামগ্রী কমপক্ষে পছন্দ করে এমন ভোক্তার সংখ্যা 170।

**উদাহরণ 33 :** 500 জন গাড়ির মালিকের উপর একটি সমীক্ষায় দেখা গেল, 400 জন A-গাড়ির এবং 200 জন B গাড়ির, 50 জন A ও B উভয় প্রকার গাড়ির মালিক। প্রদত্ত রাশিতথ্যটি কি সঠিক ?

**সমাধান :** ধরো, U হল সমীক্ষায় গাড়ির মালিকদের সেট, M ও S যথাক্রমে A ও B গাড়ির মালিকদের সেট।

দেওয়া আছে, $n(U) = 500$, $n(M) = 400$, $n(S) = 200$ এবং $n(S \cap M) = 50$.

তাহলে $n(S \cup M) = n(S) + n(M) - n(S \cap M) = 200 + 400 - 50 = 550$

কিন্তু $S \cup M \subset U$ বোঝায় $n(S \cup M) \leq n(U)$ ।

এটি বিরুদ্ধাচরণ করে। সুতরাং, প্রদত্ত রাশি তথ্য সঠিক নয়।

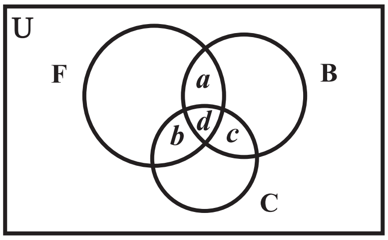
**উদাহরণ 34 :** একটি কলেজ 38 টি মেডেল ফুটবলে, 15 টি মেডেল বাস্কেটবলে এবং 20 টি মেডেল ক্রিকেট খেলায় প্রদান করে। যদি এই পদকগুলো মোট 54 জন লোকে পায় এবং কেবল তিনজন লোক তিনটি খেলাতেই পদক পায়, তবে কতজন লোক তিনটি খেলায় ঠিক দুটিতে পদক পেয়েছিল ?

**সমাধান :** ধরো F, B এবং C হল যথাক্রমে ফুটবল, বাস্কেটবল এবং ক্রিকেটে পদক পেয়েছে এমন লোকেদের সেট।

তাহলে $n(\text{F}) = 38$, $n(\text{B}) = 15$, $n(\text{C}) = 20$

$n(\text{F} \cup \text{B} \cup \text{C}) = 58$ এবং $n(\text{F} \cap \text{B} \cap \text{C}) = 3$

অতএব, $n(\text{F} \cup \text{B} \cup \text{C}) = n(\text{F}) + n(\text{B}) + n(\text{C}) - n(\text{F} \cap \text{B}) - n(\text{F} \cap \text{C}) - n(\text{B} \cap \text{C}) + n(\text{F} \cap \text{B} \cap \text{C})$,




চিত্র 1.14

প্রদান করে, $n(\text{F} \cap \text{B}) + n(\text{F} \cap \text{C}) + n(\text{B} \cap \text{C}) = 18$

চিত্র 1.14 প্রদত্ত ভেনচিত্র লক্ষ করো।

এখানে $a$ হল কেবল ফুটবল ও বাস্কেটবলে মেডেল প্রাপ্ত লোকেদের সংখ্যা, $b$ হল কেবল ফুটবল ও ক্রিকেটে মেডেল প্রাপ্ত লোকেদের সংখ্যা এবং $c$ হল কেবল বাস্কেটবল ও ক্রিকেটে মেডেলপ্রাপ্ত লোকেদের সেট এবং $d$-হল তিনটি খেলাতেই মেডেল প্রাপ্ত লোকেদের সেট।

সুতরাং, $d = n(\text{F} \cap \text{B} \cap \text{C}) = 3$ এবং $a + d + b + d + c + d = 18$ অর্থাৎ $a + b + c = 9$, যা হল তিনটির ঠিক দুটি খেলাতে মেডেল প্রাপ্ত লোকের সংখ্যা।

## *অধ্যায় 1-এর বিবিধ অনুশীলন*

**1.** নিম্নলিখিত সেটগুলোর যারা একে অপরের উপসেট তা নির্ণয় করো :

$\text{A} = \{x : x \in \mathbf{R}$ এবং $x^2 - 8x + 12 = 0$ কে $x$ সিদ্ধ করে $\}$

$\text{B} = \{2, 4, 6\}$, $\text{C} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $\text{D} = \{6\}$.

**2.** নিচের প্রতিক্ষেত্রে, বিবৃতিগুলো সত্য না মিথ্যা নির্ণয় করো। যদি এটি সত্য হয়, তবে তা প্রমাণ করো। যদি মিথ্যা হয়, তবে একটি উদাহরণ দাও।

(i) যদি $x \in \text{A}$ এবং $\text{A} \in \text{B}$, তবে $x \in \text{B}$

(ii) যদি $\text{A} \subset \text{B}$ এবং $\text{B} \in \text{C}$, তবে $\text{A} \in \text{C}$

(iii) যদি $\text{A} \subset \text{B}$ এবং $\text{B} \subset \text{C}$, তবে $\text{A} \subset \text{C}$

(iv) যদি $\text{A} \not\subset \text{B}$ এবং $\text{B} \not\subset \text{C}$, তবে $\text{A} \not\subset \text{C}$

(v) যদি $x \in \text{A}$ এবং $\text{A} \not\subset \text{B}$, তবে $x \in \text{B}$

(vi) যদি $\text{A} \subset \text{B}$ এবং $x \notin \text{B}$, তবে $x \notin \text{A}$

**3.** ধরো A, B, এবং C সেটগুলো এমন যে $\text{A} \cup \text{B} = \text{A} \cup \text{C}$ এবং $\text{A} \cap \text{B} = \text{A} \cap \text{C}$, দেখাও যে, $\text{B} = \text{C}$.

**4.** দেখাও যে, নিম্নলিখিত শর্ত চারটি সমতুল্য হয় :

(i) $\text{A} \subset \text{B}$ (ii) $\text{A} - \text{B} = \phi$ (iii) $\text{A} \cup \text{B} = \text{B}$ (iv) $\text{A} \cap \text{B} = \text{A}$

**5.** দেখাও যে, যদি $\text{A} \subset \text{B}$ হয়, তাহলে $\text{C} - \text{B} \subset \text{C} - \text{A}$.

**6.** ধরে নাও $\text{P}(\text{A}) = \text{P}(\text{B})$ দেখাও যে, $\text{A} = \text{B}$

**7.** যে কোনো দুটি সেট A ও B এর জন্য $\text{P}(\text{A}) \cup \text{P}(\text{B}) = \text{P}(\text{A} \cup \text{B})$ এটি সত্য হবে কি? তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

**8.** যে কোনো দুটি সেট A ও B এর জন্য দেখাও যে,
$A = (A \cap B) \cup (A - B)$ এবং $A \cup (B - A) = (A \cup B)$

**9.** সেটের ধর্মাবলী প্রয়োগে দেখাও যে,
(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$.

**10.** দেখাও যে, $A \cap B = A \cap C$ এর তাৎপর্য $B = C$ হওয়া আবশ্যক নয়।

**11.** ধরো A ও B দুটি সেট। কোনো সেট X-এর জন্য যদি $A \cap X = B \cap X = \phi$ এবং $A \cup X = B \cup X$ হয়, তবে দেখাও যে $A = B$ ।
(ইঙ্গিত : $A = A \cap (A \cup X)$, $B = B \cap (B \cup X)$ এবং বণ্টন সূত্র প্রয়োগ করো।)

**12.** তিনটি সেট A, B এবং C এরূপ যে $A \cap B$, $B \cap C$ এবং $A \cap C$ অশূন্য সেট এবং $A \cap B \cap C = \phi$, তবে A, B এবং C নির্ণয় করো।

**13.** একটি বিদ্যালয়ে 600 জন শিক্ষার্থীর সমীক্ষায় দেখা গেল, 150 জন চা, 225 জন কফি, 100 জন চা ও কফি উভয়ই পান করতে পছন্দ করে। কতজন শিক্ষার্থী চা বা কফি কোনোটিই পছন্দ করে না, নির্ণয় করো।

**14.** শিক্ষার্থীর একটি দলে 100 জন হিন্দি জানে, 50 জন ইংরেজি জানে এবং 25 জন উভয়টিই জানে। প্রতিটি শিক্ষার্থী হিন্দি বা ইংরেজির কোনো একটি জানে। ওই দলে কতজন শিক্ষার্থী আছে?

**15.** 60 জন লোকের উপর সমীক্ষায় দেখা গেল 25 জন সংবাদপত্র H পড়ে, 26 জন সংবাদপত্র T পড়ে, 26 জন সংবাদপত্র I পড়ে, 9 জন H এবং I উভয়ই পড়ে, 11 জন H ও T উভয়ই পড়ে, 8 জন T ও I উভয়ই পড়ে, 3 জন তিনটি পত্রিকাই পড়ে।
(i) কমপক্ষে একটি সংবাদপত্র পড়ে এমন লোকের সংখ্যা নির্ণয় করো।
(ii) কমপক্ষে একটি সংবাদপত্র পড়ে এমন লোকের সংখ্যা নির্ণয় করো।

**16.** একটি সমীক্ষায় দেখা গেল 21 জন A সামগ্রী, 26 জন B সামগ্রী এবং 29 জন C সামগ্রী পছন্দ করে। যদি 14 জন A ও B, 12 জন C ও A, 14 জন B ও C এবং 8 জন তিনটি সামগ্রী পছন্দ করে, তবে কতজন শুধু C সামগ্রী পছন্দ করে?

## সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে কয়েকটি মৌলিক সংজ্ঞা এবং সেটের কয়েকটি প্রক্রিয়া আলোচিত হয়েছে। নীচে সংক্ষেপে এগুলো দেওয়া হল :

- সুসংজ্ঞাত বস্তুসমূহের সমাহারকে সেট বলে।
- একটি সেট যার মধ্যে কোনো পদ নেই তাকে শূন্য সেট বলে।
- যে সেটে নির্দিষ্ট সংখ্যক পদ থাকে তাকে সসীম সেট বলে, অন্যথায় সেটটিকে অসীম সেট বলে।
- দুটি সেট A ও B কে সমান বলা হবে যদি তাদের মধ্যে ঠিক একই পদ থাকে।
- একটি সেট A-কে B -এর উপসেট বলা হবে যদি, A-এর প্রতিটি পদ B-এরও একটি পদ হয়। অন্তরালগুলো **R**-এর উপসেট।

- A সেটের সব উপসেটগুলোর সংগ্রহকে A-এর ঘাতসেট বলে। এটিকে P(A) দিয়ে সূচিত করা হয়।
- দুটি সেট A ও B -এর সংযোগ হল এমন একটি সেট যার মধ্যে A অথবা B -এর পদগুলো থাকে।
- দুটি সেট A ও B -এর ছেদ হল এমন একটি সেট যার মধ্যে দুটি সেট A ও B -এর সাধারণ পদগুলো থাকে। দুটি সেট A ও B -এর এই ক্রমে অন্তর হল সেই সেট যার পদগুলো A-তে আছে কিন্তু B-তে নেই।
- সার্বিক সেট U-এর উপসেট A-এর পূরক সেট হল সেই সেট যার পদগুলো U-তে আছে কিন্তু A-তে নেই।
- যে কোনো দুটি সেট A ও B -এর জন্য $(A \cup B)' = A' \cap B'$ এবং $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- যদি দুটি সেট A ও B-এর ক্ষেত্রে $A \cap B = \phi$, হলে

  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

  যদি $A \cap B \neq \phi$ হয়, তাহলে

  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

## *ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট*

জার্মান গণিতজ্ঞ জর্জ ক্যান্টরকে (1845-1918) আধুনিক সেটতত্ত্বের অধিকাংশ বিষয়ের জনক বলা হয়। 1874 থেকে 1897 এর মধ্যবর্তী সময়ে সেটতত্ত্ব সম্পর্কে ওনার গুরুত্বপূর্ণ কাগজপত্রগুলো প্রকাশ হয়। ত্রিকোণমিতিক শ্রেণি $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$ -এর অধ্যয়নকালে তিনি সেটতত্ত্বের সংস্পর্শে আসেন। 1874 সালে উনি একটি গবেষণা পত্রে প্রকাশ করেন যে বাস্তব সংখ্যাগুলোর সেটের সাথে অখণ্ড সংখ্যার এক এক সম্পর্ক স্থাপন করা যায় না। 1879 -এর পর বিমূর্ত সেটের ধর্মাবলির উপর কয়েকটি গবেষণাপত্র প্রকাশ করেন।

ক্যান্টরের গবেষণামূলক কাজগুলো অপর বিখ্যাত গণিতবিদ রিচার্ড ডেডেকাইন্ড (1831-1916) কর্তৃক উচ্চ প্রশংসিত হয়। কিন্তু ক্রোনেকার (1810-1993), অসীম সেটকে সসীম অনুরূপ বিবেচনা করায় ওনার সমালোচনা করেন। অপর জার্মান গণিতজ্ঞ Gottlob Frege, শতাব্দির শেষে সেটতত্ত্বকে তর্কশাস্ত্রের নীতির মাধ্যমে উপস্থাপন করেন। ঐ সময় পর্যন্ত সম্পূর্ণ সেটতত্ত্ব সব সেটগুলোতে সেটের অস্তিত্ব কল্পনার উপর ভিত্তি করে দাঁড়িয়েছিল। বিখ্যাত ইংরেজ দার্শনিক ব্রেটান্ড রাসেল (1872-1970) যিনি 1902 সালে দেখিয়েছিলেন সব সেটগুলোতে সেটের অস্তিত্ব কল্পনা বিরুদ্ধ। যা থেকে রাসেলের বিখ্যাত কূটাভাষ পাওয়া যায়। এ সম্পর্কে Paul R.Halmos ওনার পুস্তক ‘Naive Set Theory’-তে লিখেছেন যে “nothing contains everything”।

রাসেলের কুটাভাষ শুধু সেটতত্ত্বের উপর নয়। পরবর্তীকালে বাহু গণিতজ্ঞ এবং তর্কশাস্ত্রবিদেরা অনেক কুটাভাষ তৈরি করেছেন। এমন কুটাভাষগুলোর ফলস্বরূপ 1908 সালে Ernst Zermelo সেটতত্ত্বের প্রথম স্বতঃসিদ্ধকরণ প্রকাশ করেন। 1922 সালে অপর একটি প্রস্তাবনা করেন আব্রাহাম ফ্রেঙ্কেল। 1925 সালে জন ভননিউম্যান নিয়মিতকরণের স্বতঃসিদ্ধ স্পষ্টরূপে ব্যক্ত করেন। পরবর্তী 1937 সালে পল বার্নেস আরো এক সেট সন্তোষজনক স্বতঃসিদ্ধকরণ প্রকাশ করেন। 1940 সালে এই স্বতঃসিদ্ধগুলোর পরিবর্তিত রূপ, Kurt Gödel তার মনোগ্রাফে দিয়েছেন। এটি Von Neumann-Bernays (VNB) অথবা Gödel-Bernays (GB) সেট তত্ত্ব হিসেবে খ্যাত।

এসব প্রতিবন্ধকতা সত্ত্বেও গণিতে আজকাল ক্যান্টরের সেটতত্ত্বের প্রয়োগ আছে। প্রকৃতপক্ষে এখন গণিতের অধিকাংশ ধারণা এবং ফলাফলগুলো সেটতত্ত্বগত ভাষাতে প্রকাশ করা হয়।

অধ্যায় 2

# সম্বন্ধ ও অপেক্ষক

# RELATIONS AND FUNCTIONS

❖*Mathematics is the indispensable instrument of all physical research. – BERTHELOT* ❖

## 2.1 ভূমিকা

গণিতের অধিকাংশ বিষয়ে একটি নমুনা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে — রাশিগুলোর সাথে তাদের পরিবর্তনের সংযোগের পরিচয় সাধন করা হয়। দৈনন্দিন জীবনে আমরা অনেক ধরনের সম্বন্ধ দেখতে পাই। যেমন ভাই-বোন, পিতা ও পুত্র, শিক্ষক এবং বিদ্যার্থী। গণিতেও আমরা এরূপ অনেক সম্পর্ক দেখতে পাই। যেমন সংখ্যা $m$, সংখ্যা $n$ থেকে ছোট; রেখা $l$, রেখা $m$ এর সমান্তরাল; সেট A, সেট B এর উপসেট। এসব ক্ষেত্রে আমরা লক্ষ করি যে, একটি সম্বন্ধ দুটি উপাদানের নির্দিষ্ট ক্রম নিয়ে গঠিত। দুটি সেটের উপাদানযুগলের মধ্যে কীভাবে সংযোগ ঘটানো যায়, তা আমরা এ অধ্যায়ে শিখব। অতঃপর উপাদান যুগলের মধ্যে সম্বন্ধ নিরূপন করব। সবশেষে আমরা এক বিশেষ সম্বন্ধ নিয়ে শিখব যা অপেক্ষককে নির্দেশ করবে। অপেক্ষকের ধারণা গণিতশাস্ত্রে খুবই গুরুত্বপূর্ণ কারণ এটি একটি রাশির সাথে অন্যটির সম্পর্ক স্থাপনে গাণিতিক ধারণা প্রদান করে।

**G. W. Leibnitz (1646–1716)**

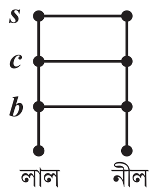
## 2.2 সেটের কার্তেসীয় গুনফল (Cartesian Products of Sets)

ধরো A হলো দুটি রং এর সেট এবং B হলো দুটি বস্তুর সেট অর্থাৎ A={লাল, নীল} এবং B=$\{b, c, s\}$, যেখানে $b, c, s$ যথাক্রমে একটি নির্দিষ্ট ব্যাগ, কোট ও সার্টকে নির্দেশ করে। এ দুটি সেট থেকে কত জোড়া রঙিন বস্তু তৈরি করা যায়?

খুব সুশৃঙ্খল পদ্ধতিতে অগ্রসর হলে আমরা দেখতে পাবো যে 6টি ভিন্ন জোড় গঠন করা যায়, যারা হলো

(লাল, $b$), (লাল, $c$), (লাল, $s$), (নীল, $b$), (নীল, $c$), (নীল, $s$).

এভাবে আমরা 6 টি ভিন্ন জিনিস পাবো (চিত্র 2.1)




চিত্র 2.1

চলো আমরা পূর্ববর্তী শ্রেণি থেকে মনে করি যে, দুটি সেট P ও Q থেকে নেওয়া একটি

ক্রমিক জোড় হল ছোটো বন্ধনীর মধ্যে লেখা একজোড়া উপাদান এবং যাদের একত্রিত করা হয়—একটি নির্দিষ্ট ক্রমে অর্থাৎ $(p,q)$, $p \in$ P এবং $q \in$ Q। এ থেকে নিম্নোক্ত সংজ্ঞাটি পাওয়া যায়।

**সংজ্ঞা 1** শূন্য নয় এরূপ দুটি সেট P ও Q প্রদত্ত। তবে কার্তেসীয় গুনফল P × Q হল P থেকে Q তে প্রকাশিত সমস্ত ক্রমিক জোড়ের সেট, অর্থাৎ,

$$P \times Q = \{ (p,q) : p \in P, q \in Q \}$$

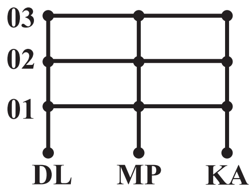
যদি P বা Q একটি শূন্য সেট হয়, তবে P × Q সেটটিও, একটি শূন্য সেট হবে, অর্থাৎ, $P \times Q = \phi$

উপরের প্রদত্ত উদাহরণ থেকে আমরা লক্ষ্য করলাম যে,

A × B = {(লাল,$b$), (লাল,$c$), (লাল,$s$), (নীল,$b$), (নীল,$c$), (নীল,$s$)}.

আবার দুটি সেট ধরো,

A = {DL, MP, KA}, যেখানে DL, MP, KA যথাক্রমে দিল্লি, মধ্যপ্রদেশ ও কর্নাটককে নির্দেশ করে এবং B = {01,02, 03} সেটের পদ DL, MP এবং KA দ্বারা জারি করা বাহনের লাইসেন্স প্লেটের সংকেত নির্দেশ করে।



চিত্র 2.2

দিল্লি, মধ্যপ্রদেশ ও কর্ণাটক এই তিন রাজ্যই প্রথমে A সেট থেকে পদ নিয়ে শুরু করবে যদি এই সীমাবদ্ধতায় থেকে বাহনের জন্য লাইসেন্স প্লেট তৈরি করত, তবে এই দুটি সেট থেকে কী কী জোড় পাওয়া যেত এবং কয়টি এই ধরনের জোড় থাকত?

প্রাপ্ত জোড়গুলো হল : (DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03) এবং A ও B সেটের গুনফল হবে

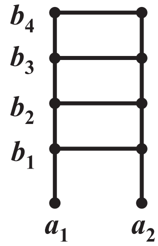
A × B = {(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03)}.

এটি সহজেই বোঝা যায় যে যেহেতু A ও B প্রত্যেক সেটে 3টি করে পদ আছে তাই তাদের কার্তেসীয় গুণফলে 9টি জোড় থাকবে। তাই 9টি সম্ভাব্য সঙ্কেত পাওয়া গেল। এছাড়াও মনে রাখবে, যে ক্রমে থেকে পদগুলো জোড় গঠন করে তা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। উদাহরণস্বরূপ, (DL, 01) ও (01, DL) সঙ্কেত দুটি এক নয়।

শেষ উদাহরণ হিসেবে ধরো, দুটি সেট A= $\{a_1, a_2\}$ এবং

B = $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ (Fig 2.3).

$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4)\}$.



চিত্র 2.3

এভাবে গঠিত 8টি ক্রমিক জোড় কোনো তলে বিন্দুর অবস্থানকে নির্দেশ করবে যদি A ও B বাস্তব সংখ্যার সেটের উপসেট হয় এবং এটা সুস্পষ্ট যে $(a_1, b_2)$ বিন্দুর অবস্থান, $(b_2, a_1)$ বিন্দুর অবস্থান থেকে আলাদা।

**মন্তব্য:**

(i) দুটি ক্রমিক জোড় সমান হবে যদি কেবলমাত্র যদি অনুরূপ প্রথম পদদ্বয় সমান এবং অনুরূপ দ্বিতীয় পদদ্বয় সমান হয়।

(ii) যদি A তে p সংখ্যক পদ থাকে এবং B তে $q$ সংখ্যক পদ থাকে; তবে $A \times B$ তে $pq$ সংখ্যক পদ থাকবে।

(iii) যদি A ও B শূন্য নয় এরূপ দুটি সেট হয় এবং A অথবা B-এর একটি অসীম সেট হয় তবে $A \times B$ একটি অসীম সেট হবে।

(iv) $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$, এখানে $(a, b, c)$ কে একটি ক্রমিক ত্রয়ী (*ordered triplet*) বলে।

**উদাহরণ 1** যদি $(x + 1, y - 2) = (3,1)$ হয় $x$ ও $y$ এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান :** যেহেতু ক্রমিক জোড় দুটি সমান, তাই অনুরূপ পদগুলো সমান।

সুতরাং, $x + 1 = 3$ এবং $y - 2 = 1$

সমাধান করে পাই, $x = 2$ এবং $y = 3$

**উদাহরণ 2** যদি $P = \{a, b, c\}$ এবং $Q = \{r\}$ তবে $P \times Q$ এবং $Q \times P$ সেট দুটি গঠন করো। এ দুটির গুণফল কি সমান ?

**সমাধান** কার্তেসীয় গুণফলের সংজ্ঞানুযায়ী

$P \times Q = \{(a, r), (b, r), (c, r)\}$ এবং $Q \times P = \{(r, a), (r, b), (r, c)\}$

যেহেতু ক্রমিক জোড়ের সমতার সংজ্ঞানুযায়ী $(a, r)$ জোড়টি $(r, a)$ জোড়ের সমান নয়,

আমরা বলতে পারি যে $P \times Q \neq Q \times P$.

যদিও দুটি সেটেই পদসংখ্যাই সমান হবে।

**উদাহরণ 3** ধরো, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$ এবং $C = \{4,5,6\}$, তবে নির্ণয় করো

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $(A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $(A \times B) \cup (A \times C)$

**সমাধান** (i) দুটি সেটের ছেদের সংজ্ঞানুযায়ী $(B \cap C) = \{4\}$

সুতরাং $A \times (B \cap C) = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$

(ii) এখন $(A \times B) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$

এবং $(A \times C) = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

সুতরাং $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

(iii) যেহেতু, $(B \cup C) = \{3, 4, 5, 6\}$ আমরা পাই

$A \times (B \cup C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$.

(iv) উপরের (ii) নং থেকে $A \times B$ এবং $A \times C$ ব্যবহার করে আমরা পাই

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

**উদাহরণ 4** যদি $P = \{1, 2\}$ হয় তবে $P \times P \times P$ সেটটি গঠন করো।

**সমাধান** আমরা পাই $P \times P \times P = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$

**উদাহরণ 5** যদি R সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট হয়, তবে $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ কার্তেসীয় গুনফল এবং $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ কি নির্দেশ করে?

**সমাধান** কার্তেসীয় গুণফল $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ নির্দেশিত সেটটি হল $\mathbf{R} \times \mathbf{R}=\{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$, যা দ্বিমাত্রিক দেশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্দেশ করে এবং কার্তেসীয় গুনফল $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ নির্দেশিত সেটটি হল $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} =\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$, যা ত্রিমাত্রিক দেশের সকল বিন্দুর স্থানাহক নির্দেশ করে।

**উদাহরণ 6** যদি $A \times B =\{(p, q),(p, r), (m, q), (m, r)\}$ হয় তবে A ও B নির্ণয় কর।

**সমাধান**

$A$ = প্রথম পদগুলোর সেট = $\{p, m\}$

$B$ = দ্বিতীয় পদগুলোর সেট = $\{q, r\}$

## অনুশীলনী 2.1

1. $\left(\frac{x}{3}+1, y-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ যদি হয়, তবে $x$ ও $y$ এর মান নির্ণয় করো।
2. যদি A সেটে তিনটি উপাদান থাকে এবং $B = \{3, 4, 5\}$ হয়, তবে $(A\times B)$ এর উপাদান সংখ্যা নির্ণয় করো।
3. যদি $G = \{7, 8\}$ এবং $H = \{5, 4, 2\}$ হয়, তবে $G \times H$ এবং $H \times G$ নির্ণয় করো।
4. নিচের প্রত্যেকটি বিবৃতি সত্য না মিথ্যা বলো। যদি বিবৃতিটি মিথ্যা হয় তবে প্রদত্ত বিবৃতিটি সত্য রূপে পুনরায় লেখো।

   (i) যদি $P = \{m, n\}$ এবং $Q = \{n, m\}$ হয়, তবে $P \times Q = \{(m, n),(n, m)\}$

   (ii) যদি A ও B শূন্য নয় এরূপ দুটি সেট হয়, তবে $A \times B$ হবে $(x, y)$ ক্রমিক জোড়ের অশূন্য সেট, যেখানে $x \in A$ এবং $y \in B$

   (iii) যদি $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$, তবে $A \times (B \cap \phi) = \phi$
5. যদি $A = \{-1, 1\}$, তবে $A \times A \times A$ নির্ণয় করো ।
6. যদি $A \times B = \{(a, x),(a , y), (b, x), (b, y)\}$ তবে A ও B নির্ণয় করো।
7. ধরো $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{5, 6\}$ এবং $D = \{5, 6, 7, 8\}$ যাচাই করো

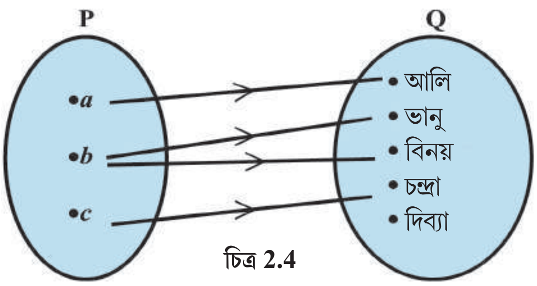
   (i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (ii) $A \times C$ হল, $B \times D$ এর উপসেট।
8. ধরো $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{3, 4\}$ । $A \times B$ সেটটি লেখো। $A \times B$ এর কয়টি উপসেট থাকবে? তাদের তালিকা করো।
9. ধরো A ও B দুটি সেট এমন যে $n(A) = 3$ এবং $n(B) = 2$ ।যদি $(x, 1), (y, 2), (z, 1)$ $A \times B$ এর অন্তর্গত পদ হয়, তবে A এবং B নির্ণয় করো, যেখানে $x, y$ এবং $z$ প্রত্যেকে ভিন্ন পদ।

10. $A \times A$ কার্তেসীয় গুণফলে 9টি পদ আছে, এদের মধ্যে দুটি হল $(-1, 0)$ এবং $(0,1)$। A সেট এবং $A \times A$ এর অবশিষ্ট পদগুলো লেখো।

## 2.3 সম্বন্ধ (Relations)

দুটি সেট $P = \{a, b, c\}$ এবং Q = {আলি, ভানু, বিনয়, চন্দ্রা, দিব্যা} বিবেচনা করো।

P ও Q এর কার্তেসীয় গুনফলে 15টি ক্রমিক জোড় আছে, যাদের লেখা যায় P × Q = {(*a*, আলি), (*a*,ভানু), (*a*, বিনয়), ..., (*c*, দিব্যা)}



চিত্র 2.4

আমরা এখন প্রতিটি ক্রমিক জোড় $(x, y)$ এর প্রথমপদ $x$ ও দ্বিতীয় পদ $y$ এর মধ্যে একটি সম্পর্ক R এর সূচনা করে $P \times Q$ এর এমন একটি উপসেট গঠন করতে পারি যে

R = { $(x,y)$: $x$ অক্ষরটি $y$ নামের প্রথম অক্ষর, $x \in P$, $y \in Q$}

তবে R = {(*a*, আলি), (*b*, ভানু), (*b*, বিনয়), (*c*, চন্দ্রা)}

2.4 নং চিত্রে এই R সম্বন্ধের একটি চাক্ষুষ উপস্থাপনা দেখানো হয়েছে। [যাকে বলা হয় *তির চিহ্নে নির্দেশিত চিত্র (arrow diagram)*]

**সংজ্ঞা 2** একটি অশূন্য সেট A থেকে অপর একটি অশূন্য সেট B তে একটি সম্বন্ধ R হলো কাতেসীয় গুণফল $A \times B$ এর একটি উপসেট। এই উপসেটটি $(A \times B)$ এর ক্রমিক জোড়ের প্রথম পদ ও দ্বিতীয় পদের মধ্যে একটি সম্পর্কের ভিত্তিতে অর্জন করা হয়। দ্বিতীয় পদটিকে প্রথম পদের *প্রতিবিম্ব (image)* বলা হয়।

**সংজ্ঞা 3** A থেকে B তে সংজ্ঞায়িত সম্বন্ধ R এর অন্তর্গত ক্রমিক জোড়গুলোর প্রথম পদ গুলোকে নিয়ে যে সেট হয় তাকে সম্বন্ধ R এর *সংজ্ঞার অঞ্চল(domain)* বলে।

**সংজ্ঞা 4** A থেকে B তে সংজ্ঞায়িত সম্বন্ধ R এর অন্তর্গত ক্রমিক জোড়গুলোর দ্বিতীয় পদগুলোকে নিয়ে যে সেট হয় তাকে R সম্বন্ধের *প্রসার(range)* বলে। সম্পূর্ণ B সেটকে সম্বন্ধ R এর *সংজ্ঞার উপঅঞ্চল(codomain)* বলে। মনে রাখবে যে, প্রসার $\subseteq$ সংজ্ঞার উপঅঞ্চল।

**মন্তব্য :** (i) একটি সম্বন্ধকে বীজগাণিতিক ভাবে *ছকবন্দিকরণ পদ্ধতিতে (Roster method) বা ধর্মভিত্তিক পদ্ধতিতে (Set-builder method)* উপস্থাপন করা যায়।

(ii) তিরচিহ্ন নির্দেশিত চিত্র হলো সম্বন্ধের একটি চাক্ষুষ উপস্থাপনা।

**উদাহরণ 7** ধরো $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, A থেকে Aতে একটি সম্বন্ধ R সংজ্ঞায়িত করো যেখানে

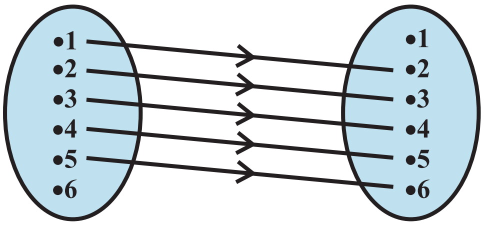
$R = \{(x, y) : y = x + 1\}$

(i) এ সম্বন্ধটিকে তির চিহ্নে নির্দেশিত চিত্রের মাধ্যমে বর্ণনা করো।

(ii) R সম্বন্ধটির সংজ্ঞার অঞ্চল, সংজ্ঞার উপঅঞ্চল এবং প্রসার লেখো।

**সমাধান** (i) সম্বন্ধের সংজ্ঞা থেকে পাই

$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$



চিত্র 2.5

অনুরূপ তির চিহ্ন নির্দেশিত চিত্র 2.5 এ দেখানো হয়েছে।

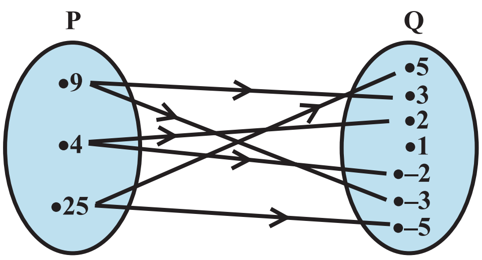
(ii) আমরা দেখি যে

সংজ্ঞার অঞ্চল = $\{1, 2, 3, 4, 5,\}$

অনুরূপ প্রসার = $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

এবং সংজ্ঞার উপঅঞ্চল = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

**উদাহরণ 8** চিত্র 2.6 -এ P থেকে Q তে একটি সম্বন্ধ দেখানো হয়েছে। এ সম্বন্ধটিকে (i) ধর্মভিত্তিক আকারে (ii) ছকবন্দিকরণ আকারে প্রকাশ করো। এর সংজ্ঞার অঞ্চল ও প্রসার কি হবে?



চিত্র 2.6

**সমাধান** স্পষ্টতই R সম্বন্ধটি "$x$ হল $y$ এর বর্গ"

(i) ধর্মভিত্তিক আকারে $R = \{(x, y): x$ হল $y$ এর বর্গ, $x \in P, y \in \mathbf{Q}\}$

(ii) ছকবন্দীকরন আকারে $R = \{(9, 3), (9, -3), (4, 2), (4, -2), (25, 5), (25, -5)\}$

এই সম্বন্ধের সংজ্ঞার অঞ্চল হল $\{4, 9, 25\}$

এই সম্বন্ধের প্রসার হল $\{-2, 2, -3, 3, -5, 5\}$

লক্ষ্য করো, 1 পদটি P সেটের কোনো পদের সাথে সম্পর্কিত নয়। Q সেটি হলো এই সম্বন্ধের সংজ্ঞার অঞ্চল।

> বিঃদ্রঃ A থেকে B তে মোট সংজ্ঞায়িত সম্বন্ধের সংখ্যা $A \times B$ এর সম্ভাব্য উপসেটের সংখ্যার সমান হয়। যদি $n(A) = p$ এবং $n(B) = q$ তবে $n(A \times B) = pq$ এবং মোট সম্বন্ধের সংখ্যা $2^{pq}$.

**উদাহরণ 9** ধরো $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{3, 4\}$। A থেকে B তে সম্বন্ধের সংখ্যা নির্ণয় করো।

**সমাধান** আমরা পাই,

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}.$$

যেহেতু $n(A\times B) = 4$, $A\times B$ এর উপসেটের সংখ্যা $2^4$. সুতরাং A থেকে B তে সম্বন্ধের সংখ্যা $2^4$।

**মন্তব্য** A থেকে A তে R সম্বন্ধটিকে A এর উপর একটি সম্বন্ধ বলা যায়।

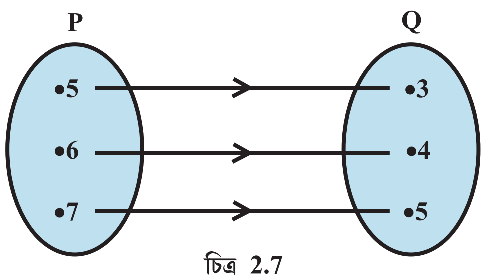
## অনুশীলনী 2.2

1. ধরো $A = \{1, 2, 3,..., 14\}$। A থেকে A তে একটি সম্বন্ধ R সংজ্ঞায়িত করো, যেখানে $R = \{(x, y) : 3x - y = 0, x, y \in A\}$ এর সংজ্ঞার অঞ্চল, সংজ্ঞার উপঅঞ্চল এবং প্রসার লেখো।

2. স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এর উপর একটি সম্বন্ধ R সংজ্ঞায়িত করো,
যেখানে $R = \{(x, y) : y = x + 5, x$ হলো 4 থেকে ছোটো একটি স্বাভাবিক সংখ্যা, $x, y \in \mathbf{N}\}$
ছকবন্দিকরণ পদ্ধতিতে এই সম্বন্ধটিকে বর্ণনা করো। সংজ্ঞার অঞ্চল ও প্রসার লেখো।

3. ধরো, $A = \{1, 2, 3, 5\}$ এবং $B = \{4, 6, 9\}$। A থেকে B তে একটি সম্বন্ধ R সংজ্ঞায়িত করো, যেখানে $R = \{(x, y) : x$ ও $y$ এর অন্তর একটি অযুগ্ম সংখ্যা; $x \in A, y \in B\}$. R কে ছকবন্দিকরণ পদ্ধতিতে লেখো।

4. 2.7 নং চিত্রে P থেকে Q তে একটি সম্বন্ধ দেখানো হয়েছে। সম্বন্ধটিকে লেখো,
(i) ধর্মভিত্তিক আকারে (ii) ছকবন্দিকরণ আকারে।
সম্বন্ধটির সংজ্ঞার অঞ্চল ও প্রসার কি?



চিত্র 2.7

5. ধরো, $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ এবং R হল A এর উপর একটি সম্বন্ধ যাকে সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে
$\{(a, b): a, b \in A, b$ সম্পূর্ণরূপে $a$ দ্বারা বিভাজ্য$\}$
(i) R কে ছকবন্দিকরণ আকারে লেখো।
(ii) R এর সংজ্ঞার অঞ্চল নির্ণয় করো।
(iii) R এর প্রসার নির্ণয় করো।

6. R সম্বন্ধটির সংজ্ঞার অঞ্চল ও প্রসার নির্ণয় করো
যেখানে $R = \{(x, x + 5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$

7. সম্বন্ধ $R = \{(x, x^3) : x$ হলো 10 থেকে ছোটো একটি মৌলিক সংখ্যা $\}$ এই সম্বন্ধটিকে ছকবন্দিকরণ পদ্ধতিতে লেখো।

8. ধরো $A = \{x, y, z\}$ এবং $B = \{1, 2\}$। A থেকে B তে কয়টি সম্বন্ধ আছে?

9. ধরো R হলো $\mathbf{Z}$ এর উপর সংজ্ঞায়িত একটি সম্বন্ধ যেখানে $R = \{(a,b): a, b \in \mathbf{Z}, a - b$ একটি পূর্ণ সংখ্যা$\}$ সম্বন্ধ R এর সংজ্ঞার অঞ্চল ও প্রসার নির্ণয় করো।

## 2.4 অপেক্ষক (Function)

এ অনুচ্ছেদে আমরা একটি বিশেষ ধরনের সম্বন্ধ নিয়ে অধ্যয়ন করবো, যাকে *অপেক্ষক* বলা হয়। এটি গণিত শাস্ত্রের খুব গুরুত্বপূর্ণ একটি ধারণা। আমরা অপেক্ষককে এমন একটি নিয়ম হিসেবে দেখাতে পারি যা প্রদত্ত কিছু পদকে নতুন পদে রূপান্তরিত করে। অপেক্ষককে বোঝানোর জন্য অনেক শব্দ যেমন Map বা চিত্রন (Mapping) ও ব্যবহৃত হয়।

**সংজ্ঞা 5** A থেকে B তে একটি সম্বন্ধ $f$ কে *অপেক্ষক* বলা হবে যদি A সেটের প্রত্যেকটি পদের একটি এবং কেবলমাত্র একটি প্রতিবিম্ব B সেটে থাকে।

অন্যভাবে অপেক্ষক $f$ হল একটি অশূণ্য সেট A থেকে অপর একটি অশূন্য সেট B তে সংজ্ঞায়িত এরূপ একটি সম্বন্ধ যার সংজ্ঞার অঞ্চল হল A এবং যার কোনো দুটি ভিন্ন ভিন্ন ক্রমিক জোড়ের প্রথম পদ এক নয়।

যদি $f$, A থেকে B তে একটি অপেক্ষক হয় এবং $(a, b) \in f$, হয় তবে $f(a) = b$, যেখানে $b$ কে $f$ অপেক্ষককের স্বাপেক্ষে $a$ এর *প্রতিবিম্ব(image)* এবং $a$ কে $b$ এর *প্রাগ্‌বিম্ব (preimage)* বলা হয়।

A থেকে B তে একটি *অপেক্ষক* $f$ কে প্রকাশ করা হয় $f : A \rightarrow B$ দ্বারা।

পূর্ববর্তী উদাহরণগুলো লক্ষ করলে আমরা সহজেই দেখি যে উদাহরণ নং 7 এর সম্বন্ধটি একটি অপেক্ষক নয় কারণ 6 পদটির কোনো প্রতিবিম্ব নেই।

আবার উদাহরণ 8 এর ক্ষেত্রে সম্বন্ধটি একটি অপেক্ষক নয় কারণ সংজ্ঞার অঞ্চলের পদগুলো একাধিক প্রতিবিম্বের সাথে যুক্ত। অনুরূপে উদাহরণ 9 -এর সম্বন্ধটি ও একটি অপেক্ষক নয় (কেন ?) নীচের উদাহরণগুলোতে আমরা আরো কিছু সম্বন্ধ দেখব যাদের কয়েকটি অপেক্ষক এবং কয়েকটি অপেক্ষক নয়।

**উদাহরণ 10** ধরো N স্বাভাবিক সংখ্যার সেট এবং R, N সেটের উপর এমন একটি সম্বন্ধ যে,

$R = \{(x, y) : y = 2x,\ x, y \in \mathbf{N}\}$

R এর সংজ্ঞার অঞ্চল, সংজ্ঞার উপঅঞ্চল ও প্রসার কি হবে? এ সম্বন্ধটি কি একটি অপেক্ষক হবে?

**সমাধান** R এর সংজ্ঞার অঞ্চল হবে স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N। সংজ্ঞার উপঅঞ্চলও হবে N । প্রসার হবে যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সেট।

যেহেতু প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা $n$ এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি প্রতিবিম্ব আছে, তাই এ সম্বন্ধটি একটি অপেক্ষক হবে।

**উদাহরণ 11** নীচের প্রত্যেকটি সম্বন্ধকে পরীক্ষা করো, এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে কোনটি অপেক্ষক বা কোনটি অপেক্ষক নয়, যুক্তি সহ বিবৃত করো।

(i) $R = \{(2,1),(3,1), (4,2)\}$, (ii) $R = \{(2,2),(2,4),(3,3), (4,4)\}$

(iii) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4), (4,5), (5,6), (6,7)\}$

**সমাধান** (i) যেহেতু R সম্বন্ধের সংজ্ঞার অঞ্চলের প্রত্যেক পদ 2, 3, 4 এর নির্দিষ্ট প্রতিবিম্ব আছে, তাই R একটি অপেক্ষক

(ii) যেহেতু একই প্রথম পদ 2 এর দুটি ভিন্ন ভিন্ন প্রতিবিম্ব 2 এবং 4 আছে তাই এ সম্বন্ধটি অপেক্ষক নয়।

(iii) যেহেতু প্রত্যেক পদের একটি এবং কেবলমাত্র একটি প্রতিবিম্ব আছে, তাই সম্বন্ধটি একটি অপেক্ষক।

**সংজ্ঞা 6** একটি অপেক্ষক যার প্রসার R বা R এর একটি উপসেট, তাকে একটি *বাস্তব মান বিশিষ্ট অপেক্ষক* (*real valued function*) বলে। আবার, যদি এর সংজ্ঞার অঞ্চলটিও R বা R এর উপসেট হয়, তবে তাকে একটি *বাস্তব অপেক্ষক* (*real funcjtion*) বলে।

**উদাহরণ 12** ধরো N একটি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট। একটি বাস্তব মানের অপেক্ষক $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ এরূপ সংজ্ঞাত যে $f(x) = 2x + 1$ । এ সংজ্ঞা ব্যবহার করে, নীচের সারণিটি সম্পূর্ণ করো।

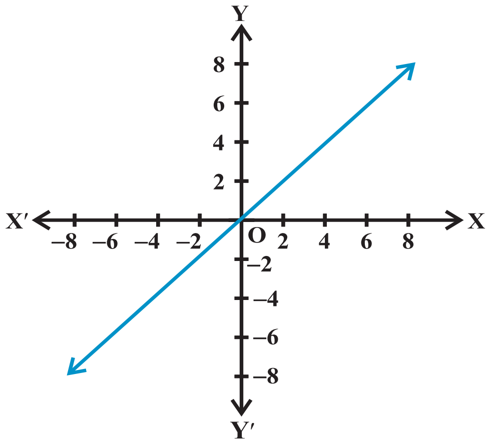
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $f(1) = \ldots$ | $f(2) = \ldots$ | $f(3) = \ldots$ | $f(4) = \ldots$ | $f(5) = \ldots$ | $f(6) = \ldots$ | $f(7) = \ldots$ |

**সমাধান** সম্পূর্ণ সারণিটি হল

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $f(1) = 3$ | $f(2) = 5$ | $f(3) = 7$ | $f(4) = 9$ | $f(5) = 11$ | $f(6) = 13$ | $f(7) = 15$ |

### 2.4.1 কয়েকটি অপেক্ষক এবং তাদের লেখচিত্র (Some functions and their graphs)

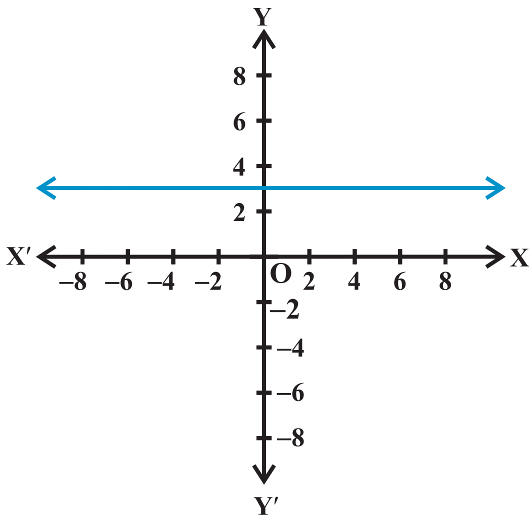
**(i) অভেদ অপেক্ষক (Identity funciton):** ধরো R একটি বাস্তব সংখ্যার সেট। একটি বাস্তব মানের অপেক্ষক $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ এরূপে সংজ্ঞা যে $y = f(x) = x, \ x \in \mathbf{R}$। এধরনের অপেক্ষককে *অভেদ অপেক্ষক* বলা হয়। এখানে $f$ এর সংজ্ঞার অঞ্চল ও প্রসার হলো R। এর লেখ চিত্রটি একটি সরলরেখা, যা চিত্র 2.8- এ দেখানো হয়েছে। এটি মূলবিন্দুগামী।




$f(x) = x$

চিত্র 2.8

**(ii) ধ্রুবক অপেক্ষক (Constant function)** $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ এরূপে সংজ্ঞাত যে $y = f(x) = c, x \in \mathbf{R}$ যেখানে C একটি ধ্রুবক এবং প্রত্যেক $x \in \mathbf{R}$। এখানে $f$ এর সংজ্ঞার অঞ্চল হল R এবং প্রসার হলো $\{c\}$




$f(x) = 3$

চিত্র 2.9

লেখচিত্রটি $x$ অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

উদাহরণ স্বরূপ, যদি $f(x)=3$ প্রত্যেক $x\in\mathbf{R}$, তবে এর লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হবে, যা চিত্র 2.9এ দেখানো হয়েছে।

**(iii) বহুপদ রাশিমালা অপেক্ষক (Polynomial function)**

একটি অপেক্ষক $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ কে *বহুপদ রাশিমালা* (*Ploynomial function*)বলা হবে যদি প্রত্যেক $x\in\mathbf{R}$ এর জন্য $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, যেখানে, $n$ একটি অঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং $a_0, a_1, a_2,...,a_n\in\mathbf{R}$ হয়

$f(x) = x^3 - x^2 + 2$ এবং $g(x) = x^4 + \sqrt{2}\,x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত অপেক্ষকগুলো হল বহুপদ রাশিমালা অপেক্ষকের উদাহরণ, কিন্তু $h(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত অপেক্ষকটি বহুপদ রাশিমালা অপেক্ষক নয় (কেন?)

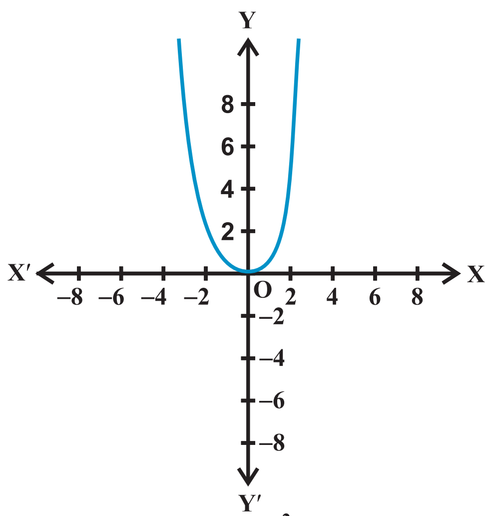
**উদাহরণ 13** একটি অপেক্ষক $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ এরূপে সজ্ঞাত যে $y = f(x) = x^2$, $x\in\mathbf{R}$; এ সংজ্ঞা ব্যবহার করে নীচের সারণিটি সম্পূর্ণ করো। এ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল ও প্রসার কী? $f$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করো।

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x) = x^2$ | | | | | | | | | |

**সমাধান** সম্পূর্ণ সারণিটি নীচে দেওয়া হলে

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x) = x^2$ | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |

$f$ এর সংজ্ঞার অঞ্চল $= \{x : x\in\mathbf{R}\}$। $f$ এর প্রসার $= \{x^2 : x\in\mathbf{R}\}$ $f$ এর লেখচিত্রটি 2.10 নং চিত্রে দেওয়া হল।




$f(x) = x^2$

**চিত্র 2.10**

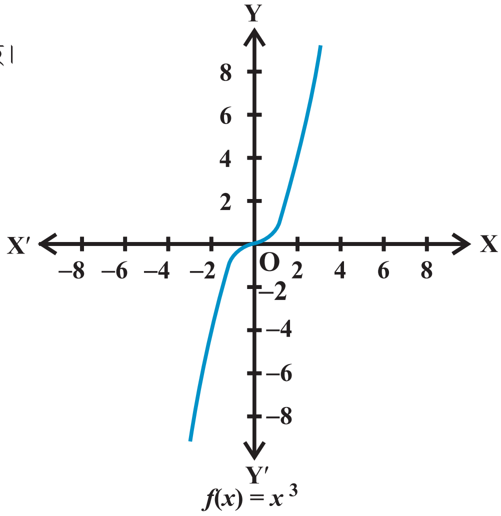
**উদাহরণ 14** একটি অপেক্ষক $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3, x \in \mathbf{R}$ দ্বারা সংজ্ঞাত। অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন করো।

**সমাধান** আমরা পাই,

$f(0) = 0, f(1) = 1, f(-1) = -1, f(2) = 8, f(-2) = -8, f(3) = 27; f(-3) = -27$ ইত্যাদি।

সুতরাং $f = \{(x, x^3): x \in \mathbf{R}\}$

$f$ এর লেখচিত্রটি 2.11 নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।




চিত্র 2.11

**(iv) মূলদ অপেক্ষকগুলো (Rational functions)** হয় $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ আকারের অপেক্ষক যেখানে $f(x)$ ও $g(x)$ হল সংজ্ঞার অঞ্চলে সংজ্ঞায়িত $x$ এর বহুপদ রাশিমালা অপেক্ষক,

এবং $g(x) \neq 0$

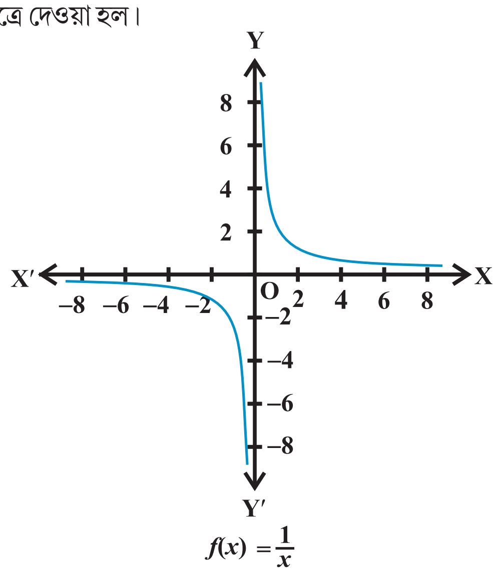
**উদাহরণ 15** $f: \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ একটি বাস্তব মানের অপেক্ষক $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ দ্বারা সংজ্ঞাত। এই সংজ্ঞা ব্যবহার করে নীচের সারণিটি সম্পূর্ণ করো। এই অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল ও প্রসার কী?

| $x$ | $-2$ | $-1.5$ | $-1$ | $-0.5$ | 0.25 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \dfrac{1}{x}$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

**সমাধান** সম্পূর্ণ সারণিটি নীচে দেওয়া হলো

| $x$ | $-2$ | $-1.5$ | $-1$ | $-0.5$ | 0.25 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \dfrac{1}{x}$ | $-0.5$ | $-0.67$ | $-1$ | $-2$ | 4 | 2 | 1 | 0.67 | 0.5 |

সংজ্ঞার অঞ্চল হল '0' ছাড়া সকল বাস্তব সংখ্যা এবং এর প্রসার ও হল 0 ছাড়া সকল বাস্তব সংখ্যা। $f$ এর লেখচিত্রটি 2.12 নং চিত্রে দেওয়া হল।

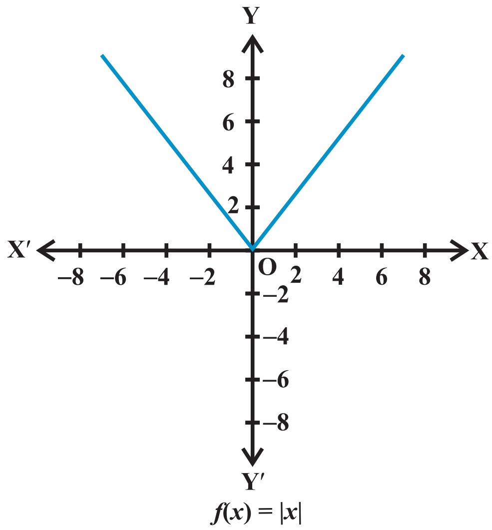



চিত্র **2.12**

(v) **মডিউলাস অপেক্ষক বা পরমমান অপেক্ষক (Modulas function):** একটি অপেক্ষক $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ বা $f(x) = |x|$ দ্বারা সংজ্ঞাত, প্রত্যেক $x \in \mathbf{R}$ তাকে *মডিউলাস অপেক্ষক* বলে। $x$ এর প্রত্যেক অঋণাত্মক মানের জন্য, $f(x)$ এর মান হবে $x$। কিন্তু $x$ এর ঋণাত্মক মানের জন্য $f(x)$ এর মান হবে $-x$ অর্থাৎ

$$f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

মডিউলাস অপেক্ষকটির লেখচিত্র 2.13 নং চিত্রে দেওয়া হল।

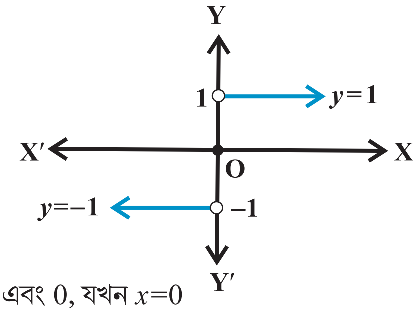



চিত্র **2.13**

(vi) **সিগ্‌নাম অপেক্ষক (Signum function)** একটি অপেক্ষক $f$:$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ এরূপে সংজ্ঞায়িত যে,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ যদি } x > 0 \text{ হয়} \\ 0, \text{ যদি } x = 0 \text{ হয়} \\ -1, \text{ যদি } x < 0 \text{ হয়} \end{cases}$$

তাকে *সিগ্‌নাম অপেক্ষক* বলে। সিগ্‌নাম অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল হল R এবং প্রসার হল $\{-1, 0, 1\}$। সিগ্‌নাম অপেক্ষকটির লেখচিত্র — 2.14 নং চিত্রে দেওয়া হল।




$f(x) = \frac{|x|}{x}, x \neq 0$ এবং 0, যখন $x=0$

চিত্র **2.14**

(vii) **বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা অপেক্ষক (Greatest Integer function)**

একটি অপেক্ষক $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ এরূপে সংজ্ঞাত যে $f(x) = [x]$, $x \in \mathbf{R}$ যা একটি বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা এবং এর মান $x$ এর সমান বা তার থেকে ছোটো। এ ধরনের অপেক্ষককে বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা অপেক্ষক বলে।

$[x]$ এর সংজ্ঞা থেকে আমরা দেখি যে

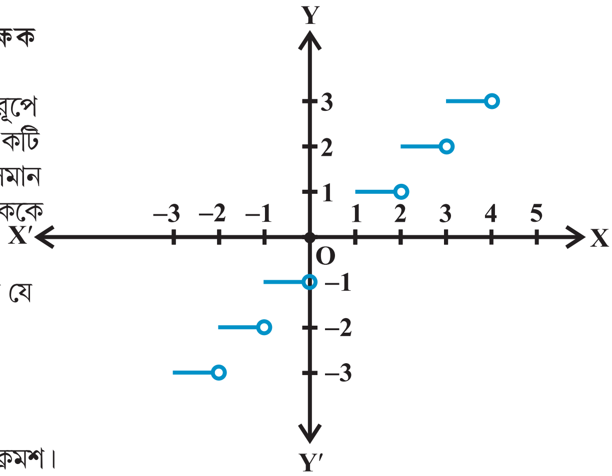
$[x] = -1$ যদি $-1 \leq x < 0$

$[x] = 0$ যদি $0 \leq x < 1$

$[x] = 1$ যদি $1 \leq x < 2$

$[x] = 2$ যদি $2 \leq x < 3$ এবং ক্রমশ।

$[x]$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র 2.15 নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।




$f(x) = [x]$

চিত্র **2.15**

### 2.4.2 বাস্তব অপেক্ষকের বীজগণিত (Algebra of real function)

এ অনুচ্ছেদে আমরা কীভাবে দুটি বাস্তব অপেক্ষকের যোগ, একটি বাস্তব অপেক্ষক থেকে অন্য অপেক্ষকের বিয়োগ, একটি বাস্তব অপেক্ষককে একটি স্কেলার দিয়ে গুণ (এখানে স্কেলার বলতে আমরা বুঝি একটি বাস্তব সংখ্যা), দুটি বাস্তব অপেক্ষকের গুণ এবং একটি বাস্তব অপেক্ষককে অন্য একটি বাস্তব অপেক্ষক দিয়ে ভাগ করা হয় তা শিখব।

**(i) দুটি বাস্তব অপেক্ষকের যোগ (Addition of two real function)**

ধরো $f : X \to \mathbf{R}$ এবং $g : X \to \mathbf{R}$ দুটি যেকোনো বাস্তব অপেক্ষক, যেখানে $X \subset \mathbf{R}$, তবে আমরা $(f + g)$: $X \to \mathbf{R}$ কে সংজ্ঞায়িত করি $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, যেখানে সবগুলো $x \in X$ এর জন্য।

(ii) **একটি বাস্তব অপেক্ষক থেকে অন্য বাস্তব অপেক্ষকের বিয়োগ (Subtraction of a real function from another)** ধরো $f: X \to \mathbf{R}$ এবং $g: X \to \mathbf{R}$ যে কোনো দুটি বাস্তব অপেক্ষক, যেখানে $X \subset \mathbf{R}$ তবে আমরা $(f-g): X \to \mathbf{R}$ কে সংজ্ঞায়িত করি $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ যেখানে সবগুলো $x \in X$।

(iii) **স্কেলার দিয়ে গুণ (Multiplication by a scalar)** ধরো $f: X \to \mathbf{R}$ একটি বাস্তব মানের অপেক্ষক এবং $\alpha$ একটি স্কেলার। এখানে স্কেলার বলতে আমরা একটি বাস্তব সংখ্যাকে বুঝি। তাহলে গুণফল $\alpha f$, X থেকে R এর উপর এমন একটি অপেক্ষক সংজ্ঞায়িত করে যে, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), x \in X$

(iv) **দুটি বাস্তব অপেক্ষকের গুণফল (Multiplication of two real functions)**
দুটি বাস্তব অপেক্ষক $f: X \to \mathbf{R}$ এবং $g: X \to \mathbf{R}$ এর গুণফল হল একটি অপেক্ষক $fg: X \to \mathbf{R}$ যাকে সংজ্ঞায়িত করা হয় $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$, সবগুলো $x \in X$
এটিকে *বিন্দু ভিত্তিক গুণ* বলা হয় (*Pointwise multiplication*)

(v) **দুটি বাস্তব অপেক্ষকের ভাগফল (Quotient of two real functions)**
ধরো $f: X \to \mathbf{R}$ এবং $g: X \to \mathbf{R}$ দুটি বাস্তব অপেক্ষক, যেখানে $X \subset \mathbf{R}$ । $f$ কে $g$ দিয়ে ভাগ করার ফলকে প্রকাশ করা হয় $\frac{f}{g}$ রূপে এবং সংজ্ঞায়িত করা হয়

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ প্রদত্ত } g(x) \neq 0, x \in X$$

**উদাহরণ 16** ধরো $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = 2x + 1$, দুটি বাস্তব অপেক্ষক।

$(f+g)(x), (f-g)(x), (fg)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ নির্ণয় করো।

**সমাধান** আমরা পাই

$$(f+g)(x) = x^2 + 2x + 1, \qquad (f-g)(x) = x^2 - 2x - 1,$$

$$(fg)(x) = x^2(2x+1) = 2x^3 + x^2, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$$

**উদাহরণ 17** ধরো $f(x) = \sqrt{x}$ এবং $g(x) = x$ এই দুটি বাস্তব অপেক্ষক অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেটের উপর সংজ্ঞায়িত $(f+g)(x), (f-g)(x), (fg)(x)$ এবং $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ নির্ণয় করো।

**সমাধান** আমরা পাই

$$(f+g)(x) = \sqrt{x} + x, \quad (f-g)(x) = \sqrt{x} - x$$

$$(fg)\,x = \sqrt{x}(x) = x^{\frac{3}{2}} \text{ এবং } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0$$

## অনুশীলনী 2.3

1. নীচের কোন্ সম্বন্ধগুলো অপেক্ষক হবে? যুক্তি দাও। যদি অপেক্ষক হয় তবে সংজ্ঞার অঞ্চল ও প্রসার নির্ণয় করো।
   (i) $\{(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)\}$
   (ii) $\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6), (14,7)\}$
   (iii) $\{(1,3), (1,5), (2,5)\}$.
2. নীচের বাস্তব অপেক্ষকগুলোর সংজ্ঞার অঞ্চল ও প্রসার নির্ণয় করো
   (i) $f(x) = -|x|$ (ii) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$
3. একটি অপেক্ষক $f$ কে সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে $f(x) = 2x - 5$ রূপে তবে
   (i) $f(0)$, (ii) $f(7)$, (iii) $f(-3)$ -এর মানগুলো নির্ণয় করো।
4. '$t$' একটি অপেক্ষক যেটি ডিগ্রী সেলসিয়াস তাপমাত্রার সাথে ডিগ্রী ফারেনহাইট তাপমাত্রার একটি সম্বন্ধ স্থাপন করে, যা সংজ্ঞায়িত হয়— $t(C) = \frac{9C}{5} + 32$.

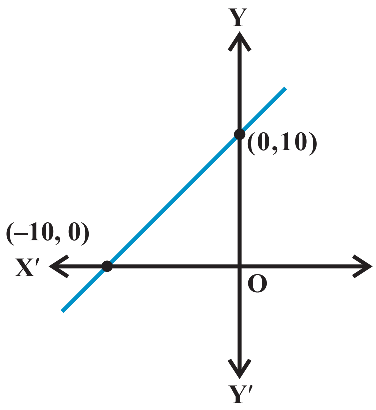
এখন নির্ণয় করো (i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) C এর মান, যখন $t(C) = 212$

5. নীচের প্রত্যেকটি অপেক্ষকের প্রসার নির্ণয় করো
   (i) $f(x) = 2 - 3x,\ x \in \mathbf{R},\ x > 0$.
   (ii) $f(x) = x^2 + 2$, যেখানে $x$ একটি বাস্তব সংখ্যা।
   (iii) $f(x) = x$, $x$ একটি বাস্তব সংখ্যা।

## বিবিধ উদাহরণ

**উদাহরণ 18** ধরো **R** একটি বাস্তব সংখ্যার সেট।
একটি বাস্তব অপেক্ষক $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ এরূপে সংজ্ঞাত যে $f(x) = x + 10$, অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন করো।

**সমাধান** এখানে $f(0) = 10$; $f(1) = 11$, $f(2) = 12$, ..., $f(10) = 20$, ইত্যাদি এবং
$f(-1) = 9$, $f(-2) = 8$, ..., $f(-10) = 0$ এবং ক্রমশ।
সুতরাং প্রদত্ত অপেক্ষকটির লেখচিত্রের আকৃতি চিত্র 2.16 -এ দেখানো হয়েছে।



$f(x) = x + 10$

চিত্র 2.16

**মন্তব্য** একটি অপেক্ষক $f$, যা $f(x) = mx + c$ , $x \in \mathbf{R}$ দিয়ে সংজ্ঞায়িত তাকে *রৈখিক অপেক্ষক* (*linear function*) বলে, যেখানে $m$ ও $c$ হল ধ্রুবক। উপরের অপেক্ষকটি একটি *রৈখিক অপেক্ষকের* উদাহরণ।

**উদাহরণ 19** ধরো R হল **Q** থেকে **Q** তে একটি সম্বন্ধ,
যা $R = \{(a,b): a,b \in \mathbf{Q}$ এবং $a - b \in \mathbf{Z}\}$ দিয়ে সংজ্ঞায়িত।
দেখাও যে
(i) $(a,a) \in R$ সকল $a \in \mathbf{Q}$ এর জন্য
(ii) $(a,b) \in R$ হলে $(b, a) \in R$ হবে
(iii) $(a,b) \in R$ ও $(b,c) \in R$ হলে $(a,c) \in R$ হবে।

**সমাধান** (i) যেহেতু, $a - a = 0 \in \mathbf{Z}$, এটি অনুসরণ করে বলা যায় $(a, a) \in R$
(ii) $(a,b) \in R$ হলে $a - b \in \mathbf{Z}$ হবে। অতএব $b - a \in \mathbf{Z}$ হবে। সুতরাং $(b, a) \in R$
(iii) $(a, b)$ ও $(b, c) \in R$ হলে $a - b \in \mathbf{Z}$. $b - c \in \mathbf{Z}$ হবে।
অতএব $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbf{Z}$ সুতরাং $(a,c) \in R$

**উদাহরণ 20** ধরো $f = \{(1,1), (2,3), (0,-1), (-1,-3)\}$, হল **Z** থেকে **Z** এ একটি রৈখিক অপেক্ষক। $f(x)$ নির্ণয় করো।

**সমাধান** যেহেতু $f$ একটি রৈখিক অপেক্ষক, ধরো $f(x) = mx + c$ আবার যেহেতু $(1, 1), (0, -1) \in R$,
$f(1) = m + c = 1$ এবং $f(0) = c = -1$, আমরা পাই $m = 2$ , এবং $f(x) = 2x - 1$

**উদাহরণ 21** $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল নির্ণয় করো।

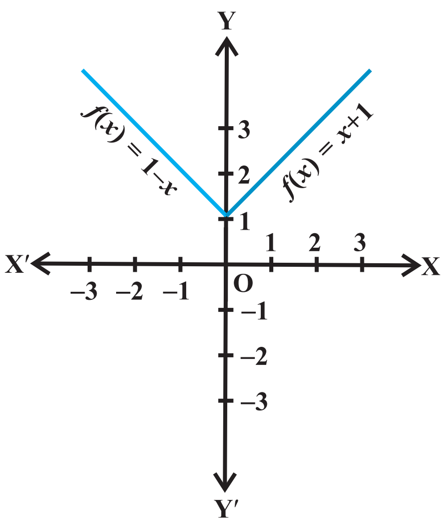
**সমাধান** যেহেতু $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$, তাই $f$ অপেক্ষকটি $x=4$ এবং $x=1$ ছাড়া সকল বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞাত। অতএব $f$ এর সংজ্ঞার অঞ্চল হল $\mathbf{R} - \{1, 4\}$

**উদাহরণ 22** একটি অপেক্ষক $f$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

$f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করো।

**সমাধান** এখানে, $f(x) = 1 - x,\ x < 0$
আমরা পাই
$f(-4) = 1 - (-4) = 5;$
$f(-3) = 1 - (-3) = 4,$
$f(-2) = 1 - (-2) = 3$
$f(-1) = 1 - (-1) = 2;$ ইত্যাদি
আবার $f(x) = x + 1,\ x > 0$ এর জন্য
$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5$ এবং ক্রমশ
অতএব, $f$ এর লেখচিত্র চিত্র 2.17 এ দেখানো হল।



চিত্র 2.17

## অধ্যায়-2 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. $f$ সম্বন্ধটি এরূপে সংজ্ঞায়িত, যেখানে $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 3 \\ 3x, 3 \le x \le 10 \end{cases}$

এবং $g$ সম্বন্ধটি এরূপে সংজ্ঞায়িত, যেখানে $g(x) = \begin{cases} x^2\ ,\ 0 \le x \le 2 \\ 3x\ ,\ 2 \le x \le 10 \end{cases}$

দেখাও যে $f$ একটি অপেক্ষক এবং $g$ একটি অপেক্ষক নয়।

2. যদি $f(x) = x^2$ হয়, তবে $\dfrac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 \quad 1)}$ এর মান নির্ণয় করো।

3. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল নির্ণয় করো।

4. $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল ও প্রসার নির্ণয় করো।

5. $f(x) = |x-1|$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল ও প্রসার নির্ণয় করো।

6. ধরো, $f = \left\{ \left( x, \dfrac{x^2}{1+x^2} \right) : x \in \mathbf{R} \right\}$ হল R থেকে R এ সংজ্ঞায়িত একটি অপেক্ষক। $f$ এর প্রসার নির্ণয় করো।

7. ধরো $f$, $g$ : $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ দুটি অপেক্ষক, $f(x) = x + 1$ ও $g(x) = 2x - 3$ দিয়ে সংজ্ঞায়িত।

$f + g$, $f - g$ এবং $\dfrac{f}{g}$ নির্ণয় করো।

8. ধরো, $f = \{(1,1), (2,3), (0,-1), (-1, -3)\}$ হল Z থেকে Z এ প্রকাশিত একটি অপেক্ষক যা $f(x) = ax + b$ দিয়ে সংজ্ঞায়িত, যেখানে $a$ ও $b$ অখন্ড সংখ্যা। $a$, $b$ নির্ণয় করো।

9. ধরো, R হল N থেকে N এ একটি সম্বন্ধ, যা R = $\{(a, b) : a, b \in \mathbf{N}$ এবং $a = b^2\}$ দিয়ে সংজ্ঞায়িত। নীচেরগুলো কি সত্য?

(i) $(a,a) \in$ R প্রত্যেক $a \in \mathbf{N}$ (ii) $(a,b) \in$ R, হলে $(b,a) \in$ R হবে

(iii) $(a,b) \in$ R, $(b,c) \in$ R হলে $(a,c) \in$ R হবে

প্রতিক্ষেত্রে তোমার উত্তরের সত্যতা যাচাই করো।

10. ধরো, A $= \{1,2,3,4\}$, B $= \{1,5,9,11,15,16\}$ এবং $f = \{(1,5), (2,9), (3,1), (4,5), (2,11)\}$ নীচের গুলো কি সত্য?

(i) $f$ হল A থেকে B তে একটি সম্বন্ধ (ii) $f$ হল A থেকে B তে একটি অপেক্ষক।

প্রত্যেক ক্ষেত্রে তোমার উত্তরের যথার্থতা যাচাই করো।

11. ধরো $f$ হল $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ এর একটি উপসেট যা এরূপে সংজ্ঞায়িত যে, $f = \{(ab, a + b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$ $f$ কি $\mathbf{Z}$ থেকে $\mathbf{Z}$ এ একটি অপেক্ষক হবে? তোমার উত্তরের যথার্থতা যাচাই করো।

12. ধরো $A=\{9,10,11,12,13\}$ এবং $f : A \to \mathbf{N}$ একটি অপেক্ষক এমন যে $f(n) = n$ এর সর্বোচ্চ মৌলিক উৎপাদক। $f$ এর প্রসার নির্ণয় করো।

## সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে, আমরা সম্বন্ধ ও অপেক্ষক সম্পর্কে জেনেছি। এ অধ্যায়ের মুখ্য বিষয়বস্তুগুলো নিম্নরূপ :

- **ক্রমিক জোড়** বিশেষক্রমে একত্রিত একজোড়া পদ।
- **কার্তেসীয় গুণফল** $A \times B$ হল দুটি সেট A ও B এর জন্য এরূপে সংজ্ঞায়িত যেখানে

  $A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$

  বিশেষ ক্ষেত্রে $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R}\}$

  এবং $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = (x, y, z): x, y, z \in \mathbf{R}\}$
- যদি $(a, b) = (x, y)$ হয়, তবে $a = x$ এবং $b = y$
- যদি $n(A) = p$ এবং $n(B) = q$ তবে $n(A \times B) = pq$
- $A \times \phi = \phi$
- সাধারণত, $A \times B \neq B \times A$
- **সম্বন্ধ** A থেকে B তে একটি সম্বন্ধ R হল, কার্তেসীয় গুণফল $A \times B$ এর ক্রমিক জোড়ের প্রথম পদ $x$ এর সাথে দ্বিতীয় পদ $y$ এর সম্পর্ক বর্ণনা করে প্রাপ্ত $A \times B$ এর একটি উপসেট।
- R সম্পর্কের অধীনে কোনো পদ $x$ এর **প্রতিবিম্ব** হল $y$, যেখানে $(x, y) \in R$
- R সম্বন্ধে **সংজ্ঞার অঞ্চল** হল R সম্বন্ধের অধীনে থাকা সমস্ত ক্রমিক জোড়ের প্রথম পদগুলোকে নিয়ে গঠিত উপসেট।
- R সম্বন্ধের **প্রসার** হল R সম্বন্ধের অধীনে থাকা সমস্ত ক্রমিক জোড়ের দ্বিতীয় পদগুলোকে নিয়ে গঠিত সেট।
- **অপেক্ষক:** সেট A থেকে B তে একটি অপেক্ষক $f$ হল বিশেষ ধরনের সম্বন্ধ, যার জন্য A সেটের প্রত্যেক পদ $x$ এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি প্রতিবিম্ব $y$ থাকে যা B সেটের একটিপদ।

  আমরা লিখি $f: A \to B$, যেখানে $f(x) = y$

- $f$ এর সংজ্ঞার অঞ্চল হল A এবং সংজ্ঞার উপ অঞ্চল হল B।
- কোন অপেক্ষক $f$ এর প্রসার হল প্রতিবিম্বের সেট।
- একটি বাস্তব অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল এবং প্রসার উভয়েই একটি বাস্তব সংখ্যার সেট বা বাস্তব সংখ্যার উপসেট।
- **অপেক্ষকের বীজগণিত:** $f : X \to \mathbf{R}$ এবং $g : X \to \mathbf{R}$ অপেক্ষক, দুটির জন্য আমরা পাই,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in X$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),\ x \in X$$
$$(f.g)(x) = f(x)\,.g(x),\ x \in X$$
$(kf)(x) = k(f(x)),\ x \in X$, যেখানে $k$ একটি বাস্তব সংখ্যা।.
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in X,\ g(x) \neq 0$$

## ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

1673 সালে Gottfried wilhelm Leibnitz (1646 – 1716) এর লেখা ল্যাটিন পাণ্ডুলিপি "Mehtodus tangentium inversa, seu de functionibus"– এ প্রথম FUNCTION শব্দটি পরিলক্ষিত হয়। Leibnitz শব্দটিকে অ-বিশ্লেষণাত্মক অর্থে ব্যবহার করেছিলেন। উনি একটি অপেক্ষককে গাণিতিক ক্রিয়া (mathematical job) হিসাবে বিবেচনা করেছিলেন যার নিযুক্তি হল শুধুমাত্র একটি বক্র রেখা।

1698 সালের 5 জুলাই Johan Birnouli সর্বপ্রথম Leibnitz কে একটি চিঠিতে সুপরিকল্পিতভাবে **অপেক্ষক** (*function*) পদটির বিশেষ প্রয়োগ নির্ধারণের বিশ্লেষণী ধারণা দিয়েছিলেন। এ মাসেরই শেষের দিকে Leibnitz তার উত্তরে সহমত পোষণ করেছিলেন।

1779 সালে *Chamber's cyclopaedia*-তে ইংরেজি ভাষায় অপেক্ষক শব্দটি পাওয়া যায় : "The term function is used in algebra, for an analytical expression any way compounded of a variable quantity, and of numbers, or constant quantities."

অধ্যায় **3**

# ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক
# TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

❖ *A mathematician knows how to solve a problem, he can not solve it. – MILNE* ❖

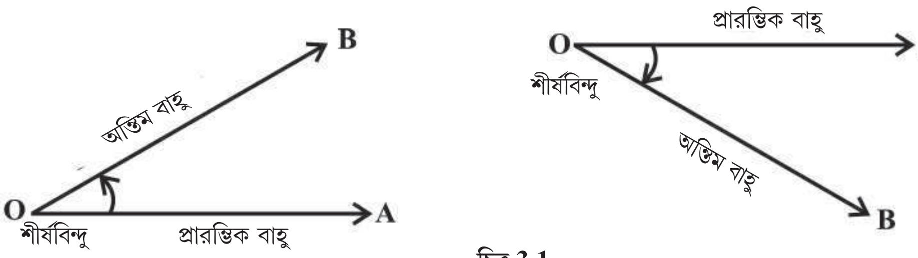
## 3.1 ভূমিকা

আর্যভট্ট
**(476-550)**

'Trigonometry' শব্দটি গ্রিক্ শব্দ '*Trigon*' এবং '*metron*' থেকে উদ্ভাবন হয়েছে এবং এর অর্থ 'ত্রিভুজের বাহুগুলোর পরিমাপ করা'। এই বিষয়টি মূলত বিকাশ হয়েছে ত্রিভুজ সম্বলিত জ্যামিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য ।এটি সমুদ্রযাত্রার নৌপ্রধানেরা, নতুন জমির মানচিত্রের জরীপকারীরা, বাস্তুকারেরা এবং অন্যান্যরা চর্চা করেন। বর্তমানে ত্রিকোণমিতির প্রয়োগ বিভিন্ন ক্ষেত্রে হয়, যেমন ভূকম্পনবিদ্যার বিজ্ঞান, বৈদ্যুতিক বর্তনীর নক্সা তৈরি করতে, পরমাণুর অবস্থা বর্ণনে, সমুদ্রের জোয়ারভাঁটার ঢেউয়ের উচ্চতা পূর্বানুমানে, শ্রুতিমধুর সুর বিশ্লেষণে এবং অন্যান্য ক্ষেত্রে।

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে আমরা সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতির অনুপাতের বিষয়ে অধ্যয়ন করেছি, যা সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত। উচ্চতা ও দূরত্ব বিষয়ক সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রেও ত্রিকোণমিতিক অভেদসমূহ এবং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ সম্পর্কে আমরা অধ্যয়ন করেছি। এ অধ্যায়ে আমরা ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক এবং এদের ধর্মাবলি অধ্যয়নে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধারণার ব্যাপক প্রয়োগ করব।

**3.2 কোণ (Angles)** একটি প্রদত্ত রশ্মির প্রারম্ভিক বিন্দুর সাপেক্ষে ঘূর্ণনের পরিমাপই হচ্ছে কোণ। ঘূর্ণনের




(i) ধনাত্মক কোণ

চিত্র 3.1

(ii) ঋণাত্মক কোণ

মূলরশ্মিকে প্রারম্ভিক বাহু এবং ঘূর্ণনের পর রশ্মির অন্তিম অবস্থাকে বলা হয় কোণের অন্তিম বাহু। ঘূর্ণন বিন্দুকে বলা হয় শীর্ষবিন্দু। যদি ঘূর্ণনের দিক ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে হয় তবে সেই কোণটি ধনাত্মক এবং যদি ঘূর্ণনের দিক ঘড়ির কাঁটার দিকে হয় তবে সেই কোণটি *ঋণাত্মক* (চিত্র 3.1)।

কোণের প্রারম্ভিক বাহু থেকে অন্তিমবাহু পর্যন্ত ঘূর্ণনের পরিমাণ দিয়ে কোণের পরিমাপ করা হয়। কোণের পরিমাপের জন্য কয়েকটি একক আছে। কোণের সংজ্ঞায় একটি একককে নির্দেশ করে যেমন প্রারম্ভিক বাহু কোনো অবস্থান হতে একবার পূর্ণ আবর্তনে যে কোণ নির্দেশিত হয় তা চিত্র 3.2 তে দেখানো হয়েছে।

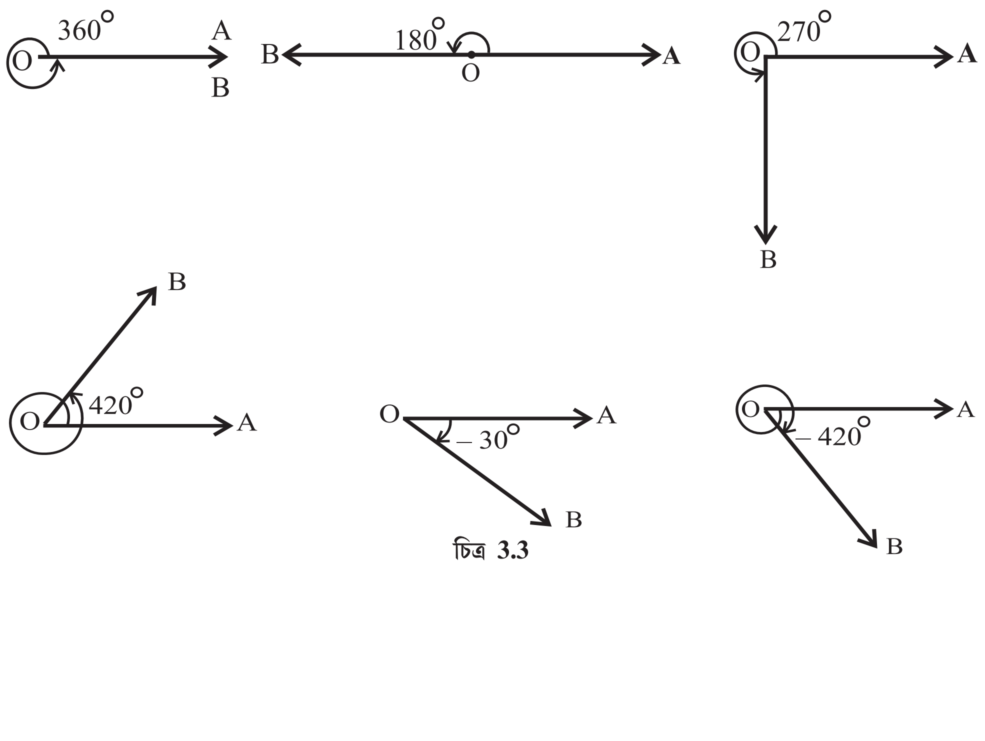

চিত্র **3.2**

এটি সর্বদা বড় কোণের জন্য সুবিধাজনক। উদাহরণস্বরূপ একটি দ্রুত ঘূর্ণায়মান চড়কা দিয়ে উৎপন্ন কোণ সম্পর্কে আমরা বলতে পারি যে প্রতি সেকেণ্ডে 15 বার পূর্ণ আবর্তন সম্পন্ন করে। আমরা কোণ পরিমাপের জন্য অপর দু-ধরণের একক নিয়ে আলোচনা করব যাদের প্রায়শই ব্যবহার করা হয়— যেমন ডিগ্রী পরিমাপ এবং রেডিয়ান পরিমাপ।

**3.2.1 ডিগ্রী পরিমাপ (Degree measure)** যদি একটি ঘূর্ণন প্রারম্ভিক বাহু থেকে অন্তিম বাহু পর্যন্ত পূর্ণ আবর্তনের $\left(\dfrac{1}{360}\right)$ অংশ হয় তবে ওই কোণের পরিমাপকে এক ডিগ্রী বলে এবং এটিকে $1°$ রূপে লেখা হয়। প্রতিটি ডিগ্রী 60 মিনিটে বিভক্ত এবং প্রতিটি মিনিট 60 সেকেণ্ডে বিভক্ত। এক ডিগ্রীর ষাট ভাগের এক অংশকে বলা হয় 1 মিনিট এবং এটিকে $1'$ রূপে লেখা হয় এবং 1 মিনিটের ষাট ভাগের এক অংশকে বলা হয় 1 সেকেণ্ড, এটিকে $1''$ রূপে লেখা হয়।

অর্থাৎ, $1° = 60'$, $\quad 1' = 60''$

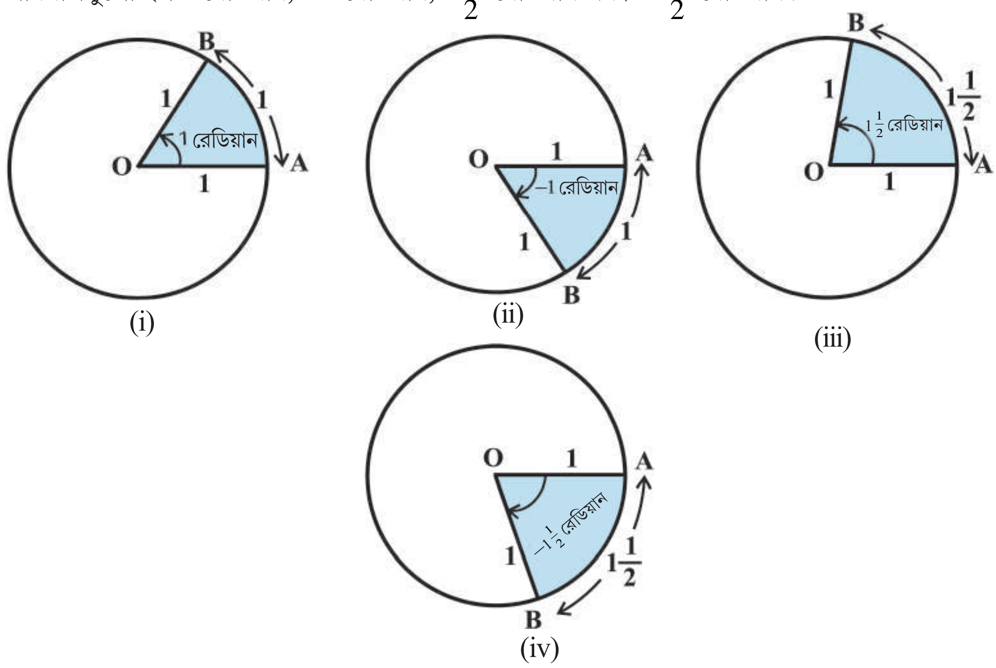
কিছুসংখ্যক কোণ যাদের পরিমাপ $360°, 180°, 270°, 420°, -30°, -420°$ চিত্র 3.3 তে দেখানো হয়েছে।




চিত্র **3.3**

**3.2.2 রেডিয়ান পরিমাপ (Radian measure) :** কোণের পরিমাপের জন্য অপর একটি একক আছে যাকে রেডিয়ান পরিমাপ বলা হয়। কোনো একক বৃত্তের (বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 1 একক) 1 একক দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ বৃত্তটির কেন্দ্রে যে সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে তাকে বলা হয় 1 রেডিয়ান পরিমাপ।

চিত্র 3.4 (i) থেকে (iv) এ, OA হল প্রারম্ভিক বাহু এবং OB হল অন্তিম বাহু। চিত্রে প্রদর্শিত কোণের পরিমাপগুলো হল 1 রেডিয়ান, – 1 রেডিয়ান, $1\frac{1}{2}$ রেডিয়ান এবং $-1\frac{1}{2}$ রেডিয়ান।



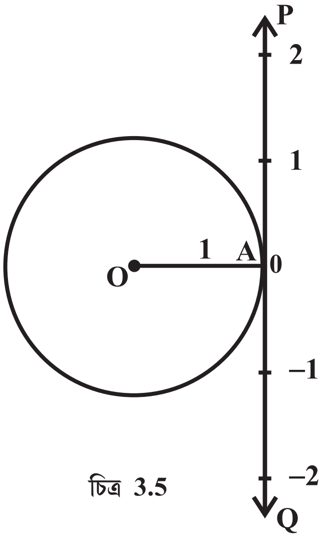

**চিত্র 3.4 (i)** থেকে **(iv)**

আমরা জানি যে 1 একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি $2\pi$, অর্থাৎ প্রারম্ভিক বাহুর একবার পূর্ণ আবর্তনে কেন্দ্রে $2\pi$ রেডিয়ান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।

আরও সাধারণভাবে, $r$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $r$ হলে সম্মুখ কোণ হবে 1 রেডিয়ান। এটি ভালোভাবে জানা আছে যে সমান বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে। যেহেতু $r$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তে $r$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি বৃত্তচাপ 1 রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে $l$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বৃত্তচাপ যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করবে এর মান হবে $\frac{l}{r}$ রেডিয়ান। অর্থাৎ, $r$ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তে $l$ দৈর্ঘ্যের একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $\theta$ রেডিয়ান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করলে আমরা পাই, $\theta = \frac{l}{r}$ বা $l = r\,\theta$

### 3.2.3 রেডিয়ান ও বাস্তব সংখ্যার মধ্যে সম্পর্ক (Relation between radian and real numbers)

ধরা যাক O কেন্দ্রীয় একক বৃত্তের উপর A যেকোনো একটি বিন্দু। মনে করো OA হল কোণের প্রারম্ভিক বাহু। তাহলে বৃত্তের বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য বৃত্তের কেন্দ্রে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তা কোণটির রেডিয়ান পরিমাপকে প্রকাশ করে। ধরো, PAQ রেখাটি বৃত্তের A বিন্দুতে একটি স্পর্শক। মনে করা যাক A বিন্দুটি বাস্তব সংখ্যা 0 (শূন্য) কে নির্দেশ করে এবং AP বরাবর ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা ও AQ অভিমুখে ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা প্রকাশ করা হয় (চিত্র 3.5)। যদি আমরা বৃত্ত বরাবর AP রেখাকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে এবং AQ রেখাকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘোরাই, তাহলে প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা একটি রেডিয়ান পরিমাপকে প্রকাশ করবে এবং এটি বিপরীতক্রমেও সত্য। সুতরাং, কোণের রেডিয়ান পরিমাপ এবং বাস্তব সংখ্যাকে সমার্থক মনে করা যেতে পারে।



চিত্র 3.5

### 3.2.4 ডিগ্রী ও রেডিয়ানের মধ্যে সম্পর্ক (Relation between degree and radian)

যেহেতু একটি বৃত্ত কেন্দ্রে একটি সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে যার রেডিয়ান পরিমাপ $2\pi$ এবং এর ডিগ্রী পরিমাপ 360°, তাহলে

$2\pi$ রেডিয়ান = 360°, বা $\pi$ রেডিয়ান = 180° উক্ত সম্পর্ক থেকে যে কোনো কোণের মান সহজেই ডিগ্রী থেকে রেডিয়ানে কিংবা রেডিয়ান থেকে ডিগ্রীতে প্রকাশ করা যায়। $\pi$ এর আসন্ন মান $\frac{22}{7}$ ব্যবহার করে আমরা পাই—

$$1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ\, 16' \text{ (প্রায়)}$$

$$\text{আবার } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান} = 0.01746 \text{ রেডিয়ান (প্রায়)}$$

কয়েকটি সাধারণ কোণের ডিগ্রী পরিমাপ এবং রেডিয়ান পরিমাপের মধ্যে সম্পর্ক নিম্নের সারণিতে দেওয়া হল:

| ডিগ্রী | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| রেডিয়ান | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

### প্রতীকের প্রচলিত রীতি (Notational Convention)

যেহেতু কোণগুলো পরিমাপ করা হয় ডিগ্রীতে বা রেডিয়ানে, আমরা এই রীতি মেনে নিই যে, যখন আমরা $\theta°$ লিখি তখন আমরা বুঝি কোণের ডিগ্রী পরিমাপ $\theta$ এবং যখন আমরা কোনো কোণকে লিখি $\beta$, তখন আমরা বুঝি কোণের পরিমাপ $\beta$ রেডিয়ান।

লক্ষ করো যে যখন কোণের পরিমাপ রেডিয়ানে প্রকাশ করা হয় তখন রেডিয়ান শব্দটি প্রায়ই বাদ দেওয়া হয়। অর্থাৎ, $\pi = 180°$ এবং $\frac{\pi}{4} = 45°$ কে রেডিয়ান পরিমাপে লেখা হয় $\pi$ এবং $\frac{\pi}{4}$। অতএব বলতে পারি

$$\text{রেডিয়ান পরিমাপ} = \frac{\pi}{180} \times \text{ডিগ্রী পরিমাপ}$$

$$\text{ডিগ্রী পরিমাপ} = \frac{180}{\pi} \times \text{রেডিয়ান পরিমাপ}$$

**উদাহরণ 1** $40°\ 20'$ কে রেডিয়ান পরিমাপে প্রকাশ করো।

**সমাধান** আমরা জানি যে

$180° = \pi$ রেডিয়ান

অতএব $40°\ 20' = 40\frac{1}{3}$ ডিগ্রী $= \frac{\pi}{180} \times \frac{121}{3}$ রেডিয়ান $= \frac{121\pi}{540}$ রেডিয়ান

সুতরাং $40°\ 20' = \frac{121\pi}{540}$ রেডিয়ান

**উদাহরণ 2** 6 রেডিয়ানকে ডিগ্রীতে প্রকাশ করো।

**সমাধান** আমরা জানি যে $\pi$ রেডিয়ান $= 180°$

সুতরাং 6 রেডিয়ান $= \frac{180}{\pi} \times 6$ ডিগ্রী $= \frac{1080 \times 7}{22}$ ডিগ্রী

$= 343\frac{7}{11}$ ডিগ্রী $= 343° + \frac{7 \times 60}{11}$ মিনিট [ যেহেতু $1° = 60'$ ]

$= 343° + 38' + \frac{2}{11}$ মিনিট [ যেহেতু as $1' = 60''$ ]

$= 343° + 38' + 10.9'' = 343° 38' 11''$ (প্রায়)

সুতরাং 6 রেডিয়ান $= 343°\ 38'\ 11''$ (প্রায়)

**উদাহরণ 3** একটি বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ $60°$ যা 37.4 সেমি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বৃত্তচাপকে ছিন্ন করে, তবে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো। ( $\pi = \frac{22}{7}$ ধরো)

**সমাধান :** এখানে $l = 37.4$ সেমি, $\theta = 60° = \frac{60\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi}{3}$

অতএব, $r = \frac{l}{\theta}$ হলে আমরা পাই

$$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7 \text{ সেমি}$$

**উদাহরণ 4** একটি ঘড়ির মিনিটের কাঁটাটি 1.5 সেমি দীর্ঘ। 40 মিনিটে কাঁটাটির অগ্রভাগ কত দূরত্ব অতিক্রম করে? ($\pi = 3.14$ ধরো)

**সমাধান** 60 মিনিটে ঘড়ির মিনিটের কাঁটাটি একবার পূর্ণ আবর্তন করে। সুতরাং 40 মিনিটে কাঁটাটি $\frac{2}{3}$ অংশ আবর্তন করে। সুতরাং, $\theta = \frac{2}{3} \times 360°$ বা $\frac{4\pi}{3}$ রেডিয়ান। সুতরাং নির্ণেয় দূরত্ব অতিক্রম করবে

$$l = r\,\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3} \text{ সেমি} = 2\pi \text{ সেমি} = 2 \times 3.14 \text{ সেমি} = 6.28 \text{ সেমি।}$$

**উদাহরণ 5** যদি সমান দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ দুটি বৃত্তের কেন্দ্রে যথাক্রমে $65^0$ এবং $110^0$ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তবে বৃত্ত দুটির ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় করো।

**সমাধান** ধরা যাক $r_1$ এবং $r_2$ দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ, তাহলে

$$\theta_1 = 65° = \frac{\pi}{180} \times 65 = \frac{13\pi}{36} \text{ রেডিয়ান}$$

এবং $\theta_2 = 110° = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22\pi}{36}$ রেডিয়ান

ধরো, প্রতিটি বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= l$ । তাহলে $l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$, তা থেকে পাব

$$\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2, \text{ অর্থাৎ, } \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$$

সুতরাং $r_1 : r_2 = 22 : 13$

## অনুশীলনী 3.1

**1.** নিম্নলিখিত ডিগ্রী পরিমাপগুলোকে অনুরূপ রেডিয়ান পরিমাপে প্রকাশ করো:
(i) $25°$ (ii) $-47°30'$ (iii) $240°$ (iv) $520°$

2. নিম্নলিখিত রেডিয়ান পরিমাপগুলোকে অনুরূপ ডিগ্রী পরিমাপে প্রকাশ করো : ( $\pi = \frac{22}{7}$ ধরো)

(i) $\frac{11}{16}$ (ii) $-4$ (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$

3. এক মিনিটে একটি চাকা 360 বার পূর্ণ আবর্তন করে। চাকাটি এক সেকেন্ডে কত রেডিয়ান ঘুরবে ?

4. 100 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কোনো বৃত্তের 22 সেমি দীর্ঘ কোনো বৃত্তচাপ ওই বৃত্তের কেন্দ্রে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে, ডিগ্রী পরিমাপে তার মান নির্ণয় করো ( $\pi = \frac{22}{7}$ ধরো)

5. 40 সেমি ব্যাসের কোনো বৃত্তের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 20 সেমি হলে জ্যা-এর উপচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

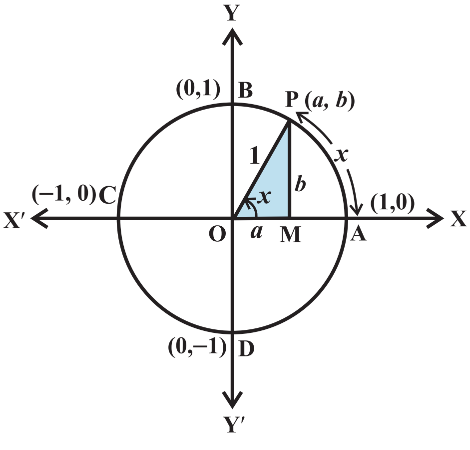
6. যদি সমান দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ দুটি বৃত্তের কেন্দ্রে যথাক্রমে 60° এবং 75° সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তবে বৃত্ত দুটির ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় করো।

7. 75 সেমি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি দোলকের অগ্রভাগ নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ উৎপন্ন করলে দোলকটি প্রতিক্ষেত্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাদের রেডিয়ান পরিমাপে প্রকাশ করো

(i) 10 সেমি (ii) 15 সেমি (iii) 21 সেমি

## 3.3 ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক (Trigonometric Functions)

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে, আমরা সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে বাহুগুলোর অনুপাত নিয়ে পড়াশোনা করেছি। এখন আমরা যে কোনো কোণের রেডিয়ান পরিমাপের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধারণাকে বিস্তৃত করে এগুলোকে ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক হিসেবে পড়ব।



চিত্র 3.6

ধরা যাক একটি একক বৃত্ত, যার কেন্দ্র স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দুতে অবস্থিত। ধরি P $(a,b)$ বৃত্তের উপর যে কোনো একটি বিন্দু এবং কোণ AOP=$x$ রেডিয়ান অর্থাৎ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য AP=$x$ (চিত্র 3.6)।

আমরা বলতে পারি Cos $x = a$ এবং Sin $x = b$। যেহেতু $\Delta$OMP একটি সমকোণী ত্রিভুজে, সুতরাং আমরা পাই $OM^2 + MP^2 = OP^2$ অথবা $a^2 + b^2 = 1$

তাহলে একক বৃত্তের উপর প্রতিটি বিন্দুর অবস্থানের জন্য আমরা পাই $a^2 + b^2 = 1$ বা, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

যেহেতু একবার পূর্ণ আবর্তনে বৃত্তের কেন্দ্রে $2\pi$ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন হয়, সুতরাং $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$,

$\angle AOC = \pi$ এবং $\angle AOD = \frac{3\pi}{2}$ । যে কোণগুলো $\frac{\pi}{2}$ এর অখণ্ড গুণিতক (integral multiples), সেই কোণগুলোকে *পাদস্থিত কোণ* (*quadrantal angles*) বলা হয়। এখন A, B, C এবং D বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 0), (0,1), (–1,0) এবং (0,–1), সুতরাং পাদস্থিত কোণগুলোর জন্য আমরা পাই,

$$\cos 0^\circ = 1 \qquad \sin 0^\circ = 0,$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos\pi = -1 \qquad \sin\pi = 0$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\cos 2\pi = 1 \qquad \sin 2\pi = 0$$

এখন যদি আমরা P বিন্দুর অবস্থান থেকে একবার পূর্ণ আবর্তন করি তবে পুনরায় P বিন্দুর অবস্থানেই ফিরে আসব। সুতরাং আমরা আরও লক্ষ করি যে, যদি $x$ কোণটির সঙ্গে $2\pi$ এর কোনো অখণ্ড গুণিতকে কোণ বৃদ্ধি পায় (বা হ্রাস) পায়, তবে $\sin x$ কিংবা $\cos x$ এর মান অপরিবর্তিত থাকে।

সুতরাং, $\sin(2n\pi + x) = \sin x$, $n \in \mathbf{Z}$, $\cos(2n\pi + x) = \cos x$, $n \in \mathbf{Z}$

আবারও $\sin x = 0$ হলে, $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$

অর্থাৎ, যখন $x$ কোণটি $\pi$ এর কোনো অখণ্ড গুণিতক,

এবং $\cos x = 0$ যখন $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$

অর্থাৎ $\cos x$ এর মান শূন্য হয়ে যায় যখন, $x$ কোণটি $\frac{\pi}{2}$ এর কোনো বিজোড় গুণিতক।

সুতরাং $\mathbf{\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi}$, যেখানে $n$ যে কোনো অখণ্ড সংখ্যা।

$\mathbf{\cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}}$, যেখানে $n$ যেকোনো অখণ্ড সংখ্যা।

সাইন (Sine) এবং কোসাইন (Cosine) অপেক্ষকের সাপেক্ষে অন্য ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলো নিম্নলিখিত ভাবে সংজ্ঞাত :

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, $x \neq n\pi$, যেখানে $n$ যে কোনো অখণ্ড সংখ্যা।

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, যেখানে $n$ যে কোনো অখণ্ড সংখ্যা।

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, যেখানে $n$ যে কোনো অখণ্ড সংখ্যা।

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \neq n\pi$, যেখানে $n$ যেকোনো অখণ্ড সংখ্যা।

আমরা দেখব যে, সমস্ত বাস্তব সংখ্যা $x$ এর জন্য, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

এ থেকে পাওয়া যায়

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad (\text{কেন?})$$

$$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x \quad (\text{কেন?})$$

পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ এবং $90°$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান আমরা আলোচনা করেছি। এই কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের মান, ত্রিকোণমিতিক অনুপাত যা তোমরা পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে অধ্যয়ন করেছ তার সমান। অতএব আমরা নিম্নলিখিত সারণিটি পাই:

| | $0°$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| tan | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | অসংজ্ঞাত | 0 | অসংজ্ঞাত | 0 |

$\text{cosec}\, x$, $\sec x$ এবং $\cot x$ এর মানগুলো যথাক্রমে $\sin x$, $\cos x$ এবং $\tan x$ এর অনোন্যক।

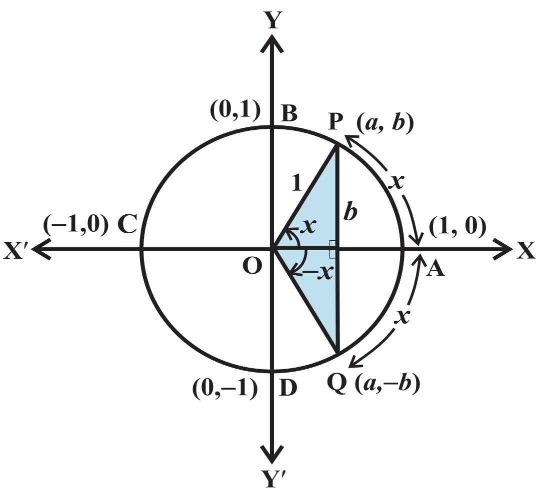
### 3.3.1 ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক সমূহের চিহ্ন (Sign of trigonometric functions):

মনে করা যাক মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এবং একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের (unit circle) উপর $P(a,b)$ যে কোনও একটি বিন্দু এবং $\angle AOP = x$, যদি $\angle AOQ = -x$ হয়, তাহলে Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, -b)$ হবে (চিত্র 3.7)। সুতরাং

$$\cos(-x) = \cos x$$

এবং $$\sin(-x) = -\sin x$$

যেহেতু একক বৃত্তের উপর P $(a, b)$ যে কোনও বিন্দু তাহলে $-1 \le a \le 1$ এবং $-1 \le b \le 1$,



চিত্র 3.7

$x$ কোণের সকল মানের জন্যই আমরা পাই $-1 \le \cos x \le 1$ এবং $-1 \le \sin x \le 1$ । পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে আমরা শিখেছি যে প্রথম পাদে $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ $a$ এবং $b$ উভয়ই ধনাত্মক, দ্বিতীয় পাদে $(\frac{\pi}{2} < x < \pi)$ $a$ ঋণাত্মক এবং $b$ ধনাত্মক, তৃতীয় পাদে $(\pi < x < \frac{3\pi}{2})$ $a$ এবং $b$ উভয়ই ঋণাত্মক এবং চতুর্থ পাদে $(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi)$ $a$ ধনাত্মক এবং $b$ ঋণাত্মক। সুতরাং $\sin x$ ধনাত্মক যখন $0 < x < \pi$ এবং ঋণাত্মক যখন $\pi < x < 2\pi$ । অনুরূপে $\cos x$ ধনাত্মক যখন $0 < x < \frac{\pi}{2}$ এবং ঋণাত্মক যখন $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ এবং ধনাত্মক যখন $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$। অনুরূপে বিভিন্ন পাদে অবস্থিত অপর ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলোর চিহ্ন নিম্ননিখিত সারণিতে প্রকাশ করা হল।

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | + | + | – | – |
| $\cos x$ | + | – | – | + |
| $\tan x$ | + | – | + | – |
| $\operatorname{cosec} x$ | + | + | – | – |
| $\sec x$ | + | – | – | + |
| $\cot x$ | + | – | + | – |

**3.3.2 ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলোর ক্ষেত্র (অঞ্চল) এবং প্রসার ( পাল্লা) (Domain and range of trigonometric functions)** সাইন এবং কোসাইন অপেক্ষকের সংজ্ঞানুসারে আমরা লক্ষ করি যে সকল বাস্তব মানের জন্য এরা সংজ্ঞাত। আরও দেখা যাচ্ছে যে $x$ এর প্রতিটি বাস্তব মানের জন্য

$$-1 \le \sin x \le 1 \text{ এবং } -1 \le \cos x \le 1$$

অর্থাৎ $y = \sin x$ এবং $y = \cos x$ অপেক্ষক দুটির সংজ্ঞার ক্ষেত্র হল সকল বাস্তব সংখ্যার সেট এবং প্রসার হল অন্তরাল $[-1, 1]$ অর্থাৎ $-1 \le y \le 1$ ।

যেহেতু $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, $y = \operatorname{cosec} x$ অপেক্ষকের সংজ্ঞার ক্ষেত্র-এর সেটটি হল

$\{x : x \in \mathbf{R}$ এবং $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ এবং প্রসার- এর সেটটি হল

$\{y : y \in \mathbf{R}, y \geq 1$ অথবা $y \leq -1\}$ ।

একইভাবে, $y = \sec x$ অপেক্ষকের সংজ্ঞার ক্ষেত্র $\{x : x \in \mathbf{R}$ এবং $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ এবং প্রসার $\{y : y \in \mathbf{R}, y \leq -1$ অথবা $y \geq 1\}$ । $y = \tan x$ অপেক্ষকের সংজ্ঞার ক্ষেত্র $\{x : x \in \mathbf{R}$ এবং $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ এবং প্রসার হল সকল বাস্তব সংখ্যার সেট। $y = \cot x$ অপেক্ষকের সংজ্ঞার ক্ষেত্র $\{x : x \in \mathbf{R}$ এবং $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ এবং প্রসার হল সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

আমরা আরও লক্ষ করি যে, প্রথম পাদে $x$, $0$ থেকে $\frac{\pi}{2}$ অন্তরে বৃদ্ধি পেলে $\sin x$ এর মান $0$ থেকে $1$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়; আবার $x$, $\frac{\pi}{2}$ থেকে $\pi$ অন্তরে বৃদ্ধি পেলে $\sin x$ এর মান $1$ থেকে $0$ পর্যন্ত হ্রাস পায়। তৃতীয় পাদে $x$, $\pi$ থেকে $\frac{3\pi}{2}$ অন্তরে বৃদ্ধি পেলে $\sin x$ এর মান $0$ থেকে $-1$ পর্যন্ত হ্রাস পায় এবং পরিশেষে চতুর্থ পাদে $\sin x$, $-1$ থেকে $0$ অন্তরে বৃদ্ধি পেলে $x$, $\frac{3\pi}{2}$ থেকে $2\pi$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়। একইভাবে, আমরা অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলোর বিষয়ে আলোচনা করতে পারি। নিম্নলিখিত সারণি থেকে পাওয়া যায়:

| | প্রথম পাদ | দ্বিতীয় পাদ | তৃতীয় পাদ | চতুর্থ পাদ |
|---|---|---|---|---|
| sin | 0 থেকে 1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় | 1 থেকে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায় | 0 থেকে –1 পর্যন্ত হ্রাস পায় | –1 থেকে 0 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় |
| cos | 1 থেকে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায় | 0 থেকে –1 পর্যন্ত হ্রাস পায় | –1 থেকে 0 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় | 0 থেকে 1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় |
| tan | 0 থেকে ∞ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় | – ∞ থেকে 0 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় | 0 থেকে ∞ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় | – ∞ থেকে 0 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় |
| cot | ∞ থেকে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায় | 0 থেকে – ∞ পর্যন্ত হ্রাস পায় | ∞ থেকে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায় | 0 থেকে – ∞ পর্যন্ত হ্রাস পায় |
| sec | 1 থেকে ∞ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় | – ∞ থেকে –1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় | –1 থেকে – ∞ পর্যন্ত হ্রাস পায় | ∞ থেকে 1 পর্যন্ত হ্রাস পায় |
| cosec | ∞ থেকে 1 পর্যন্ত হ্রাস পায় | 1 থেকে ∞ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় | – ∞ থেকে –1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় | –1 থেকে – ∞ পর্যন্ত হ্রাস পায় |

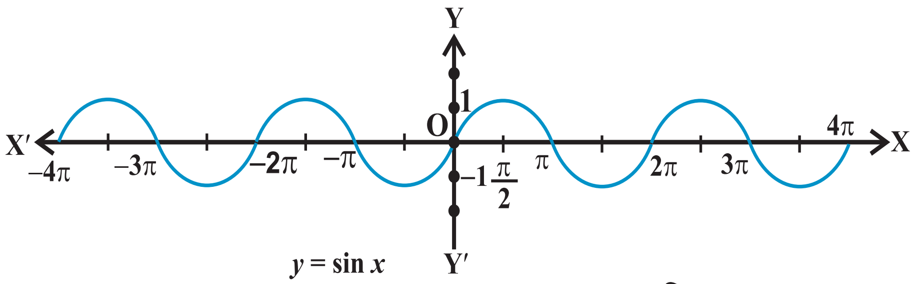
**মন্তব্য** উপরের সারণি থেকে $0 < x < \frac{\pi}{2}$ এর জন্য $\tan x$, $0$ থেকে $\infty$ (অসীম) পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়, এই বিবৃতিটি সহজে বুঝায় যে $0 < x < \frac{\pi}{2}$ অন্তরে $x$ বৃদ্ধি পেলে $\tan x$ বৃদ্ধি পায় এবং ধরে নেওয়া যায় $x$ এর মান $\frac{\pi}{2}$ এর দিকে গেলে এর মান ইচ্ছামত বড়ো ধনাত্মক মানের দিকে অগ্রসর হয়। একইভাবে বলা যায় যে

চতুর্থ পাদে cosec $x$ এর মান $-1$ থেকে $-\infty$ (ঋণাত্মক অসীম) পর্যন্ত হ্রাস পায়, এর অর্থ $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ এর জন্য cosec $x$ হ্রাস পায় এবং ধরে নেওয়া যায় $x$ এর মান $2\pi$ এর দিকে গেলে এর মান ইচ্ছামত বড়ো ঋনাত্মক মানের দিকে অগ্রসর হয়। $\infty$ এবং $-\infty$ প্রতীকদুটি দিয়ে নির্দিষ্ট রকমের অপেক্ষক এবং চলকের বৈশিষ্ট প্রকাশ করে।

আমরা দেখতে পাই যে sin $x$ এবং cos $x$ এর মানগুলোর $2\pi$ অন্তরে পরপর পুনরাবৃত্তি হয়।

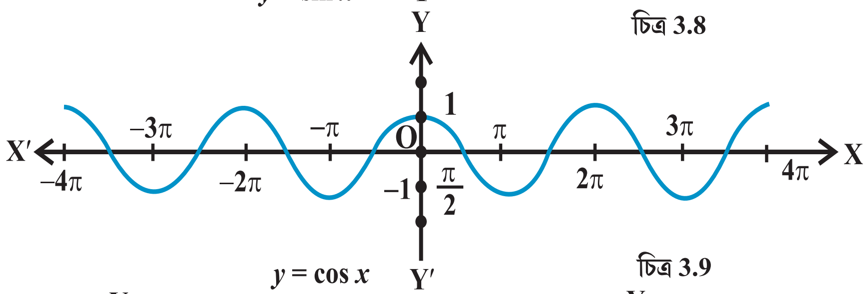
cosec $x$ এবং sec $x$ এর মানগুলোও $2\pi$ অন্তরে পরপর পুনরাবৃত্তি হয়।

পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা দেখতে পাই যে tan $(\pi+x)$=tan $x$। সুতরাং tan $x$ এর মান $\pi$ অন্তরে পরপর পুনরাবৃত্তি হবে। যেহেতু cot $x$ হল tan $x$ এর অনোন্যক, এর মানও $\pi$ অন্তরে পরপর পুনরাবৃত্তি



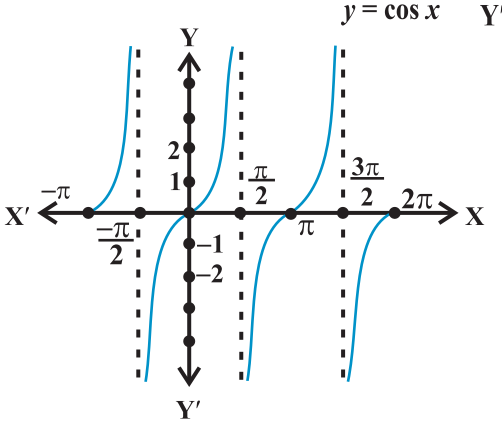

$y$ = sin $x$

চিত্র 3.8

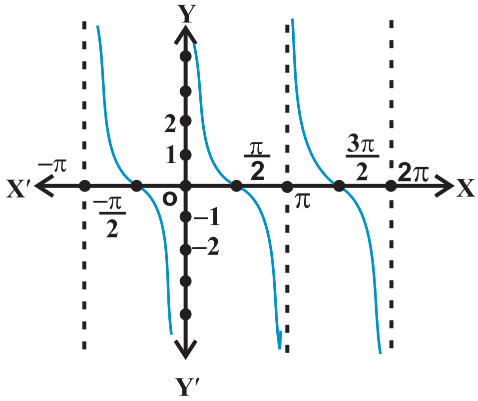



$y$ = cos $x$

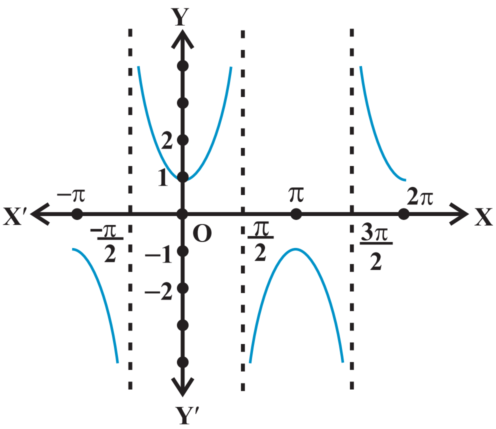
চিত্র 3.9




$y$ = tan $x$ চিত্র 3.10

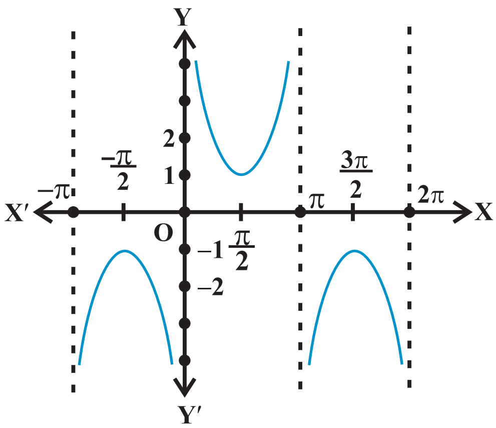



$y$ = cot $x$ চিত্র 3.11




$y = \textbf{sec}\, x$

চিত্র 3.12




$y = \textbf{cosec}\, x$

চিত্র 3.13

হবে। ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের ধারণা এবং বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে আমরা এই অপেক্ষকগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারি। এই অপেক্ষকগুলোর লেখচিত্র উপরে বর্ণিত।

**উদাহরণ 6** যদি $\cos x = -\frac{3}{5}$, $x$ তৃতীয় পাদে অবস্থিত, অপর পাঁচটি ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের মান নির্ণয় করো।

**সমাধান** যেহেতু $\cos x = -\frac{3}{5}$, আমরা পাই $\sec x = -\frac{5}{3}$

এখন $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, অর্থাৎ, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

বা, $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

সুতরাং $\sin x = \pm \frac{4}{5}$

যেহেতু $x$ তৃতীয় পাদে অবস্থিত, $\sin x$ ঋণাত্মক

সুতরাং $\sin x = -\frac{4}{5}$

যা থেকে আরও পাওয়া যায়—

$$\operatorname{cosec} x = \frac{-5}{4}$$

আবারও আমরা পাই

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \quad \text{এবং} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4}$$

**উদাহরণ 7** যদি $\cot x = -\frac{5}{12}$, $x$ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত, অপর পাঁচটি ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের মান নির্ণয় করো।

**সমাধান** যেহেতু $\cot x = -\frac{5}{12}$, আমরা পাই $\tan x = -\frac{12}{5}$

এখন $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$

সুতরাং $\sec x = \pm\frac{13}{5}$

যেহেতু $x$ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত তাই $\sec x$ ঋণাত্মক হবে ।

সুতরাং $\sec x = -\frac{13}{5}$

যা থেকে আরো পাই

$$\cos x = -\frac{5}{13}$$

আবারও আমরা পাই

$$\sin x = \tan x \cos x$$

$$= \left(-\frac{12}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

এবং $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{12}$

**উদাহরণ 8** $\frac{31\pi}{3}$ এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান** আমরা জানি যে, $2\pi$ অন্তরে $\sin x$ এর মান পুনরাবৃত্তি হয়।

সুতরাং $\sin\frac{31\pi}{3} = \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ।

**উদাহরণ 9** $\cos(-1710°)$ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা জানি যে, $2\pi$ অথবা $360°$ অন্তরে $\cos x$ এর মান পুনরাবৃত্তি হয়।

সুতরাং, $\cos(-1710°) = \cos(-1710° + 5 \times 360°)$

$$= \cos(-1710° + 1800°) = \cos 90° = 0$$

## অনুশীলনী - 3.2

1 থেকে 5 পর্যন্ত প্রশ্নগুলোর অপর পাঁচটি ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের মান নির্ণয় করো।

**1.** $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x$ তৃতীয় পাদে অবস্থিত।

**2.** $\sin x = \frac{3}{5}$, $x$ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত।

**3.** $\cot x = \frac{3}{4}$, $x$ তৃতীয় পাদে অবস্থিত।

**4.** $\sec x = \frac{13}{5}$, $x$ চতুর্থ পাদে অবস্থিত।

**5.** $\tan x = -\frac{5}{12}$, $x$ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত।

6 থেকে 10 নম্বর পর্যন্ত প্রশ্নগুলোর ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের মান নির্ণয় করো।

**6.** $\sin 765°$

**7.** $\operatorname{cosec}(-1410°)$

**8.** $\tan \frac{19\pi}{3}$

**9.** $\sin(-\frac{11\pi}{3})$

**10.** $\cot(-\frac{15\pi}{4})$

## 3.4 দুটি কোণের যোগফল ও বিয়োগফলের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক (Trigonometric Functions of Sum and Difference of Two Angles)

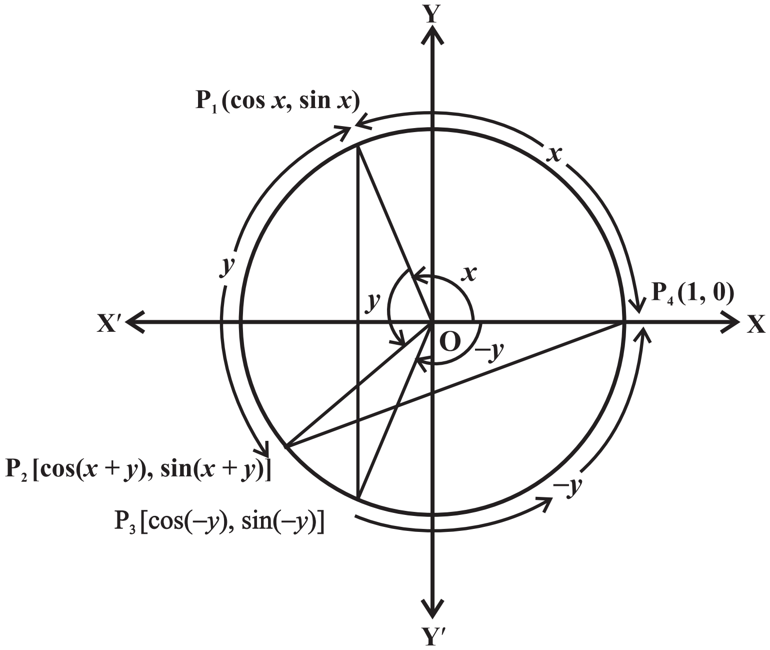
এই অনুচ্ছেদে, দুটি সংখ্যার (কোণের) যোগফল এবং বিয়োগফলের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের রাশিমালা এবং রাশিমালা সংক্রান্ত বিষয়গুলো নিরূপণ করব। এই সম্পর্কিত প্রাথমিক ফলাফলগুলোকে *ত্রিকোণমিতিক অভেদ* বলা হয়। আমরা দেখেছি যে,

1. $\sin(-x) = -\sin x$
2. $\cos(-x) = \cos x$

এখন আমরা আরো কিছু ফলাফল প্রমাণ করব।

3. **$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$**

ধরা যাক একক বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে। ধরো $P_4OP_1$ কোণের মান $x$ এবং $P_1OP_2$ কোণের মান $y$। তখন $P_4OP_2$ কোণের মান $(x + y)$। আরও ধরো $P_4OP_3$ কোণের মান $(-y)$। সুতরাং, $P_1$, $P_2$, $P_3$ এবং $P_4$ এর স্থানাঙ্কগুলো হবে $P_1(\cos x, \sin x)$, $P_2[\cos(x + y), \sin(x + y)]$, $P_3[\cos(-y), \sin(-y)]$ এবং $P_4(1, 0)$ (চিত্র 3.14)।




চিত্র 3.14

ধরা যাক ত্রিভুজদ্বয় $P_1OP_3$ এবং $P_2OP_4$ ।
তারা সর্বসম (কেন?)। সুতরাং $P_1P_3$ এবং $P_2P_4$ সমান। দূরত্বের সূত্র ব্যবহার করে আমরা পাই

$$\begin{aligned}
P_1P_3^2 &= [\cos x - \cos(-y)]^2 + [\sin x - \sin(-y)]^2 \\
&= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 \\
&= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y \\
&= 2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \qquad \text{(কেন?)}
\end{aligned}$$

আরও,
$$\begin{aligned}
P_2P_4^2 &= [1 - \cos(x + y)]^2 + [0 - \sin(x + y)]^2 \\
&= 1 - 2\cos(x + y) + \cos^2(x + y) + \sin^2(x + y) \\
&= 2 - 2\cos(x + y)
\end{aligned}$$

যেহেতু $P_1P_3 = P_2P_4$, আমরা পাই $P_1P_3^2 = P_2P_4^2$

সুতরাং, $2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 - 2\cos(x + y)$

সুতরাং $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

**4.** $\mathbf{\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y}$

(3) নং অভেদে $y$ এর পরিবর্তে $-y$ বসিয়ে, আমরা পাই

$$\cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$$

বা, $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

**5.** $\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x}$

(4) নং অভেদে $x$ এর পরিবর্তে $\frac{\pi}{2}$ এবং $y$ এর পরিবর্তে $x$ বসিয়ে, আমরা পাই

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$$

**6.** $\mathbf{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x}$

অভেদ (5) কে প্রয়োগ করে, আমরা পাই

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos x$$

**7.** $\mathbf{\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y}$

আমরা জানি যে,

$$\sin(x + y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x + y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

**8.** $\mathbf{\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y}$

যদি (7) নং অভেদে $y$ এর পরিবর্তে $-y$ বসাই, তবে আমরা এই ফলটি পাই।

**9.** 3, 4, 7 এবং 8 নং অভেদাবলীতে $x$ ও $y$ এর সুবিধাজনক মান বসিয়ে, আমরা নীচের ফলাফলগুলো পাই:

$$\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x} \qquad \mathbf{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x}$$

$$\mathbf{\cos(\pi - x) = -\cos x} \qquad \mathbf{\sin(\pi - x) = \sin x}$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\cos(2\pi - x) = \cos x \qquad \sin(2\pi - x) = -\sin x$$

অনুরূপে, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ এবং $\text{cosec } x$ এর ফলাফল পাওয়া যায় $\sin x$ এবং $\cos x$ এর ফলাফলের সাহায্যে।

**10. $x, y$ এবং $(x + y)$ এর কোনোটিই যদি $\frac{\pi}{2}$ এর অযুগ্ম গুণিতক না হয়, তবে**

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

যেহেতু $x, y$ এবং $(x + y)$ এর কোনোটিই $\frac{\pi}{2}$ এর অযুগ্ম গুণিতক নয় তাই, এ থেকে পাওয়া যায় $\cos x$, $\cos y$ এবং $\cos(x + y)$ শূন্য নয়। এখন

$$\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

লব এবং হরকে $\cos x \cos y$ দ্বারা ভাগ করে, আমরা পাই

$$\tan(x + y) = \frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

**11.** $$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

(10) নং অভেদে $y$ এর পরিবর্তে $(-y)$ বসিয়ে, আমরা পাই

$$\tan(x - y) = \tan[x + (-y)]$$

$$= \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

**12. $x, y$ এবং $(x+y)$ এর কোনোটিই যদি $\pi$ এর গুণিতক না হয়, তবে**

$$\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

যেহেতু, $x$, $y$ এবং $(x+y)$ এর কোনোটিই $\pi$ এর গুণিতক নয় তাই, এ থেকে আমরা পাই $\sin x$, $\sin y$ এবং $\sin(x+y)$ শূন্য নয়। এখন

$$\cot(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}$$

লব এবং হরকে $\sin x \sin y$ দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

**13.** $\cot(x-y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$

(12) নং অভেদে, $y$ এর পরিবর্তে $(-y)$ বসিয়ে, আমরা এই ফলাফল পাই।

**14.** $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

আমরা জানি,

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$y$ এর পরিবর্তে $x$ বসিয়ে, আমরা পাই

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

আবার,
$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.\end{aligned}$$

তাহলে, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

লব এবং হরকে $\cos^2 x$ দ্বারা ভাগ করে, আমরা পাই

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

**15.** $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

আমরা জানি, $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$y$ এর পরিবর্তে $x$ বসিয়ে, আমরা পাই $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

আবার, $\sin 2x = \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

লব ও হরকে $\cos^2 x$ দ্বারা ভাগ করে, আমরা পাই

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

**16.** $\mathbf{\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$

আমরা জানি,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$y$ এর পরিবর্তে $x$ বসিয়ে পাই, $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

**17.** $\mathbf{\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x}$

আমরা জানি,

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x+x)\\ &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x\\ &= 2\sin x \cos x \cos x + (1-2\sin^2 x)\sin x\\ &= 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x\\ &= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x\end{aligned}$$

**18.** $\mathbf{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x}$

আমরা জানি,

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x)\\ &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x\\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x\\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x)\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

**19.** $\mathbf{\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}}$

আমরা জানি, $\tan 3x = \tan(2x+x)$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x} = \frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x \,.\, \tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

**20.** (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

আমরা জানি যে,

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ ... (1)

এবং $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$ ... (2)

(1) এবং (2) কে যোগ করে ও বিয়োগ করে, আমরা পাই

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$ ... (3)

এবং $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y$ ... (4)

আবার, $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ ... (5)

এবং $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$ ... (6)

(5) এবং (6) যোগ করে ও বিয়োগ করে পাই,

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$ ... (7)

$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\sin y$ ... (8)

ধরি $x + y = \theta$ এবং $x - y = \phi$ , তাহলে

$$x = \left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) \text{ এবং } y = \left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

(3), (4), (7) এবং (8) এ $x$ ও $y$ এর মান বসিয়ে, আমরা পাই

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta + \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

যেহেতু $\theta$ এবং $\phi$ এর যেকোনো বাস্তব মান হতে পারে, তাই $\theta$ এর পরিবর্তে $x$ এবং $\phi$ এর পরিবর্তে $y$ বসিয়ে আমরা পাই —

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\ ;\ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\ ;\ \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

**মন্তব্য** অভেদ (20) এর সাহায্যে, আমরা নিম্নের ফলাফলগুলো প্রমাণ করতে পারি:

**21.** **(i)** $\mathbf{2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)}$

**(ii)** $\mathbf{-2\sin x\sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)}$

**(iii)** $\mathbf{2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)}$

**(iv)** $\mathbf{2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)}$

**উদাহরণ 10** প্রমাণ করো $3\,sin\frac{\pi}{6}sec\frac{\pi}{3} - 4\,sin\frac{5\pi}{6}cot\frac{\pi}{4} = 1$

**সমাধান** বামপক্ষ $= 3\,sin\frac{\pi}{6}sec\frac{\pi}{3} - 4\,sin\frac{5\pi}{6}cot\frac{\pi}{4}$

$$= 3\times\frac{1}{2}\times 2 - 4\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\times 1 = 3 - 4\sin\frac{\pi}{6}$$

$= 3 - 4\times\frac{1}{2} = 1 =$ ডানপক্ষ

**উদাহরণ 11** $\sin 15^\circ$ এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান** আমরা জানি,

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

**উদাহরণ 12** $\tan\frac{13\pi}{12}$ এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান**

$$\tan\frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12} = tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$$

**উদাহরণ 13** প্রমাণ করো

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$$

**সমাধান**

বামপক্ষ $= \dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y}$

লব এবং হরকে $\cos x \cos y$ দ্বারা ভাগ করে পাই—

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$$

**উদাহরণ 14** দেখাও যে,

$$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$

**সমাধান** আমরা জানি যে, $3x = 2x + x$

তাহলে, $\tan 3x = \tan(2x + x)$

বা, $\tan 3x = \dfrac{\tan 2x+\tan x}{1-\tan 2x\tan x}$

বা, $\tan 3x - \tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$

বা, $\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x$

$\therefore$ $\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$

**উদাহরণ 15** প্রমাণ করো

$$cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\,cos\,x$$

**সমাধান** 20 (i) নং অভেদ প্রয়োগ করে, আমরা পাই

বামপক্ষ $= cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$$= 2cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x-(\frac{\pi}{4}-x)}{2}\right)$$

$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos x = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sqrt{2}\cos x =$ ডানপক্ষ

**উদাহরণ 16** প্রমাণ করো $\frac{\cos 7x+\cos 5x}{\sin 7x-\sin 5x}=\cot x$

**সমাধান** 20 (i) এবং 20 (iv) নং অভেদাবলি প্রয়োগ করে, আমরা পাই,

বামপক্ষ $= \frac{2cos\frac{7x+5x}{2}\,cos\frac{7x-5x}{2}}{2cos\frac{7x+5x}{2}\,sin\frac{7x-5x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x =$ ডানপক্ষ

**উদাহরণ 17** প্রমাণ করো $\frac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x}=\tan x$

**সমাধান**

বামপক্ষ $= \frac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x} = \frac{\sin 5x+\sin x-2\sin 3x}{\cos 5x-\cos x}$

$$= \frac{2\sin 3x\cos 2x-2\sin 3x}{-2\sin 3x\sin 2x} = -\frac{\sin 3x(\cos 2x-1)}{\sin 3x\sin 2x}$$

$= \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x =$ ডানপক্ষ

## অনুশীলনী - 3.3

প্রমাণ করো:

1. $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}-\tan^2\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}$

2. $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$

3. $\cot^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6}+3\tan^2\frac{\pi}{6}=6$

4. $2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3}=10$

5. মান নির্ণয় করো:

(i) $\sin 75°$ (ii) $\tan 15°$

নিম্নলিখিতগুলো প্রমাণ করো:

6. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$

7. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$

8. $\dfrac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cot^2 x$

9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(2\pi+x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi+x)\right]=1$

10. $\sin(n+1)x\sin(n+2)x+\cos(n+1)x\cos(n+2)x=\cos x$

11. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{2}\sin x$

12. $\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin 2x\sin 10x$

13. $\cos^2 2x-\cos^2 6x=\sin 4x\sin 8x$

14. $\sin 2x+2\sin 4x+\sin 6x=4\cos^2 x\sin 4x$

15. $\cot 4x(\sin 5x+\sin 3x)=\cot x(\sin 5x-\sin 3x)$

16. $\dfrac{\cos 9x-\cos 5x}{\sin 17x-\sin 3x}=-\dfrac{\sin 2x}{\cos 10x}$

17. $\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{\cos 5x+\cos 3x}=\tan 4x$

18. $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\tan\dfrac{x-y}{2}$

19. $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\tan 2x$

20. $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=2\sin x$

21. $\dfrac{\cos 4x+\cos 3x+\cos 2x}{\sin 4x+\sin 3x+\sin 2x}=\cot 3x$

**22.** $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$

**23.** $\tan 4x = \dfrac{4\tan x\,(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$ **24.** $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

**25.** $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

## 3.5 ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ (Trigonometric Equations)

এক চলরাশি বিশিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক সংক্রান্ত সমীকরণকে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ বলা হয়। এই অনুচ্ছেদে আমরা এই প্রকার সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করব। আমরা ইতিমধ্যে জেনেছি যে $\sin x$ এবং $\cos x$ এর মানগুলো $2\pi$ এর অন্তরালে পরস্পর পুনরাবৃত্তি হয় এবং $\tan x$ এর মানগুলো $\pi$ অন্তরালে পরপর পুনরাবৃত্তি হয়। ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের এরূপ সমাধান যাহা $0 \le x < 2\pi$ এ অবস্থিত তাকে *মুখ্য সমাধান* বলা হয়। '$n$' অখণ্ড মানযুক্ত যে রাশিমালা ত্রিকোণমিতিক সমীকরণে সকল সমাধানগুলোকে প্রকাশ করে তাকে *সাধারণ সমাধান* বলা হয়। আমরা **'Z'** কে অখণ্ড সংখ্যার সেট হিসেবে প্রকাশ করব।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলো ত্রিকোণমিতিক সমীকরণগুলোর সমাধান করতে সহায়ক হবে।

**উদাহরণ 18** সমীকরণ $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ এর মুখ্য সমাধানগুলো নির্ণয় করো।

**সমাধান** আমরা জানি যে $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

সুতরাং মুখ্য সমাধানগুলো হল $x = \dfrac{\pi}{3}$ এবং $\dfrac{2\pi}{3}$

**উদাহরণ 19** $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ সমীকরণের মুখ্য সমাধানগুলো নির্ণয় করো।

**সমাধান** আমরা জানি যে, $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ । সুতরাং, $\tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

এবং
$$\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

সুতরাং
$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

সুতরাং মুখ্য সমাধানগুলো হল $\dfrac{5\pi}{6}$ এবং $\dfrac{11\pi}{6}$

আমরা এখন ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান বের করব। আমরা ইতিমধ্যে দেখেছি যে,

$\sin x = 0$ হলে $x = n\pi$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

$\cos x = 0$ হলে $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ , যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

এখন আমরা নিম্নলিখিত ফলাফলগুলোর প্রমাণ করব :

**উপপাদ্য 1** যে কোনো বাস্তব সংখ্যা $x$ এবং $y$ এর জন্য,

$\sin x = \sin y$ হলে $x = n\pi + (-1)^n y$ , যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

**প্রমাণ** : যদি $\sin x = \sin y$, তবে $\sin x - \sin y = 0$

বা, $2\cos\frac{x+y}{2}\, sin\frac{x-y}{2} = 0$

অর্থাৎ $\cos\frac{x+y}{2} = 0$ বা $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

সুতরাং $\frac{x+y}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা $\frac{x-y}{2} = n\pi$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

অর্থাৎ $x = (2n+1)\pi - y$ বা $x = 2n\pi + y$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$.

অতএব $x = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1} y$ বা $x = 2n\pi + (-1)^{2n} y$ যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

উপরোক্ত দুটো মানকে একত্রিত করে পাই

$x = n\pi + (-1)^n y$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$.

**উপপাদ্য 2** যে কোনো বাস্তব সংখ্যা $x$ এবং $y$ এর জন্য, $\cos x = \cos y$ হলে $x = 2n\pi \pm y$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

**প্রমাণ** যদি $\cos x = \cos y$, তবে

$\cos x - \cos y = 0$ অর্থাৎ $-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

হলে $\sin\frac{x+y}{2} = 0$ বা $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

সুতরাং $\frac{x+y}{2} = n\pi$ বা $\frac{x-y}{2} = n\pi$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

অর্থাৎ $x = 2n\pi - y$, বা $x = 2n\pi + y$ যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

অতএব $x = 2n\pi \pm y$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

**উপপাদ্য 3** যদি $x$ এবং $y$ , $\frac{\pi}{2}$ এর অযুগ্ম গুণিতক না হয় তবে প্রমাণ করো $\tan x = \tan y$

হলে $x = n\pi + y$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

**প্রমাণ** যদি $\tan x = \tan y$ হয় তবে $\tan x - \tan y = 0$

বা, $$\frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 0$$

অর্থাৎ $\sin (x - y) = 0$ (কেন ?)

সুতরাং $x - y = n\pi$ অর্থাৎ $x = n\pi + y$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

**উদাহরণ 20** সমাধান করো : $\text{Sin}\, x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

**সমাধান** আমরা পাই $\text{Sin}\, x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{4\pi}{3}$

অতএব $\sin x = \sin\dfrac{4\pi}{3}$

অর্থাৎ $x = n\pi + (-1)^n \dfrac{4\pi}{3}$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$.

> **দ্রষ্টব্য** $\text{Sin}\, x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ সমীকরণের $x$ এর একটি মান $\dfrac{4\pi}{3}$ । $x$ এর অপর কোনো একটি মান নেওয়া যায় যার জন্য $\text{Sin}\, x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ হয়। প্রাপ্ত সমাধানগুলো একই যদিও তারা ভিন্নরূপে দৃশ্যমান।

**উদাহরণ 21** সমাধান করো $\cos x = \dfrac{1}{2}$

**সমাধান** আমরা পাই $\cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

সুতরাং $x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

**উদাহরণ 22** সমাধান করো $\tan 2x = -\cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

**সমাধান:** আমরা পাই, $\tan 2x = -\cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

বা $$tan\,2x = tan\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$$

সুতরাং $2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6}$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

$$x = n\pi + \frac{5\pi}{6}, \text{ যেখানে } n \in \mathbf{Z}$$

**উদাহরণ 23** সমাধান করো $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$

**সমাধান** সমীকরণটি লিখতে পারি

$$sin\,6x + sin\,2x - sin\,4x = 0$$

বা, $2\,sin\,4x\,cos\,2x - sin\,4x = 0$

অর্থাৎ $sin\,4x(\,2\,cos\,2x - 1) = 0$

সুতরাং $\sin 4x = 0$ বা $\cos 2x = \frac{1}{2}$

অর্থাৎ $\sin 4x = 0$ বা, $cos\,2x = cos\frac{\pi}{3}$

অতএব $4x = n$ বা, $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

অর্থাৎ $x = \frac{n\pi}{4}$ বা, $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ যেখানে $n \in \mathbf{Z}$

**উদাহরণ 24** সমাধান করো $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

**সমাধান** সমীকরণটি লিখতে পারি

$$2\left(1 - sin^2 x\right) + 3\,sin\,x = 0$$

বা, $2\,sin^2 x - 3\,sin\,x - 2 = 0$

বা, $(2\sin x + 1)\,(\sin x - 2) = 0$

অতএব $\sin x = -\frac{1}{2}$ বা $\sin x = 2$

কিন্তু $\sin x = 2$ অসম্ভব (কেন?)

সুতরাং $\sin x = -\frac{1}{2} = sin\frac{7\pi}{6}$

অতএব, সমাধানটি হবে

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, \text{ যেখানে } n \in \mathbf{Z}$$

## অনুশীলনী 3.4

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলোর মুখ্য এবং সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো:

**1.** $\tan x = \sqrt{3}$

**2.** $\sec x = 2$

**3.** $\cot x = -\sqrt{3}$

**4.** $\text{cosec } x = -2$

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলোর প্রতিটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো:

**5.** $\cos 4x = \cos 2x$

**6.** $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$

**7.** $\sin 2x + \cos x = 0$

**8.** $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

**9.** $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

## *বিবিধ উদাহরণমালা*

**উদাহরণ 25** যদি $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos y = -\frac{12}{13}$, যেখানে $x$ এবং $y$ উভয়ই দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত তবে $\sin (x + y)$ এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান** আমরা জানি যে,

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \dots (1)$$

এখন $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

সুতরাং $\cos x = \pm\frac{4}{5}$

যেহেতু $x$ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত, তাহলে $\cos x$ ঋণাত্মক।

সুতরাং $\cos x = -\frac{4}{5}$

এখন $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

অর্থাৎ $\sin y = \pm\frac{5}{13}$

যেহেতু $y$ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত, তাই $\sin y$ ধনাত্মক। সুতরাং $\sin y = \frac{5}{13}$

(i) নং সমীকরণে $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ এবং $\cos y$ এর মানগুলো বসিয়ে পাই

$$sin(x+y) = \frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13} = -\frac{36}{65}-\frac{20}{65}=-\frac{56}{65}$$

**উদাহরণ 26** প্রমাণ করো যে

$$\cos 2x \cos\frac{x}{2}-\cos 3x \cos\frac{9x}{2}=\sin 5x \sin\frac{5x}{2}$$

**সমাধান** আমরা পাই

বামপক্ষ $= \frac{1}{2}\left[2\cos 2x \cos\frac{x}{2}-2\cos\frac{9x}{2}\cos 3x\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}+3x\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}-3x\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[cos\frac{5x}{2}+cos\frac{3x}{2}-cos\frac{15x}{2}-cos\frac{3x}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[cos\frac{5x}{2}-cos\frac{15x}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\right\}\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}-\frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$= -sin5x\ sin\left(-\frac{5x}{2}\right)= sin5x\ sin\frac{5x}{2}$ = ডানপক্ষ

**উদাহরণ 27** $\tan\frac{\pi}{8}$ এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান** ধরা যাক $x=\frac{\pi}{8}$, তবে $2x=\frac{\pi}{4}$

এখন $tan\,2x = \frac{2\,tan\,x}{1-tan^2 x}$

বা, $tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\,tan\frac{\pi}{8}}{1-tan^2\frac{\pi}{8}}$

ধরা যাক $y=\tan\frac{\pi}{8}$, তবে $1=\frac{2y}{1-y^2}$

বা $y^2 + 2y - 1 = 0$

সুতরাং $$y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

যেহেতু $\frac{\pi}{8}$ প্রথম পাদে অবস্থিত, তাহলে $y = \tan\frac{\pi}{8}$ ধনাত্মক।

সুতরাং $$tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

**উদাহরণ 28** যদি $tan\ x = \frac{3}{4}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ এবং $\tan\frac{x}{2}$ এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান** যেহেতু $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, তাহলে $\cos x$ ঋণাত্মক

অতএব $$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

সুতরাং, $\sin\frac{x}{2}$ ধণাত্মক এবং $\cos\frac{x}{2}$ ঋণাত্মক

এখন $$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

সুতরাং $\cos^2 x = \frac{16}{25}$ বা $\cos x = -\frac{4}{5}$ (কেন?)

এখন $$2\,sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

সুতরাং $$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{9}{10}$$

বা $\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (কেন?)

আবার $$2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

সুতরাং $$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{10}$$

বা $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (কেন?)

সুতরাং $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(\frac{-\sqrt{10}}{1}\right) = -3$

**উদাহরণ 29** প্রমাণ করো যে $\cos^2 x + \cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

**সমাধান** আমরা পাই

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}.$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x+2\cos 2x\cos\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x+2\cos 2x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x-2\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[3+\cos 2x-\cos 2x] = \frac{3}{2} = \text{ডানপক্ষ}$$

## তৃতীয় অধ্যায়ের বিবিধ অনুশীলনী

প্রমাণ করো যে:

**1.** $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$

**2.** $(\sin 3x + \sin x)\sin x + (\cos 3x - \cos x)\cos x = 0$

**3.** $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4 \cos^2 \dfrac{x+y}{2}$

**4.** $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4 \sin^2 \dfrac{x-y}{2}$

**5.** $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4 \cos x \cos 2x \sin 4x$

**6.** $\dfrac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$

**7.** $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4 \sin x \cos \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{3x}{2}$

নিম্নলিখিত প্রতিটি ক্ষেত্রে $\sin \dfrac{x}{2}$, $\cos \dfrac{x}{2}$ এবং $\tan \dfrac{x}{2}$ এর মান নির্ণয় করো :

**8.** $\tan x = -\dfrac{4}{3}$, $x$ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত

**9.** $\cos x = -\dfrac{1}{3}$, $x$ তৃতীয় পাদে অবস্থিত

**10.** $\sin x = \dfrac{1}{4}$, $x$ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত

### *সারসংক্ষেপ*

- যদি $r$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তে $l$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $\theta$ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে তবে $l = r\,\theta$
- রেডিয়ান পরিমাপ $= \dfrac{\pi}{180} \times$ ডিগ্রী পরিমাপ
- ডিগ্রী পরিমাপ $= \dfrac{180}{\pi} \times$ রেডিয়ান পরিমাপ
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$
- $\cos(2n\pi + x) = \cos x$
- $\sin(2n\pi + x) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$

- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

  $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\quad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$

  $\cos(2\pi - x) = \cos x$ $\quad$ $\sin(2\pi - x) = -\sin x$

- যদি $x, y$ এবং $(x \pm y)$ কোনোটিই $\frac{\pi}{2}$ এর অযুগ্ম গুণিতক না হয় তবে

  $$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

- $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
- যদি $x, y$ এবং $(x \pm y)$ কোনোটিই $\pi$ এর গুণিতক না হয় তবে

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

- $\cot(x-y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

◆ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \dfrac{2 \tan x}{1+\tan^2 x}$

◆ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

◆ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

◆ $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

◆ $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

◆ (i) $\cos x + \cos y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x - \cos y = -2\sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

◆ (i) $2\cos x \cos y = \cos (x+y) + \cos (x-y)$

(ii) $-2\sin x \sin y = \cos (x+y) - \cos (x-y)$

(iii) $2\sin x \cos y = \sin (x+y) + \sin (x-y)$

(iv) $2 \cos x \sin y = \sin (x+y) - \sin (x-y)$।

◆ $\sin x = 0$ হলে $x = n\pi$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$ ।

◆ $\cos x = 0$ হলে $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$ ।

◆ $\sin x = \sin y$ হলে $x = n\pi + (-1)^n y$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$ ।

◆ $\cos x = \cos y$, হলে $x = 2n\pi \pm y$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$ ।

◆ $\tan x = \tan y$ হলে $x = n\pi + y$, যেখানে $n \in \mathbf{Z}$ ।

## ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

ভারতবর্ষে সর্বপ্রথম ত্রিকোণমিতির চর্চা শুরু হয়েছিল। প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞ আর্যভট্ট (476), ব্রহ্মগুপ্ত (598), ভাস্কর I (600) এবং ভাস্কর II (1114) এরা গুরুত্বপূর্ণ ফলাফল দিয়েছিলেন। এসকল ফলাফল সম্পর্কিত জ্ঞান প্রথমে ভারতবর্ষ থেকে মধ্যপ্রাচ্যে এবং সেখান থেকে ইউরোপে বিস্তার লাভ করেছিল। গ্রিকরাও ত্রিকোণমিতি নিয়ে চর্চা শুরু করে কিন্তু ভারতীয় দৃষ্টিভঙ্গি পরিচিত হওয়ার পরে দেখা গেল তাদের দৃষ্টিভঙ্গি অনেকটাই জটিল ছিল। এটি সমস্ত বিশ্বব্যাপি স্বীকৃতি লাভ করেছিল।

ভারতবর্ষে, আধুনিক ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের পূর্বসূরীদের কোনো কোণের সাইন অপেক্ষকের উপস্থাপন তাদের একটি মূল্যবান *Siddhantas* (সংস্কৃত জ্যোতিষীয় কার্য) যা গণিতের ইতিহাসে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা প্রদান করে।

ভাস্কর I (প্রায় 600) $90^\circ$ থেকে বড় কোণের জন্য সাইন অপেক্ষকের মান নির্ণয়ের সূত্রসমূহ দিয়েছিলেন। 1600 শতাব্দিতে মালয়ালম ভাষায় কার্য *Yuktibhasa* (Period) তে $\sin(A+B)$ বিস্তারের প্রমাণ আছে। ভাস্কর II সাইন অথবা কোসাইন এর $18^\circ$, $36^\circ$, $54^\circ$, $72^\circ$ ইত্যাদির সঠিক রূপ দিয়েছিলেন।

জ্যোর্তিবিদ Sir John F. W. Hersehel (1813) arc sin $x$, arc cos $x$ এর প্রতীক যথাক্রমে $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ ইত্যাদির প্রস্তাব দিয়েছিলেন। উচ্চতা এবং দূরত্ব সংক্রান্ত সমস্যার ক্ষেত্রে Thales (প্রায় 600 BC) এর নাম অঙ্গাঙ্গি ভাবে জড়িত। তিনি মিশরের একটি গ্রেট পিরামিডের উচ্চতা নির্ণয়ের কৃতিত্বের অধিকারী, এজন্য উনি একটি পিরামিডের ছায়ার দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা জানা সহায়ক দণ্ডের (বা gnomon) দৈর্ঘ্য মেপে, এদের অনুপাতের তুলনা করেন।

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ (সূর্যের উন্নতি কোণ)}$$

সমুদ্রের জাহাজের দূরত্ব নির্ণয়ের কৃতিত্ব Thales কে দেওয়া যায়। দূরত্ব নির্ণয়ের জন্য উনি সদৃশ ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমানুপাতের প্রয়োগ করেন। সদৃশ ত্রিভুজের ধর্মের সাহায্যে উচ্চতা এবং দূরত্ব সংক্রান্ত প্রশ্নের সমাধান, প্রাচীন ভারতীয়দের কাজেও পাওয়া যায়।

— ❖ —

অধ্যায় 4

# গাণিতিক আরোহণ নীতি (Principle of Mathematical Induction)

❖ *Analysis and natural philosophy owe their most important discoveries to this fruitful means, which is called induction. Newton was indebted to it for his theorem of the binomial and the principle of universal gravity. – LAPLACE* ❖

## 4.1 ভূমিকা

জি. পিয়ানো
**(1858-1932)**

গাণিতিক চিন্তনের একটি মূল ভিত্তি হল অবরোহী যুক্তি (deductive reasoning)। একটি বিধিবহির্ভূত, এবং অবরোহী যুক্তির উদাহরণ, ন্যায় শাস্ত্রের অধ্যায় থেকে গৃহীত, যা তিনটি বিবৃতিতে যুক্তির মাধ্যমে প্রকাশ করা যেতে পারে :

(a) সক্রেটিস একজন মানুষ

(b) সকল মানুষ মরণশীল, তাই

(c) সক্রেটিস মরণশীল।

যদি (a) ও (b) বিবৃতিগুলো সত্য হয়, তবে (c) সত্য হিসেবে প্রতিষ্ঠিত। এটাকে সরল গাণিতিক উদাহরণ হিসেবে তৈরিতে আমরা লিখতে পারি :

(*i*) আট, দুই দ্বারা বিভাজ্য,

(*ii*) কোনো সংখ্যা দুই দ্বারা বিভাজ্য হলে তা একটি যুগ্ম সংখ্যা, তাই

(*iii*) আট একটি যুগ্ম সংখ্যা।

এরূপে সংক্ষেপে অবরোহী হল একটি প্রক্রিয়া যার সাহায্যে প্রদত্ত একটি বিবৃতি প্রমাণ করা যায় যাকে *গণিতের ভাষায় সাধারণত আনুমানিক কথন (Conjecture) অথবা উপপাদ্য (Theorem) বলা হয়। যাদেরকে কতগুলো বৈধ অবরোহী ধাপ নিষ্পন্ন করে প্রমাণ করা হয় এবং তা একটি প্রমাণ রূপে প্রতিষ্ঠিত হতেও পারে, নাও হতে পারে। অর্থাৎ অবরোহীর প্রয়োগ সাধারণ ক্ষেত্র থেকে বিশেষ ক্ষেত্রের দিকে যাওয়া।*

অবরোহীর বিপরীতে প্রতিক্ষেত্রে আরোহী যুক্তি প্রয়োগ করে পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে আনুমানিক কথনের বিকাশ সাধন করা যায়। গণিতশাস্ত্রে এর বহুলাংশে প্রয়োগ আছে এবং এটি একটি বিজ্ঞানসম্মত ধারণার চাবিকাঠি, যা রাশিতথ্য সংগ্রহ এবং বিশ্লেষণে মান নির্ণয় করে। অতএব, সহজ ভাষায় আমরা বলতে পারি ‘আরোহণ’ (induction) শব্দটির মানে হল বিশেষ ক্ষেত্র বা বিষয়ের সাধারণীকরণ।

বীজগণিত বা গণিতের অন্যান্য শাখায় $n$-সমৃলিত কিছু ফলাফল বা বিবৃতি প্রকাশ করা হয়, যেখানে $n$-একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। এসব বিবৃতিগুলোর প্রমাণে ব্যবহৃত উপযুক্ত নীতি যা বিশেষ কৌশল ভিত্তিক, তাকে *গাণিতিক আরোহণ নীতি বলা হয়* (*principle of mathematical induction*)।

## 4.2 প্রেষণা (Motivation)

গণিতশাস্ত্রে, আমরা সম্পূর্ণ আরোহণের একটি আকার ব্যবহার করব যাকে গাণিতিক আরোহণ বলা হয়। গাণিতিক আরোহণের মূল নীতি বোঝানোর জন্য ধরো পাতলা আয়তাকার টালির (Tiles) একটি সেট রাখা হল (চিত্র 4.1. এ দেখো)।

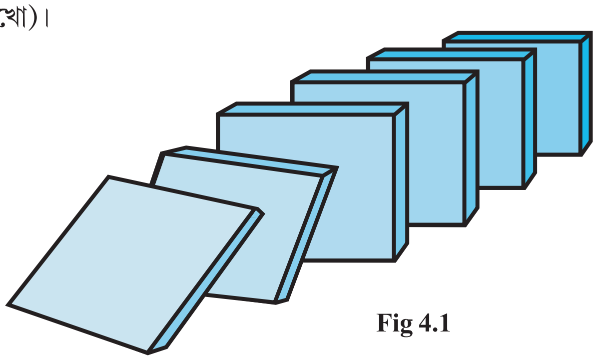


**Fig 4.1**

যখন প্রথম টালিটাকে নির্দেশিত দিকে ধাক্কা দেওয়া হয়, তবে সবগুলো টালি পড়বে। একদম নিশ্চিত যে সবগুলো টালি পড়ে যাবে। এটা জানা যথেষ্ট যে

(a) প্রথম টালিটি পড়ে এবং

(b) এই ঘটনায় যখন কোনো টালি পড়ে, তবে এর পরবর্তী টালি অবশ্যই পড়বে

এটা হল গাণিতিক আরোহণ নীতির মূলভিত্তি।

আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট **N** বাস্তব সংখ্যার একটি বিশেষ ক্রমিক উপসেট। প্রকৃতপক্ষে **N** হল বাস্তব সংখ্যা **R**-এর ক্ষুদ্রতম উপসেট যার নিম্নলিখিত ধর্ম আছে :

একটি সেট S কে একটি আরোহী সেট বলা হবে, যদি $1 \in S$ এবং $x + 1 \in S$ যখন $x \in S$ হয়। যেহেতু **N** হল **R**-এর ক্ষুদ্রতম আরোহী উপসেট, অতএব **N** সেটটি **R**-এর যে কোনো আরোহী উপসেটে থাকবে।

### দৃষ্টান্ত :

মনে করো, আমরা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $1, 2, 3, \ldots, n$-এর সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র নির্ধারণ করতে চাই, অর্থাৎ যে সূত্র, $n = 3$ হলে $1 + 2 + 3$ এর মান, $n = 4$ হলে $1 + 2 + 3 + 4$ এর মান নির্ণয় করে এবং ইত্যাদি। মনে করো আমাদের কোনোভাবে বিশ্বাস জন্মাতে পারে $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ এ সূত্রটি সত্য।

বাস্তবে কিভাবে এ সূত্রটি প্রমাণ করা যায়? আমরা অবশ্য এই বিবৃতি $n$ -এর ধনাত্মক অখণ্ড মান যত খুশি নিয়ে যাচাই করতে পারি, কিন্তু এ পদ্ধতি $n$-এর সকল মানের জন্য সূত্রটি প্রমাণ করতে পারবে না। এটা

করতে আমাদের এমন একটি কার্যশৃঙ্খলের প্রয়োজন যার প্রভাবে সূত্রটি বিশেষ কোনো ধনাত্মক অখণ্ড মানের জন্য সত্য হলে যদি তা ঠিক পরবর্তী ধনাত্মক অখণ্ড মানেও স্বয়ংক্রিয়ভাবে সত্য হয়ে যায় এবং এরূপে চলতে থাকবে। এ ধরনের কার্যশৃঙ্খল গাণিতিক আরোহণ পদ্ধতি দ্বারা উৎপন্ন হয়। এমনটা বিবেচনা করা যায়।

## 4.3 গাণিতিক আরোহণের নীতি (The Principle of Mathematical Induction)

মনে করো, স্বাভাবিক সংখ্যা $n$ সম্বলিত $P(n)$ একটি প্রদত্ত গাণিতিক বিবৃতি এরূপ যে,

*(i)* *বিবৃতিটি $n = 1$ এর জন্য সত্য অর্থাৎ $P(1)$ সত্য, এবং*

*(ii)* *যদি বিবৃতিটি $n = k$ এর জন্য (যেখানে $k$ যে কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) সত্য হলে, তবে বিবৃতিটি $n = k + 1$ এর জন্যও সত্য হয়, অর্থাৎ $P(k)$ সত্য হলে $P(k + 1)$ও সত্য হয়।*

*তাহলে $P(n)$ বিবৃতিটি সকল স্বাভাবিক সংখ্যা $n$ এর জন্য সত্য হবে।*

ধর্ম $(i)$ শুধুমাত্র তথ্যের একটি বিবৃতি। এমন পরিস্থিতিও হতে পারে যে বিবৃতিটি $n \geq 4$ এ সত্য হয়। এক্ষেত্রে ধাপ-1 শুরু হবে $n$=4 থেকে এবং $n$=4 এর ক্ষেত্রে ফলাফল অর্থাৎ P(4) যাচাই করব।

ধর্ম $(ii)$ একটি শর্তসাপেক্ষ ধর্ম। এটা নিশ্চিত করে বলে না যে $n$=$k$ এর জন্য সত্য। কিন্তু এটা বলে যে $n$=$k$ এর জন্য সত্য হলে $n = k + 1$ এর জন্যও সত্য হয়। সুতরাং এই ধর্মের সত্যতা সিদ্ধ করার জন্য কেবল শর্তমূলক প্রস্তাবনা প্রমাণ করতে হবে :

যদি বিবৃতিটি $n$=$k$ এর জন্য সত্য, তবে এটি $n = k + 1$ এর জন্যও সত্য হবে।

এটিকে অনেক সময় আরোহী ধাপ (Inductive step)ও বলা হয়। এই আরোহী ধাপে বিবৃতিটি $n$=$k$ এর জন্য সত্যধরে নেওয়ার কল্পনাকে *আরোহী পরিকল্পনা (Inductive hypothesis)* বলা হয়।

উদাহরণ স্বরূপ, গণিতে প্রায়ই কোনো নমুনার অনুরূপ সূত্র খোঁজা হয় যেমন,

$$1 = 1^2 = 1$$
$$4 = 2^2 = 1 + 3$$
$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 \text{ ইত্যাদি।}$$

এটা লক্ষ্য করা খুবই প্রয়োজন, এখানে প্রথম দুটি অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল হল দ্বিতীয় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ, প্রথম তিনটি অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি হল তৃতীয় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ এবং এভাবে হচ্ছে। সুতরাং এই নমুনা থেকে পাওয়া যায়

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

অর্থাৎ, প্রথম $n$ সংখ্যক অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি হল $n$-এর বর্গ।

চলো আমরা লিখি

$$P(n): 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

আমরা প্রমাণ করব, $n$-এর সব মানে $P(n)$ সত্য। গাণিতিক আরোহণের প্রথম ধাপে প্রমাণ করতে হবে $P(1)$ সত্য। এই ধাপকে বলা হয় ভিত্তিস্তর (basic step)।

স্পষ্টতই : $1 = 1^2$ অর্থাৎ $P(1)$ সত্য।

পরবর্তী ধাপকে বলা হয় *আরোহীস্তর* (*inductive step*)। এখন আমরা ধরে নিই $P(k)$ সত্য, যেখানে $k$ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং আমাদের প্রমাণ করতে হবে P $(k + 1)$ সত্য। যেহেতু $P(k)$ সত্য, আমরা পাই—

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2 \qquad \ldots (1)$$

ধরো $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + \{2(k+1) - 1\}$ ... (2)

$$= k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$ [(1) নং প্রয়োগে]

অতএব, P $(k + 1)$ সত্য এবং এখন আরোহণ প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

সুতরাং, সব স্বাভাবিক সংখ্যা $n$ এর জন্য P$(n)$ সত্য।

**উদাহরণ 1** $n \geq 1$ হলে, প্রমাণ করো যে,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**সমাধান :** ধরি প্রদত্ত বিবৃতিটি P$(n)$, অর্থাৎ

$$P(n):\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 1$, এর জন্য, $P(1): 1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = 1$ যা সত্য,

মনে করো, কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা k এর জন্য P $(k)$ সত্য।

অর্থাৎ, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ ... (1)

এখন আমরা প্রমাণ করবো যে, P$(k + 1)$ও সত্য।

আমরা পাই, $(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2) + (k + 1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$ [(1) নং প্রয়োগে]

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)\{2(k+1)+1\}}{6}$$

সুতরাং P$(k + 1)$ সত্য, যখন P $(k)$ সত্য।

অতএব, গাণিতিক আরোহণ নীতি অনুযায়ী সকল স্বাভাবিক সংখ্যা $n$-এর জন্য P$(n)$ বিবৃতিটি সত্য।

**উদাহরণ 2** প্রমাণ করো যে, সব স্বাভাবিক সংখ্যা $n$-এর জন্য, $2^n > n$.

**সমাধান :** ধরো $P(n)$: $2^n > n$

যখন $n = 1$, $2^1 > 1$ অতএব $P(1)$ সত্য।

মনে করো $P(k)$ সত্য, $k$ যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা, অর্থাৎ

$$2^k > k \qquad \ldots (1)$$

এখন আমরা প্রমাণ করবো যে $P(k + 1)$ সত্য যখন $P(k)$ সত্য হয়।

(1)-এর উভয়পক্ষকে 2 দিয়ে গুণ করে আমরা পাই

$$2 . 2^k > 2k$$

i.e., $$2^{k+1} > 2k = k + k > k + 1$$

অতএব, $P(k + 1)$ সত্য যখন $P(k)$ ও সত্য। সুতরাং, গাণিতিক আরোহণ নীতি অনুযায়ী $n$-এর সকল ধনাত্মক অখণ্ড মানে $P(n)$ বিবৃতিটি সত্য।

**উদাহরণ 3** সব $n \geq 1$ হলে, প্রমাণ করো যে

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

**সমাধান :** আমরা লিখতে পারি—

$$P(n): \ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

এখন $P(1): \dfrac{1}{1.2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1}$ যা সত্য। সুতরাং $n = 1$ এর জন্য $P(n)$ সত্য।

মনে করো, কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা $k$-এর জন্য $P(k)$ সত্য,

অর্থাৎ, $$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} \qquad \ldots (1)$$

আমাদের প্রমাণ করতে হবে $P(k + 1)$ সত্য যখন $P(k)$ সত্য হয়।

আমরা পাই—

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \qquad \text{[(1) নং প্রয়োগে]}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$$

অতএব, P($k$ + 1) সত্য হয় যখন P($k$) সত্য হয়। সুতরাং গাণিতিক আরোহণ নীতি অনুসারে সব স্বাভাবিক সংখ্যা $n$-এর জন্য P($n$) সত্য।

**উদাহরণ 4** $n$ যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা হলে, প্রমাণ করো যে, $7^n - 3^n$ সর্বদা 4 দিয়ে বিভাজ্য।

**সমাধান :** আমরা লিখতে পারি

P($n$) : $7^n - 3^n$, 4 দিয়ে বিভাজ্য।

আমরা লক্ষ্য করি, P(1): $7^1 - 3^1 = 4$, যা 4 দিয়ে বিভাজ্য।

সুতরাং $n = 1$ এর জন্য P($n$) সত্য।

ধরো, কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা $k$-এর জন্য P($k$) সত্য।

অর্থাৎ, P($k$) : $7^k - 3^k$, 4 দিয়ে বিভাজ্য।

আমরা লিখতে পারি $7^k - 3^k = 4d$, যেখানে $d \in \mathbf{N}$.

এখন, আমরা প্রমাণ করব P($k$ + 1) সত্য যখন P($k$) সত্য হয়।

এখন $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)} = 7^{(k+1)} - 7.3^k + 7.3^k - 3^{(k+1)}$

$$= 7(7^k - 3^k) + (7-3)3^k = 7(4d) + (7-3)3^k$$

$$= 7(4d) + 4.3^k = 4(7d + 3^k)$$

শেষ লাইন থেকে, আমরা দেখি যে $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)}$, 4 দিয়ে বিভাজ্য। অতএব P($k$ + 1) সত্য যখন P($k$) সত্য হয়। সুতরাং গাণিতিক আরোহণের নীতি প্রয়োগে P($n$) বিবৃতিটি প্রতিটি স্বাভাবিক সংখ্যা $n$-এর জন্য সত্য হয়।

**উদাহরণ 5** প্রমাণ করো যে, $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$, যেখানে $n$ যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা, $x > -1$ ।

**সমাধান :** ধরো প্রদত্ত বিবৃতিটি P($n$),

অর্থাৎ, P($n$): $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$, যেখানে $x > -1$ ।

লক্ষ্য করো $n = 1$-এর জন্য P($n$) সত্য, যেহেতু $(1+x) \geq (1 + x)$, এখানে $x > -1$ ।

মনে করি, P($k$): $(1 + x)^k \geq (1 + kx)$, $x > -1$ সত্য হয়। ... (1)

আমরা প্রমাণ করব P($k$ + 1) সত্য, $x > -1$ যখন P($k$) সত্য হয়। ... (2)

এখন, $(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x)$ অভেদটিকে বিবেচনা কর।

দেওয়া আছে $x > -1$, সুতরাং $(1+x) > 0$

অতএব, $(1 + x)^k \geq (1 + kx)$ প্রয়োগে আমরা পাই

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x)$$

অর্থাৎ $(1 + x)^{k+1} \geq (1 + x + kx + kx^2)$. ... (3)

এখানে $k$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $x^2 \geq 0$ যাতে $kx^2 \geq 0$

অতএব, $(1 + x + kx + kx^2) \geq (1 + x + kx)$,

সুতরাং আমরা পাই,

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + x + kx)$$

অর্থাৎ $\quad (1 + x)^{k+1} \geq [1 + (1 + k)x]$

এভাবে, (2)-এর বিবৃতিটি প্রমাণিত হল। সুতরাং গাণিতিক আরোহণের নীতি অনুযায়ী, সব স্বাভাবিক সংখ্যা $n$-এর জন্য P($n$) বিবৃতিটি সত্য।

**উদাহরণ 6** প্রমাণ করো যে, সব $n \in \mathbf{N}$ জন্য $2.7^n + 3.5^n - 5$, 24 দ্বারা বিভাজ্য।

**সমাধান :** ধরি প্রদত্ত বিবৃতিটি P($n$) সুতরাং, P($n$) : $2.7^n + 3.5^n - 5$, 24 দ্বারা বিভাজ্য। লক্ষ্য করো, $n$ = 1 এর জন্য P($n$) সত্য, যেহেতু $2.7 + 3.5 - 5 = 24$, যা 24 দ্বারা বিভাজ্য। মনে করা যাক, P($k$) সত্য।

অর্থাৎ $2.7^k + 3.5^k - 5 = 24q$, যেখানে $q \in \mathbf{N}$ ... (1)

এখন আমরা প্রমাণ করব যে P($k$ + 1) সত্য যখন P($n$) সত্য হয়।

আমরা পাই—

$$2.7^{k+1} + 3.5^{k+1} - 5 = 2.7^k \,.\, 7^1 + 3.5^k \,.\, 5^1 - 5$$

$$= 7\,[2.7^k + 3.5^k - 5 - 3.5^k + 5] + 3.5^k \,.\, 5 - 5$$

$$= 7\,[24q - 3.5^k + 5] + 15.5^k - 5$$

$$= 7 \times 24q - 21.5^k + 35 + 15.5^k - 5$$

$$= 7 \times 24q - 6.5^k + 30$$

$$= 7 \times 24q - 6\,(5^k - 5)$$

$= 7 \times 24q - 6\,(4p)$ [($5^k - 5$) হল 4-এর গুণিতক (কেন ?)]

$$= 7 \times 24q - 24p$$

$$= 24\,(7q - p)$$

$= 24 \times r$; $r = (7q - p)$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা ... (2)

(1) নং-এর ডান পক্ষের রাশিমালাটি 24 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব P($k$ + 1) সত্য যখন P($k$) সত্য হয়। সুতরাং গাণিতিক আরোহণ নীতি অনুযায়ী, সব $n \in$ N-এর জন্য P($n$) সত্য।

**উদাহরণ 7** প্রমাণ করো যে,

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}, n \in \mathbf{N}$$

**সমাধান :** ধরো প্রদত্ত বিবৃতিটি $P(n)$

অর্থাৎ, $P(n) : 1^2 + 2^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}, n \in \mathbf{N}$

লক্ষ্য করো, $n = 1$ এর জন্য $P(n)$ সত্য, যেহেতু $1^2 > \frac{1^3}{3}$

মনে করি, $P(k)$ সত্য

অর্থাৎ $P(k) : 1^2 + 2^2 + ... + k^2 > \frac{k^3}{3}$ ...(1)

আমরা এখন প্রমাণ করব $P(k + 1)$ সত্য যখন $P(k)$ সত্য হয়।

আমরা পাই, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2$

$$= \left(1^2 + 2^2 + ... + k^2\right) + (k+1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k+1)^2 \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

$$= \frac{1}{3}[k^3 + 3k^2 + 6k + 3]$$

$$= \frac{1}{3}[(k + 1)^3 + 3k + 2] > \frac{1}{3}(k + 1)^3$$

অতএব, $P(k + 1)$ ও সত্য যখন $P(k)$ সত্য হয়। সুতরাং গাণিতিক আরোহণ নীতি অনুযায়ী সব $n \in \mathbf{N}$-এর জন্য $P(n)$ সত্য।

**উদাহরণ 8** গাণিতিক আরোহণ নীতি ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে, $(ab)^n = a^n b^n$ যেখানে $n$ যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা।

**সমাধান :** ধরো $P(n)$ হল প্রদত্ত গাণিতিক বিবৃতি

অর্থাৎ, $P(n) : (ab)^n = a^n b^n$.

আমরা লক্ষ্য করি যে, $n = 1$ এর জন্য $P(n)$ সত্য, যেহেতু $(ab)^1 = a^1 b^1$.

ধরি, $P(k)$ সত্য অর্থাৎ

$(ab)^k = a^k b^k$ ... (1)

আমরা এখন প্রমাণ করব $P(k + 1)$ সত্য যখন $P(k)$ সত্য হয়।

এখন, আমরা পাই,

$$(ab)^{k+1} = (ab)^k (ab)$$
$$= (a^k b^k)(ab) \qquad [(1) \text{ নং প্রয়োগে}]$$
$$= (a^k . a^1)(b^k . b^1) = a^{k+1} . b^{k+1}$$

অতএব, $P(k + 1)$ ও সত্য যখন $P(k)$ সত্য হয়। সুতরাং গাণিতিক আরোহণ নীতি অনুযায়ী সব $n \in \mathbf{N}$-এর জন্য $P(n)$ সত্য।

## অনুশীলনী 4.1

নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলো গাণিতিক আরোহণ নীতি প্রয়োগে প্রমাণ করো, যেখানে সব $n \in \mathbf{N}$.

**1.** $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = \dfrac{(3^n - 1)}{2}$.

**2.** $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

**3.** $1 + \dfrac{1}{(1+2)} + \dfrac{1}{(1+2+3)} + ... + \dfrac{1}{(1+2+3+...n)} = \dfrac{2n}{(n+1)}$.

**4.** $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

**5.** $1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots + n.3^n = \dfrac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$.

**6.** $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n.(n+1) = \left[\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$.

**7.** $1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \dfrac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$.

**8.** $1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + ... + n.2^n = (n-1)\, 2^{n+1} + 2$.

**9.** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

**10.** $\dfrac{1}{2.5} + \dfrac{1}{5.8} + \dfrac{1}{8.11} + ... + \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \dfrac{n}{(6n+4)}$.

**11.** $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dfrac{1}{3.4.5} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

**12.** $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$.

**13.** $\left(1+\dfrac{3}{1}\right)\left(1+\dfrac{5}{4}\right)\left(1+\dfrac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\dfrac{(2n+1)}{n^2}\right) = (n+1)^2$.

**14.** $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = (n+1)$.

**15.** $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

**16.** $\dfrac{1}{1.4} + \dfrac{1}{4.7} + \dfrac{1}{7.10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{(3n+1)}$.

**17.** $\dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + \dfrac{1}{7.9} + \ldots + \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{n}{3(2n+3)}$.

**18.** $1 + 2 + 3 + \ldots + n < \dfrac{1}{8}(2n + 1)^2$.

**19.** $n\,(n + 1)\,(n + 5)$ হল 3-এর গুণিতক।

**20.** $10^{2n-1} + 1$ সর্বদা 11 দিয়ে বিভাজ্য।

**21.** $x^{2n} - y^{2n}$, $x + y$ দিয়ে বিভাজ্য।

**22.** $3^{2n+2} - 8n - 9$ সর্বদা 8 দিয়ে বিভাজ্য।

**23.** $41^n - 14^n$ হল 27-এর গুণিতক।

**24.** $(2n + 7) < (n + 3)^2$.

## সারসংক্ষেপ

- গাণিতিক চিন্তনে একটি মূল ভিত্তি হল অবরোহী যুক্তি (deductive reasoning)। অবরোহীর বিপরীতে, প্রতিক্ষেত্রে আরোহীযুক্তি প্রয়োগ করে পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে আনুমানিক কথনের বিকাশ সাধন করা যায়। অতএব সহজ ভাষায় আমরা বলতে পারি আরোহণ' (induction) শব্দটির অর্থ হল বিশেষ ক্ষেত্র বা বিষয়ের সাধারণীকরণ।
- গাণিতিক আরোহণ নীতি এমন একটি হাতিয়ার যার প্রয়োগে বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক বিবৃতির প্রমাণ করা যায়। যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $n$-এর জন্য প্রতিটি গাণিতিক বিবৃতিতে P($n$) ধরা হয়।

প্রথমে $n = 1$ এর ক্ষেত্রে এর সত্যতা যাচাই করা হয়। তারপর ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $k$-এর জন্য $P(k)$ সত্য কল্পনা করে $P(k + 1)$ সত্য প্রমাণ করা হয়।

## ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

অন্যান্য ধারণা ও পদ্ধতির বিপরীতে গাণিতিক আরোহণের মাধ্যমে প্রমাণ করার বিষয়টি কোনো নির্দিষ্ট ব্যক্তি কর্তৃক বিশেষ মুহূর্তে আবিষ্কৃত হয়নি।

এটা কথিত আছে যে পিথাগোরীয়দের গাণিতিক আরোহণ নীতির সাথে পরিচিতি ছিল। গাণিতিক আরোহণ নীতির সূত্রপাত ফরাসি গণিতজ্ঞ ব্লেইজ পাস্কাল (Blaise Pascal) করেছেন বলে ধরা হয়।

ইংরেজ গণিতজ্ঞ জন ওয়ালিস আরোহণ (induction) নামটি ব্যবহার করেন।

পরবর্তীকালে দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রমাণে এ নীতির প্রয়োগ করা হয়।

ডি মরগ্যান গণিতের ক্ষেত্রে বিভিন্ন বিষয়ের বহু অবদান রেখে গেছেন। ওনিই প্রথম ব্যক্তি যিনি “গাণিতিক আরোহণ” সংজ্ঞায়িত করেন এবং নামকরণ করেন। গাণিতিক শ্রেণির অভিসারিত্ব নির্ণয়ে ডি-মরগ্যানের নিয়ম বিকশিত করেন।

G. Peano উনার কাজের মাধ্যমে সুস্পষ্ট অনুমেয় বিবৃতিমূলক সেট থেকে স্বাভাবিক সংখ্যার ধর্মাবলি বিবৃতি করেন, যা এখন পিয়ানোর স্বতসিদ্ধ হিসেবে খ্যাত। গাণিতিক আরোহণ নীতির অন্যরূপ একটি বিবৃতি হল পিয়ানোর স্বতঃসিদ্ধগুলোর একটি।

অধ্যায় **5**

# জটিল রাশি এবং দ্বিঘাত সমীকরণ
# Complex Numbers and Quadratic Equations

❖ *Mathematics is the Queen of Sciences and Arithmetic is the Queen of Mathematics. – GAUSS* ❖

## 5.1 ভূমিকা

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে, আমরা একচল ও দ্বিচল রাশিবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ এবং একচল রাশিবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ পড়েছি। আমরা দেখেছি যে $x^2 + 1 = 0$ সমীকরণটির কোনো বাস্তব সমাধান নেই। $x^2 + 1 = 0$ থেকে পাই $x^2 = -1$ এবং সব বাস্তব সংখ্যার বর্গ অ-ঋণাত্মক। অতএব, আমাদের বাস্তব সংখ্যা পদ্ধতিকে আরও বৃহৎরূপে সম্প্রসারিত করা প্রয়োজন যাতে আমরা $x^2 = -1$ সমীকরণের সমাধান করতে পারি। আসলে, মূল উদ্দেশ্য হল $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণ সমাধান করা, যেখানে $D = b^2 - 4ac < 0$ যা বাস্তব সংখ্যা পদ্ধতিতে সম্ভব নয়।

**W. R. Hamilton**
**(1805-1865)**

## 5.2 জটিল রাশি (Complex Numbers)

চলো আমরা $\sqrt{-1}$ কে $i$ প্রতীক দিয়ে চিহ্নিত করি। তখন, আমরা পাই $i^2 = -1$, এর মানে এই যে $i$ হল $x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের একটি সমাধান।

যে কোনো রাশি যার আকার $a + ib$ যেখানে $a$ ও $b$ বাস্তব সংখ্যা, এ ধরনের রাশিকে জটিল রাশি বলে।

যেমন, $2 + i3$, $(-1) + i\sqrt{3}$, $4 + i\left(\frac{-1}{11}\right)$ হল জটিল রাশি।

জটিল রাশি $z = a + ib$ তে, $a$ হল $z$-*এর বাস্তব অংশ*, যা Re $z$ দিয়ে বোঝানো হয় এবং $b$ হল $z$-এর *কাল্পনিক অংশ* যা বোঝানো হয় Im $z$ দ্বারা। যেমন, $z = 2 + i5$ এর দিয়ে Re $z = 2$ এবং Im $z = 5$

দুটি জটিল রাশি $z_1 = a + ib$ এবং $z_2 = c + id$ সমান হবে যদি $a = c$ এবং $b = d$ হয়।

**উদাহরণ 1 :** যদি $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$ হয়, যেখনে $x$ ও $y$ বাস্তব সংখ্যা, তবে $x$ ও $y$ এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান :** দেওয়া আছে

$$4x + i\,(3x - y) = 3 + i\,(-6) \qquad \ldots (1)$$

(1) এর বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ তুলনা করে পাই,

$$4x = 3, \quad 3x - y = -6,$$

যা, একযোগে সমাধান করে পাওয়া যায়, $x = \dfrac{3}{4}$ ও $y = \dfrac{33}{4}$ ।

## 5.1 জটিল রাশির বীজগণিত (Algebra of Complex Numbers)

এ বিভাগে, আমরা জটিল রাশির বীজগাণিতিক ধারণার বিকাশ ঘটাবো।

**5.3.1 দুটি জটিল রাশির যোগ (*Addition of two complex numbers*)** ধরো, $z_1 = a + ib$ এবং $z_2 = c + id$ যে কোনো দুটি জটিল রাশি। তাহলে, যোগফল $z_1 + z_2$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত :

$z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$, যা আবার একটি জটিল রাশি।

যেমন, $(2 + i3) + (-6 + i5) = (2 - 6) + i\,(3 + 5) = -4 + i\,8$ ।

জটিল রাশির যোগ নিম্নলিখিত ধর্মগুলো সিদ্ধ করে :

(i) *আবদ্ধ সূত্র* — দুটি জটিল রাশির যোগফলও একটি জটিল রাশি অর্থাৎ, সকল জটিল রাশি $z_1$ ও $z_2$-এর জন্য $z_1 + z_2$ একটি জটিল রাশি।

(ii) *বিনিময় নিয়ম*— যে কোনো দুটি জটিল রাশি $z_1$ ও $z_2$ এর ক্ষেত্রে $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ।

(iii) *সংযোগ নিয়ম*— যে কোনো তিনটি জটিল রাশি $z_1, z_2,$ ও $z_3$, , এর ক্ষেত্রে, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$।

(iv) *যোগজ অভেদের অস্তিত্ব— একটি জটিল রাশি* $0 + i\,.0$ (0 কে সূচিত করে) এর অস্তিত্ব আছে, যাকে বলা হয় যোগজ অভেদ বা শূন্য জটিল রাশি, এমন যে, সকল জটিল রাশি $z$ এর জন্য, $z + 0 = z$ ।

(v) *যোগজ বিপরীত এর অস্তিত্ব— প্রতিটি জটিল রাশি* $z = a + ib$, এর জন্য আমরা একটি জটিল রাশি $-a + i\,(-b)$ ($-z$ দ্বারা সূচিত হয়) পাই, যাকে $z$ এর যোগজ বিপরীত বা ঋণাত্মক $z$ বলা হয়। আমরা লক্ষ করি যে, $z + (-z) = 0$ (যোগজ অভেদ) ।

**5.3.2 দুটি জটিল রাশির অন্তর (*Difference of two complex numbers*)** যে কোনো দুটি প্রদত্ত জটিল রাশি $z_1$ ও $z_2$ এর ক্ষেত্রে, এদের অন্তর $z_1 - z_2$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

উদাহরণস্বরূপ, $(6 + 3i) - (2 - i) = (6 + 3i) + (-2 + i) = 4 + 4i$

এবং $(2 - i) - (6 + 3i) = (2 - i) + (-6 - 3i) = -4 - 4i$

**5.3.3 দুটি জটিল রাশির গুণ (*Multiplication of two complex numbers*)** ধরো, $z_1 = a + ib$ এবং $z_2 = c + id$ যে কোনো দুটি জটিল রাশি। তাহলে, গুণফল $z_1 z_2$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত :

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

যেমন, $(3 + i5)(2 + i6) = (3 \times 2 - 5 \times 6) + i(3 \times 6 + 5 \times 2) = -24 + i28$

জটিল রাশির গুণ নিম্নলিখিত ধর্মাবলি মেনে চলে, যা আমরা প্রমাণ ছাড়া বিবৃত করছি।

(i) **আবদ্ধ নিয়ম** — দুটি জটিল রাশির গুণফলও একটি জটিল রাশি। সব জটিল রাশি $z_1$ ও $z_2$ এর ক্ষেত্রে গুণফল $z_1 z_2$ একটি জটিল রাশি।

(ii) **বিনিময় নিয়ম** — যে কোনো দুটি জটিল রাশি $z_1$ ও $z_2$ -এর ক্ষেত্রে,

$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

(iii) **সংযোগ নিয়ম** — যে কোনো তিনটি জটিল রাশি $z_1, z_2$ ও $z_3$, -এর ক্ষেত্রে,

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

(iv) **গুণজ অভেদের অস্তিত্ব**— এমন একটি জটিল রাশির $1 + i\,0$ (1 দিয়ে সূচিত হয়), অস্তিত্ব আছে, যাকে *গুণজ অভেদ* বলা হয়, যেখানে সকল জটিল রাশির ক্ষেত্রে $z.1 = z$ ।

(v) **গুণজ বিপরীত এর অস্তিত্ব**— প্রতিটি অ-শূন্য জটিল রাশি $z = a + ib$ অথবা $a + bi$ $(a \neq 0, b \neq 0)$, এর ক্ষেত্রে, আমরা একটি জটিল রাশি $\dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ ( $\dfrac{1}{z}$ বা $z^{-1}$ দিয়ে সূচিত হয়) পাই, যাকে $z$ এর *গুণজ বিপরীত* বলা হয়, যেখানে $z.\dfrac{1}{z} = 1$ (গুণজ অভেদ)।

(vi) **বণ্টন নিয়ম** যে কোনো তিনটি জটিল রাশি $z_1, z_2$ ও $z_3$ এর ক্ষেত্রে

(a) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

(b) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

**5.3.4 দুটি জটিল রাশির ভাগ (*Division of two complex numbers* )** প্রদত্ত যে কোনো দুটি জটিল রাশি $z_1$ ও $z_2$, এর ক্ষেত্রে $\dfrac{z_1}{z_2}$ ভাগটিকে সংজ্ঞায়িত করা হয়

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2} \text{ , যেখানে } z_2 \neq 0 \text{ ।}$$

উদাহরণস্বরূপ, ধরো $z_1 = 6 + 3i$ এবং $z_2 = 2 - i$

তখন $$\frac{z_1}{z_2} = \left((6+3i) \times \frac{1}{2-i}\right) = (6+3i)\left(\frac{2}{2^2+(-1)^2} + i\frac{-(-1)}{2^2+(-1)^2}\right)$$

$$=(6+3i)\left(\frac{2+i}{5}\right)=\frac{1}{5}\left[12-3+i(6+6)\right]=\frac{1}{5}(9+12i)$$

### 5.3.5 *i* এর ঘাতের সূচক ( *Power of i* ) আমরা জানি যে,

$$i^3=i^2i=(-1)\,i=-i\,,\qquad i^4=\left(i^2\right)^2=(-1)^2=1$$

$$i^5=\left(i^2\right)^2 i=(-1)^2\,i=i\,,\quad i^6=\left(i^2\right)^3=(-1)^3=-1 \text{ ইত্যাদি।}$$

আমরা আরও পাই, $\quad i^{-1}=\frac{1}{i}\times\frac{i}{i}=\frac{i}{-1}=-i,\quad i^{-2}=\frac{1}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1,$

$$i^{-3}=\frac{1}{i^3}=\frac{1}{-i}\times\frac{i}{i}=\frac{i}{1}=i,\quad i^{-4}=\frac{1}{i^4}=\frac{1}{1}=1$$

সাধারণভাবে, যে কোনো অখণ্ড সংখ্যা $k$ এর জন্য, $i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$

### 5.3.6 একটি ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল সমূহ (*The square roots of a negative real number* )

লক্ষ করো, $i^2=-1$ এবং $(-i)^2=i^2=-1$

সুতরাং $-1$ এর বর্গমূল গুলো হলো $i, -i$ । যাই হোক $\sqrt{-1}$, প্রতীক দিয়ে আমরা শুধুমাত্র $i$ কে বুঝি।

এখন আমরা দেখি যে, $i$ এবং $-i$ উভয়ই $x^2+1=0$ বা $x^2=-1$ সমীকরণের সমাধান।

একইভাবে, $\quad\left(\sqrt{3}\,i\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2 i^2=3\,(-1)=-3$

$$\left(-\sqrt{3}\,i\right)^2=\left(-\sqrt{3}\right)^2 i^2=-3\text{।}$$

সুতরাং, $-3$ এর বর্গমূলগুলো হল $\sqrt{3}\ i$ এবং $-\sqrt{3}\,i$ ।

আবার, $\sqrt{-3}$ প্রতীক শুধুমাত্র $\sqrt{3}\ i$ -কে বোঝায় অর্থাৎ, $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\ i$ ।

সাধারণত, যদি $a$ একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,\sqrt{-1}=\sqrt{a}\ i$,

এটা আমাদের জানা আছে যে, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ যেখানে $a$ ও $b$ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। এই ফলাফল সত্য হয় যখন $a>0, b<0$ অথবা $a<0,\ b>0$ । $a<0, b<0$ হলে কি হবে? চলো আমরা পরীক্ষা করে দেখি।

লক্ষ করো—

$i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\,(-1)}$ (সব বাস্তব সংখ্যার জন্য $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ধরে নিয়ে)

$= \sqrt{1} = 1$, যা $i^2 = -1$ হওয়ার ঘটনাকে বিরোধিতা করে।

অতএব, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$ যদি $a$ এবং $b$ উভয়ই ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়।

এছাড়াও, যদি $a$ এবং $b$ -এর যে কোনো একটি শূন্য হয়, তবে, স্পষ্টতই, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} = 0$।

**5.3.7 অভেদাবলী (*Identities*)** আমরা নিম্নলিখিত অভেদটি প্রমাণ করব।

$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2$, সব জটিল রাশি $z_1$ ও $z_2$ এর জন্য।

**প্রমাণ :** আমরা পাই,

$$
\begin{aligned}
(z_1 + z_2)^2 &= (z_1 + z_2)\,(z_1 + z_2), \\
&= (z_1 + z_2)\,z_1 + (z_1 + z_2)\,z_2 && \text{(বণ্টন নিয়ম)} \\
&= z_1^2 + z_2z_1 + z_1z_2 + z_2^2 && \text{(বণ্টন নিয়ম)} \\
&= z_1^2 + z_1z_2 + z_1z_2 + z_2^2 && \text{(গুণের বিনিময় নিয়ম)} \\
&= z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2
\end{aligned}
$$

একইভাবে, আমরা নিম্নলিখিত অভেদগুলো প্রমাণ করতে পারি :

(i) $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2\,z_1\,z_2 + z_2^2$

(ii) $(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + 3\,z_1^2 z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3$

(iii) $(z_1 - z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2 z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$

(iv) $z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$

প্রকৃতপক্ষে, অন্য অনেক অভেদাবলী যেগুলো সব বাস্তব সংখ্যার জন্য সত্য সেগুলো সব জটিল রাশির ক্ষেত্রেও সত্য বলে প্রমাণ করা যায়।

**উদাহরণ 2 :** নিম্নলিখিতগুলোকে $a + bi$ (বা $a + ib$ ) আকারে প্রকাশ করো :

(i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)$ (ii) $(-i)\,(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$

**সমাধান :** (i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right) = \frac{-5}{8}i^2 = \frac{-5}{8}(-1) = \frac{5}{8} = \frac{5}{8} + i0$

(ii) $(-i)\,(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3 = 2 \times \frac{1}{8\times8\times8} \times i^5 = \frac{1}{256}\left(i^2\right)^2 i = \frac{1}{256}i$

**সমাধান :** আমরা পাই, $(5-3i)^3 = 5^3 - 3 \times 5^2 \times (3i) + 3 \times 5\,(3i)^2 - (3i)^3$
$= 125 - 225i - 135 + 27i = -10 - 198i.$

**উদাহরণ 4** $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$ কে $a+ib$ আকারে প্রকাশ করো।

**সমাধান :** আমরা পাই, $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)=\left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$

$$=-6+\sqrt{3}i+2\sqrt{6}i-\sqrt{2}\,i^2=\left(-6+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{2}\right)i$$

## 5.4 একটি জটিল রাশির মডিউলাস এবং অনুবন্ধী/প্রতিযোগী (*The Modulus and the Conjugate of a Complex Number*)

ধরো, $z = a + ib$ একটি জটিল রাশি। তবে $z$ -এর মডিউলাসকে, $|z|$ দিয়ে সুচিত করা হয় এবং অ-ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, অর্থাৎ, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ এবং $z$ -এর অনুবন্ধী, যা $\bar{z}$ দিয়ে সুচিত করা হয়, তা হল জটিল রাশি $a - ib$, অর্থাৎ, $\bar{z} = a - ib$ ।

যেমন, $|3+i|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, $\quad |2-5i|=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$,

এবং $\overline{3+i}=3-i$, $\overline{2-5i}=2+5i$, $\overline{-3i-5}=3i-5$

লক্ষ করো যে, অশূন্য জটিল রাশি $z$-এর গুণজ বিপরীত (multiplicative inverse) হল—

$$z^{-1}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

অথবা, $z\,\bar{z}=|z|^2$

এছাড়াও, নিম্নলিখিত ফলাফলগুলো সহজেই অর্জন করা যায়। যে কোনো দুটি জটিল রাশি $z_1$ ও $z_2$ এর ক্ষেত্রে, আমরা পাই—

(i) $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$ (ii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, যেখানে $|z_2|\neq 0$

(iii) $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$ (iv) $\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ (v) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, যেখানে $z_2 \neq 0.$

**উদাহরণ 5** $2-3i$ এর গুণজ বিপরীত নির্ণয় করো।

**সমাধান :** ধরো, $z = 2 - 3i$

তবে $\bar{z} = 2 + 3i$ এবং $|z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$

সুতরাং, $2 - 3i$ এর গুণজ বিপরীত হল—

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

উপরের প্রক্রিয়াটিকে নিম্নলিখিত উপায়েও করা যায়,

$$z^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}$$

$$= \frac{2+3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

**উদাহরণ 6** নিম্নলিখিত গুলোকে $a + ib$ আকারে প্রকাশ করো :

(i) $\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$ (ii) $i^{-35}$

**সমাধান :** (i) আমরা পাই, $\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} \times \dfrac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i} = \dfrac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2}{1-\left(\sqrt{2}i\right)^2}$

$$= \frac{3+6\sqrt{2}i}{1+2} = \frac{3(1+2\sqrt{2}i)}{3} = 1+2\sqrt{2}i$$

(ii) $i^{-35} = \dfrac{1}{i^{35}} = \dfrac{1}{\left(i^2\right)^{17} i} = \dfrac{1}{-i} \times \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{-i^2} = i$

## অনুশীলনী 5.1

1 নং থেকে 10 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রদত্ত প্রতিটি জটিল রাশিকে $a + ib$ আকারে প্রকাশ করো।

**1.** $(5i)\left(-\dfrac{3}{5}i\right)$ **2.** $i^9 + i^{19}$ **3.** $i^{-39}$

**4.** $3(7 + i7) + i(7 + i7)$ **5.** $(1 - i) - (-1 + i6)$

**6.** $\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right)-\left(4+i\frac{5}{2}\right)$ **7.** $\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+i\frac{1}{3}\right)\right]-\left(-\frac{4}{3}+i\right)$

**8.** $(1-i)^4$ **9.** $\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3$ **10.** $\left(-2-\frac{1}{3}i\right)^3$

11 নং থেকে 13 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রদত্ত প্রতিটি জটিল রাশির গুণজ বিপরীত নির্ণয় করো :

**11.** $4-3i$ **12.** $\sqrt{5}+3i$ **13.** $-i$

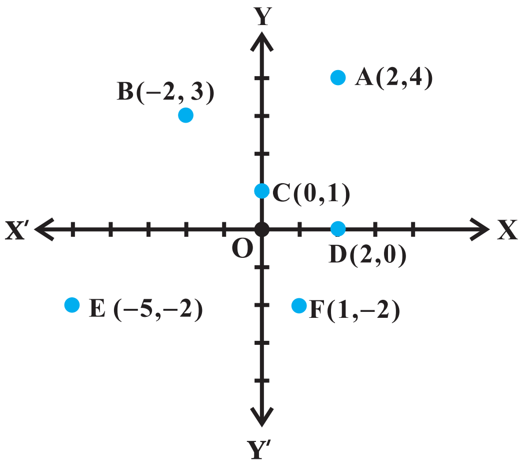
**14.** নিম্নের রাশিমালাটিকে $a+ib$ আকারে প্রকাশ করো :

$$\frac{\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}i\right)-\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)}$$

## 5.5 আরগ্যান্ড তল এবং মেরু আকারে উপস্থাপনা (Argand Plane and Polar Representation)

আমরা ইতিমধ্যে জানি যে, বাস্তব সংখ্যার প্রতিটি ক্রমিক জোড় $(x, y)$ এর অনুরূপে XY-সমতলে আমরা একটি অনন্য বিন্দু পাই এবং বিপরীত ক্রমে এটি পরস্পর লম্ব রেখার একটি সেটের $x$-অক্ষ সাপেক্ষে সত্য যারা $x$ ও $y$-অক্ষ হিসেবে পরিচিত। জটিল রাশি $x+iy$ ক্রমিক জোড় $(x, y)$ কে নির্দেশ করে, যা জ্যামিতিক ভাবে XY-সমতলের উপর একটি অনন্য বিন্দু P$(x, y)$ কে প্রকাশ করে এবং বিপরীতক্রমেও এটি সত্য।

কয়েকটি জটিল রাশি যেমন $2+4i$, $-2+3i$, $0+1i$, $2+0i$, $-5-2i$ এবং $1-2i$ যাদের অনুরূপ ক্রমিক জোড়গুলো হল যথাক্রমে $(2, 4)$, $(-2, 3)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(-5, -2)$, এবং $(1, -2)$ । এদের জ্যামিতিক ভাবে যথাক্রমে A, B, C, D, E, ও F বিন্দু দিয়ে চিত্র 5.1 তে উপস্থাপন করা হয়েছে।

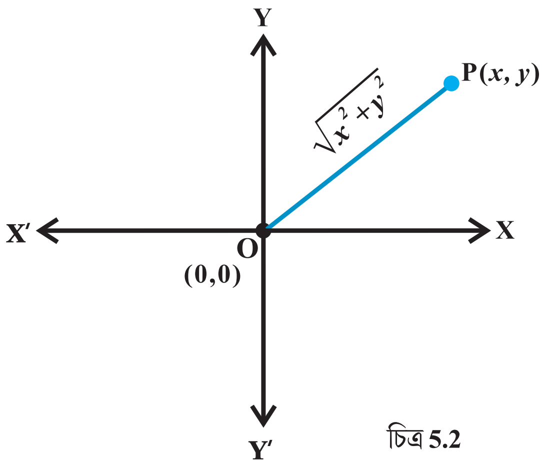


চিত্র 5.1

একটি তল, যার প্রতিটি বিন্দু একটি জটিল রাশিকে নির্দেশ করে, তাকে *জটিল তল* বা আরগ্যান্ড তল বলে।

স্পষ্টতই, আরগ্যান্ড তলে, জটিল রাশি $x+iy$ এর মডিউলাস $=\sqrt{x^2+y^2}$ হল P$(x, y)$ বিন্দু

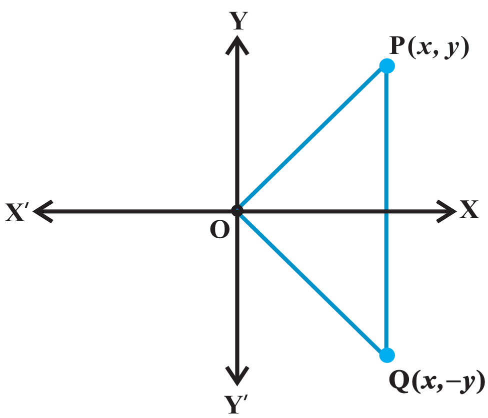
এবং মূলবিন্দু O (0, 0) এর মধ্যে দূরত্ব (চিত্র 5.2) । $x$- অক্ষের উপর অবস্থিত বিন্দুগুলো $a + i\,0$ আকারের জটিল রাশিগুলোকে নির্দেশ করে এবং $y$-অক্ষের উপর অবস্থিত বিন্দুগুলো $0 + i\,b$ আকারের জটিল রাশিগুলোকে নির্দেশ করে। আরগ্যান্ড তলে $x$- অক্ষ এবং $y$- অক্ষকে যথাক্রমে *বাস্তব অক্ষ* এবং *কাল্পনিক অক্ষ* বলা হয়।




চিত্র **5.2**

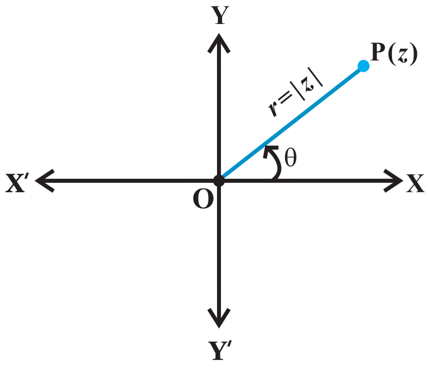
আরগ্যান্ড তলে জটিল রাশি $z = x + iy$ এবং তার অনুবন্ধী , $\bar{z} = x - iy$ যথাক্রমে P $(x, y)$ এবং Q $(x, -y)$ বিন্দু দ্বারা উপস্থাপন করা হয়।

জ্যামিতিকভাবে, $(x, -y)$ বিন্দু হল বাস্তব অক্ষের সাপেক্ষে $(x, y)$ বিন্দু এর দর্পণ প্রতিবিম্ব (mirror image) (চিত্র 5.3)।




চিত্র **5.3**

**5.5.1 জটিল রাশির মেরু আকারে উপস্থাপন (*Polar representation of a complex number*)** ধরো P বিন্দুটি জটিল রাশি $z = x + iy$ কে উপস্থাপন করে। ধরো, নির্দেশিত রেখাংশ OP এর দৈর্ঘ্য $r$ এবং OP ধনাত্মক $x$- অক্ষের সঙ্গে $\theta$ কোণ করে (চিত্র 5.4)।

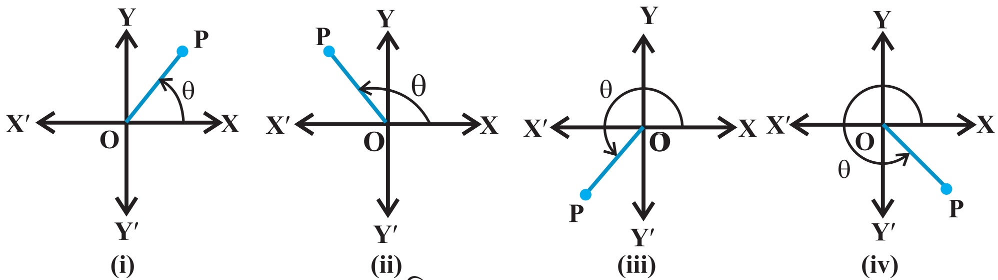



চিত্র **5.4**

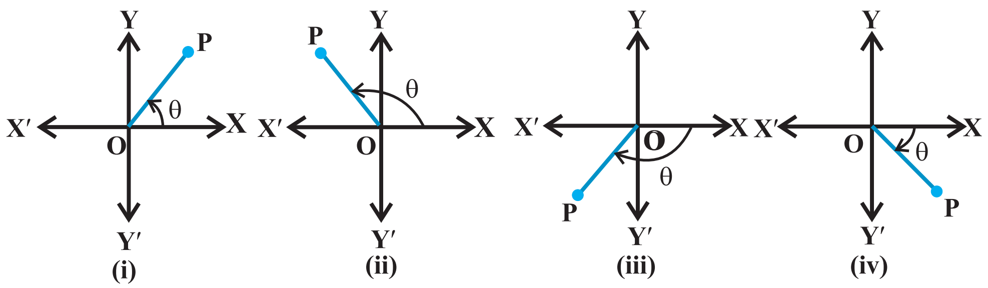
আমরা লক্ষ করি যে P বিন্দুটি বাস্তব সংখ্যার ক্রমিক জোড় $(r, \theta)$ কে অনন্যরূপে নির্দেশ করে, যাকে P *বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক* বলে। আমরা মূলবিন্দুকে মেরু এবং $x$ অক্ষের ধনাত্মক দিককে প্রারম্ভিক রেখা ধরি।

আমরা পাই, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ । সুতরাং, $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ যাকে জটিল রাশির *মেরু আকার* (*polar form*) বলা হয়। এখানে, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ হল $z$-এর মডিউলাস এবং $\theta$ হল $z$ এর আরগুমেন্ট (বা অ্যামপ্লিটিউড), যাকে arg $z$ দিয়ে সূচিত করা হয়।

যে কোনো অশূন্য $(z \neq 0)$ জটিল রাশির ক্ষেত্রে, $0 \leq \theta < 2\pi$ তে $\theta$-এর কেবল একটি মান থাকে। যাই হোক, $2\pi$, দৈর্ঘ্যের অন্য যে কোনো অন্তরাল, যেমন $-\pi < \theta \leq \pi$ ও এমন একটি অন্তরাল হতে পারে। আমরা $\theta$ এবং এমন মান নেব যেন $\pi < \theta \leq \pi$ হয়, যদি বিশেষ কিছু উল্লেখ না থাকে তবে একে $z$-এর **মুখ্য আরগুমেন্ট** বলা হয় এবং arg $z$, দ্বারা সূচিত হয় (চিত্র 5.5 এবং 5.6)।




চিত্র **5.5** $(0 \leq \theta < 2\pi)$




চিত্র **5.6** $(-\pi < \theta \leq \pi)$

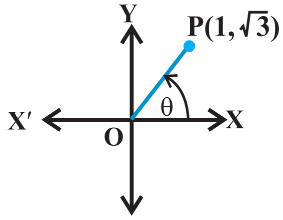
**উদাহরণ 7** জটিল রাশি $z=1+i\sqrt{3}$ কে মেরু আকারে প্রকাশ করো।

**সমাধান :** ধরো $1 = r\cos\theta,\ \sqrt{3} = r\sin\theta$

বর্গ করে এবং যোগ করে আমরা পাই,

$$r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=4$$

অর্থাৎ, $r=\sqrt{4}=2$ (প্রথাগতভাবে, $r>0$)



চিত্র **5.7**

সুতরাং, $\cos\theta=\frac{1}{2},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, যা থেকে পাওয়া যায় $\theta=\frac{\pi}{3}$

অতএব, নির্ণেয় মেরু আকার হল $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

জটিল রাশি $z=1+i\sqrt{3}$ কে চিত্র 5.7 তে উপস্থাপন করা হয়েছে।

**উদাহরণ 8** জটিল রাশি $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}}$ কে মেরু আকারে রূপান্তর করো।

**সমাধান :** প্রদত্ত জটিল রাশি $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}}=\frac{-16}{1+i\sqrt{3}}\times\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

$$=\frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1-\left(i\sqrt{3}\right)^2}=\frac{16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+3}=-4\left(1-i\sqrt{3}\right)=-4+i4\sqrt{3}$$ (চিত্র 5.8).

ধরো, $-4=r\cos\theta,\ 4\sqrt{3}=r\sin\theta$

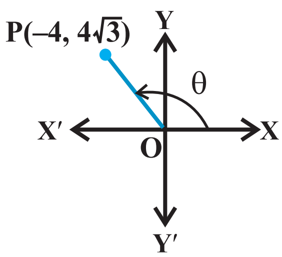
বর্গ করে এবং যোগ করে আমরা পাই,

$$16+48=r^2\left(cos^2\theta+sin^2\theta\right)$$

যা থেকে পাওয়া যায় $r^2=64$, অর্থাৎ $r=8$

সুতরাং, $\cos\theta=-\frac{1}{2},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$



চিত্র **5.8**

অতএব, নির্ণেয় মেরু আকার হল $8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

## অনুশীলনী 5.2

1 নং থেকে 2 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রতিটি জটিল রাশির মডিউলাস ও আরগুমেন্ট নির্ণয় করো:

**1.** $z = -1 - i\sqrt{3}$ **2.** $z = -\sqrt{3} + i$

3 নং থেকে 8 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রতিটি জটিল রাশিকে মেরু আকারে রূপান্তরিত করো:

**3.** $1 - i$ **4.** $-1 + i$ **5.** $-1 - i$

**6.** $-3$ **7.** $\sqrt{3} + i$ **8.** $i$

## 5.6 দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equations)

আমরা ইতিমধ্যেই দ্বিঘাত সমীকরণের সাথে পরিচিত এবং বাস্তব সংখ্যার সেটের ক্ষেত্রে এদের সমাধান করেছি, যখন নিরূপক অ-ঋণাত্মক, অর্থাৎ, $\geq 0$ ।

চলো, আমরা নীচের দ্বিঘাত সমীকরণটি ধরি :
$ax^2 + bx + c = 0$ যেখানে $a, b, c$ বাস্তব সহগ ও $a \neq 0$ ।
আমরা আরও ধরি যে, $b^2 - 4ac < 0$.

এখন, আমরা জানি যে আমরা জটিল রাশির সেটে ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল বের করতে পারি। তাই, জটিল রাশির সেটে উপরোক্ত সমীকরণের সমাধান পাওয়া যায়, যা হল—

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$$

> **দ্রষ্টব্য** এই মুহূর্তে, তোমরা কেউ কেউ জানতে আগ্রহী হতে পার যে, একটি সমীকরণের কয়টি বীজ আছে। এই ক্ষেত্রে, *বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য* হিসেবে পরিচিত উপপাদ্যটি নীচে বিবৃত করা হল (প্রমাণ ব্যতীত)

"একটি বহুপদ রাশিমালা সমীকরণের কমপক্ষে একটি বীজ থাকবে।"

এই উপপাদ্যের ফলস্বরূপ, আমরা অপরিসীম গুরুত্বপূর্ণ নিচের ফলাফলে পৌঁছুতে পারি।

"একটি $n$ ঘতের বহুপদ রাশিমালা সমীকরণের $n$ সংখ্যক বীজ থাকবে।"

**উদাহরণ 9** সমাধান করো $x^2 + 2 = 0$

**সমাধান :** আমরা পাই , $x^2 + 2 = 0$

বা, $x^2 = -2$ অর্থাৎ, $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i$

**উদাহরণ 10** সমাধান করো : $x^2 + x + 1 = 0$

**সমাধান :** এখানে $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

অতএব, সমাধানগুলো হল $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

**উদাহরণ 11** সমাধান করো $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$

**সমাধান :** এখানে, সমীকরণের নিরূপক $= b^2 - 4\,ac$

$$1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \quad = 1 - 20 \quad = -19$$

অতএব সমাধানগুলো হল —

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}}$$

## অনুশীলনী 5.3

নীচের সমীকরণগুলো সমাধান করো :

**1.** $x^2 + 3 = 0$ **2.** $2x^2 + x + 1 = 0$ **3.** $x^2 + 3x + 9 = 0$

**4.** $-x^2 + x - 2 = 0$ **5.** $x^2 + 3x + 5 = 0$ **6.** $x^2 - x + 2 = 0$

**7.** $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$ **8.** $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

**9.** $x^2 + x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$ **10.** $x^2 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

## বিবিধ উদাহরণমালা

**উদাহরণ 12** $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ এর অনুবন্ধী জটিল রাশি নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা পাই, $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$

$$= \frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2} = \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$= \frac{48-36i+20i+15}{16+9} = \frac{63-16i}{25} = \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

সুতরাং, $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ এর অনুবন্ধী হল $\dfrac{63}{25} + \dfrac{16}{25}i$

**উদাহরণ 13** নীচের জটিল রাশিগুলোর মডিউলাস ও আরগুমেন্ট নির্ণয় করো।

(i) $\frac{1+i}{1-i}$ , (ii) $\frac{1}{1+i}$

**সমাধান :** (i) আমরা পাই, $\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1-1+2i}{1+1}=i=0+i$

এখন, আমরা ধরি, $0 = r\cos\theta$, $1 = r\sin\theta$

বর্গ করে এবং যোগ করে পাই, $r^2 = 1$ অর্থাৎ, $r = 1$

সুতরাং $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$

অর্থাৎ, $\theta = \frac{\pi}{2}$

অতএব, $\frac{1+i}{1-i}$ এর মডিউলাস হল 1 এবং আরগুমেন্ট হল $\frac{\pi}{2}$

(ii) আমরা পাই, $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1+1}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

ধরি, $\frac{1}{2}=r\cos\theta$, $-\frac{1}{2}=r\sin\theta$

বর্গ করে এবং যোগ করে পাই, $r^2=\frac{1}{2}$ অর্থাৎ, $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ , সুতরাং, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

অর্থাৎ, $\theta=\frac{-\pi}{4}$

অতএব, $\frac{1}{1+i}$ এর মডিউলাস হল $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং আরগুমেন্ট হল $\frac{-\pi}{4}$ ।

**উদাহরণ 14** যদি $x+iy=\frac{a+ib}{a-ib}$ , প্রমাণ করো যে, $x^2+y^2=1$ ।

**সমাধান :** আমরা পাই,

$$x+iy=\frac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)}=\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

সুতরাং, $x - iy = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

অতএব,

$$x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} = 1$$

**উদাহরণ 15** $\dfrac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ বিশুদ্ধ বাস্তব হলে $\theta$ এর বাস্তব মান নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা পাই,

$$\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta} = \frac{(3+2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}{(1-2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}$$

$$= \frac{3+6i\sin\theta+2i\sin\theta-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} = \frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} + \frac{8i\ \sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

প্রদত্ত যে জটিল রাশিটি বাস্তব।

সুতরাং, $\dfrac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta} = 0$, অর্থাৎ $\sin\theta = 0$

অর্থাৎ, $\theta = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$.

**উদাহরণ 16** জটিল রাশি $z = \dfrac{i-1}{\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}}$ কে মেরু আকারে রূপান্তরিত করো।

**সমাধান :** আমরা পাই, $z = \dfrac{i-1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$= \frac{2(i-1)}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{2\left(i+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i\right)}{1+3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

এখন ধরো, $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = r\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = r\sin\theta$

বর্গ করে ও যোগ করে পাই,

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{2\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)}{4} = \frac{2\times 4}{4} = 2$$

অতএব, $r=\sqrt{2}$ যা থেকে পাওয়া যায় $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

সুতরাং, $\theta = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$ (কেন?)

অতএব, মেরু আকার হল

$$\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{12}+i\ sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

## পঞ্চম অধ্যায় -এর বিবিধ অনুশীলনী

**1.** $\left[i^{18}+\left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ এর মান নির্ণয় করো।

**2.** যে কোনো জটিল রাশি $z_1$ ও $z_2$, এর জন্য, প্রমাণ করো যে,

$\text{Re}\,(z_1 z_2) = \text{Re}\,z_1\ \text{Re}\,z_2 - \text{Im}z_1\ \text{Im}z_2$.

**3.** $\left(\frac{1}{1-4i}-\frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ কে আদর্শ আকারে পরিবর্তিত করো।

**4.** যদি $x-iy=\sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\left(x^2+y^2\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$.

**5.** নিম্নলিখিতগুলোকে মেরু আকারে পরিবর্তিত করো :

(i) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$, (ii) $\frac{1+3i}{1-2i}$

6 নং থেকে 9 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রতিটি সমীকরণ সমাধান করো :

**6.** $3x^2-4x+\frac{20}{3}=0$ **7.** $x^2-2x+\frac{3}{2}=0$

**8.** $27x^2 - 10x + 1 = 0$

**9.** $21x^2 - 28x + 10 = 0$

**10.** যদি $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i$ হয়, তবে $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1}\right|$ এর মান বের করো।

**11.** যদি $a + ib = \dfrac{(x+i)^2}{2x^2+1}$ হয়, প্রমাণ করো যে, $a^2 + b^2 = \dfrac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$ ।

**12.** ধরো, $z_1 = 2 - i, z_2 = -2 + i$ । নীচেরগুলোর মান বের করো :

(i) $\text{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right)$, (ii) $\text{Im}\left(\dfrac{1}{z_1 \bar{z}_1}\right)$ ।

**13.** জটিল রাশি $\dfrac{1+2i}{1-3i}$ এর মডিউলাস ও আরগুমেন্ট বের করো।

**14.** $-6 - 24i$ এর অনুবন্ধী $(x - iy)(3 + 5i)$ হলে বাস্তব সংখ্যা $x$ ও $y$ এর মান বের করো।

**15.** $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$ এর মডিউলাস নির্ণয় করো।

**16.** যদি $(x + iy)^3 = u + iv$, হয় , তবে দেখাও যে, $\dfrac{u}{x} + \dfrac{v}{y} = 4(x^2 - y^2)$

**17.** যদি α ও β ভিন্ন জটিল রাশি হয়, যেখানে $|\beta| = 1$ তবে, $\left|\dfrac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right|$ এর মান বের করো।

**18.** $|1-i|^x = 2^x$ সমীকরণের অশূন্য অখণ্ড সমাধানের সংখ্যা নির্ণয় করো।

**19.** যদি $(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$, হয়, তবে দেখাও যে,

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$

**20.** যদি $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ হয়, তবে $m$ -এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক অখণ্ড মান বের করো।

## *সারসংক্ষেপ*

- $a + ib$ আকারের যে কোনো রাশিকে জটিল রাশি বলে, যেখানে $a$ এবং $b$ হল বাস্তব সংখ্যা। $a$ হল জটিল রাশির বাস্তব অংশ $b$ হল এর কাল্পনিক অংশ

- ধরো, $z_1 = a + ib$ এবং $z_2 = c + id$ । তবে,

  (i) $z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$

  (ii) $z_1\, z_2 = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$

- যে কোনো অশূন্য জটিল রাশি $z = a + ib$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$, এর ক্ষেত্রে, একটি জটিল রাশি $\dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ এর অস্তিত্ব আছে, যা $\dfrac{1}{z}$ বা $z^{-1}$, দিয়ে সূচিত হয়, যাকে $z$ এর *গুণজ বিপরীত* বলা হয়, যেখানে $(a + ib)\left(\dfrac{a^2}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right) = 1 + i0 = 1$ ।

- যে কোনো অখণ্ড সংখ্যা $k$ এর জন্য, $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$ ।

- জটিল রাশি $z = a + ib$ এর অনুবন্ধী বা প্রতিযোগী জটিল রাশি, যা $\bar{z}$ দ্বারা সূচিত হয়, তাহলে $\bar{z} = a - ib$ ।

- জটিল রাশি $z = x + iy$ এর মেরু আকার হল $r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, যেখানে $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ( $z$ -এর মডিউলাস) এবং $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ ($\theta$ হল $z$ এর আরগুমেন্ট)। $\theta$, এমন যে $-\pi < \theta \leq \pi$ বিস্তারে $\theta$ এর মানগুলোকে $z$ এর *মুখ্য আরগুমেন্ট* বলা হয়।

- একটি $n$ ঘাতের বহুপদ রাশিমালা সমীকরণের $n$ সংখ্যক বীজ থাকবে।

- দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$, যেখানে $a, b, c \in \mathrm{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$, এর সমাধানগুলো হল

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}.$$

## *ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট*

বাস্তব সংখ্যা পদ্ধতিতে ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলের অস্তিত্ব নেই, এই সত্য উপলব্ধি করেন গ্রিকরা। কিন্তু এই কৃতিত্বের দাবিদার হলেন ভারতীয় গণিতজ্ঞ *মহাবীর* (850), যিনি সর্বপ্রথম এই সমস্যার স্পষ্টভাবে উল্লেখ করেন। "তিনি তার রচিত '*Ganitasara Sangraha*' গবেষণাপত্রে উল্লেখ করেন যে, একটি ঋণাত্মক রাশির প্রকৃতি বর্গরাশি হয় না, তাই এর কোনো বর্গমূল নেই।" অপর একজন ভারতীয় গণিতজ্ঞ ভাস্করও 1150 সালে তার রচিত বই *Bijaganita*-এ লেখেন "There is no square root of a negative quantity, for it is not a square." *Cardan* (1545) নিম্নলিখিত সমস্যাটির সমাধানের কথা বিবেচনা করেন—

$$x + y = 10,\ xy = 40.$$

তিনি এর সমাধান হিসেবে পান $x = 5 + \sqrt{-15}$ এবং $y = 5 - \sqrt{-15}$ । এই সমাধানটি তিনি নিজেই বাতিল করেন, এটি বলে যে সংখ্যাগুলো 'অপ্রয়োজনীয়'। *Albert Girard* (প্রায় 1625) ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলকে গ্রহণ করেন এবং আমাদেরকে জ্ঞাত করেন যে, বহুপদ সমীকরণের মাত্রা, এর বীজের সংখ্যার সমান হয়। *Euler* সর্বপ্রথম $\sqrt{-1}$ এর জন্য $i$ প্রতীকটি সূচিত করেন এবং *W.R. Hamilton* (প্রায় 1830) জটিল সংখ্যাকে $a + ib$ রূপে বিবেচনা করেন, যা বাস্তব সংখ্যার ক্রমযুগল $(a, b)$ দিয়ে চিহ্নিত করে, তথাকথিত 'কাল্পনিক সংখ্যা' ( *imaginary numbers*) পরিহার করে বিশুদ্ধ গাণিতিক সংজ্ঞা নিরূপণ করেন।

— ❖ —

অধ্যায় 6

# রৈখিক অসমতা (Linear Inequalities)

❖*Mathematics is the art of saying many things in many different ways. – MAXWELL*❖

## 6.1 ভূমিকা

পূর্ববর্তী ক্লাসে, আমরা একচল এবং দ্বিচল বিশিষ্ট সমীকরণ নিয়ে অধ্যয়ন করেছি এবং কিছু বিবৃতিমূলক সমস্যাকে সমীকরণের আকারে অনুবাদ করেও সমাধান করেছি। এখন স্বাভাবিকভাবেই প্রশ্ন উঠছে, একটি বিবৃতিমূলক সমস্যাকে কি সবসময় সমীকরণের আকারে অনুবাদ করা সম্ভব? উদাহরণস্বরূপ তোমার শ্রেণিকক্ষে সমস্ত ছাত্র-ছাত্রীর উচ্চতা 160 সেমি থেকে কম। তোমার শ্রেণিকক্ষ সর্বাধিক 60টি টেবিল বা চেয়ার বা উভয়ই ধারণ করতে পারে। এখানে আমরা '$<$' ক্ষুদ্রতর (less than), '$>$' বৃহত্তর (greater than), '$\leq$' ক্ষুদ্রতর অথবা সমান (less than or equal), এবং $\geq$ বৃহত্তর অথবা সমান (greater than or equal) চিহ্ন অন্তর্ভুক্ত করে নির্দিষ্ট কিছু বিবৃতি পাব, সেগুলো অসমতা (*inequalities*) হিসেবে পরিচিত।

এই অধ্যায়ে আমরা একচল বা দ্বিচল বিশিষ্ট অসমতা নিয়ে অধ্যয়ন করব। বিজ্ঞান, গণিত, রাশি বিজ্ঞান, কাম্যায়ন (*optimisation*) সমস্যা, অর্থবিদ্যা, মনোবিদ্যা ইত্যাদি বিভিন্ন বিষয়ের সমস্যা সমাধানের জন্য অসমতার অধ্যয়ন খুব দরকার।

## 6.2 অসমতা (Inequalities)

চলো আমরা নিম্নলিখিত পরিস্থিতিটি বিবেচনা করি :

(i) রবি 200 টাকা নিয়ে বাজারে চাল কিনতে গেল। বাজারে চাল 1 কেজির প্যাকেটে পাওয়া যায়। 1 প্যাকেট চালের মূল্য 30 টাকা। যদি $x$, যত প্যাকেট চাল কিনে তার সংখ্যা নির্দেশ করে, তবে যে পরিমাণ টাকা খরচ করে তা হল $30x$ টাকা, যেহেতু তাকে প্যাকেট হিসাবেই চাল কিনতে হবে, তাই সে সম্পূর্ণ 200 টাকার চাল কিনতে সমর্থ নাও হতে পারে। (কেন?)

অতএব, $30x < 200$ ... (1)

স্পষ্টতই (i) নং বিবৃতিটি একটি সমীকরণ নয়, কারণ এর মধ্যে কোনো সমতা চিহ্ন নেই।

(ii) রেশমার কাছে 120 টাকা আছে এবং এই টাকা দিয়ে সে কিছু খাতা ও কলম কিনতে চায়। একটি খাতার দাম 40 টাকা এবং একটি কলমের দাম 20 টাকা। এক্ষেত্রে যদি খাতার সংখ্যা $x$ এবং কলমের সংখ্যা $y$ দিয়ে নির্দেশ করা হয়, তবে তার খরচ হবে $(40x + 20y)$ টাকা এবং আমরা পাই—

$$40x + 20y \leq 120 \quad \text{... (2)}$$

যেহেতু এ ক্ষেত্রে মোট 120 টাকা পর্যন্ত খরচ করা যাবে। লক্ষ করো, (2) নং বিবৃতিটি নিম্নলিখিত দুটি বিবৃতি নিয়ে গঠিত

$$40x + 20y < 120 \quad \text{... (3)}$$

এবং
$$40x + 20y = 120 \quad \text{... (4)}$$

(3) নং বিবৃতিটি একটি সমীকরণ নয়, অর্থাৎ এটি একটি অসমতা যদিও (4) নং টি একটি সমীকরণ।

**সংজ্ঞা 1** দুটি বাস্তব সংখ্যা বা দুটি বীজগাণিতিক রাশিমালা (*Expressions*) '<', '>', '≤' অথবা '≥' দিয়ে যুক্ত হয়ে একটি ***অসমতা*** (*inequality*) গঠন করে।

যেমন (1), (2) এবং (3) নং বিবৃতিগুলো হল অসমতা।

$3 < 5$; $7 > 5$ হল ***সংখ্যা সূচক অসমতার*** (*Numerical Inequality*) উদাহরণ,

এবং $x < 5$; $y > 2$; $x \geq 3$, $y \leq 4$ হল আক্ষরিক অসমতার (*Literal Inequalities*) উদাহরণ।

$3 < 5 < 7$ (যাকে পড়া হয় 5, 3 থেকে বড়ো এবং 7 থেকে ছোটো), $3 \leq x < 5$ (পড়া হয় *x*, 3 এর চেয়ে বড়ো বা সমান এবং 5 থেকে ছোটো) এবং $2 < y \leq 4$ হল দ্বৈত অসমতার (*double inequalities*) উদাহরণ।

আরো কিছু অসমতার উদাহরণ হল :

$$ax + b < 0 \quad \text{... (5)}$$
$$ax + b > 0 \quad \text{... (6)}$$
$$ax + b \leq 0 \quad \text{... (7)}$$
$$ax + b \geq 0 \quad \text{... (8)}$$
$$ax + by < c \quad \text{... (9)}$$
$$ax + by > c \quad \text{... (10)}$$
$$ax + by \leq c \quad \text{... (11)}$$
$$ax + by \geq c \quad \text{... (12)}$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0 \quad \text{... (13)}$$
$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{... (14)}$$

(5), (6), (9), (10) এবং (14) এই অসমতাগুলোকে ***যথার্থ অসমতা*** (*strict inequalities*) এবং (7), (8), (11), (12), এবং (13) এই অসমতাগুলোকে ***শিথিল অসমতা*** (*slack inequalities*) বলা হয়। (5) থেকে (8) এই অসমতাগুলোকে একচল $x$ এর রৈখিক অসমতা বলে ($a \neq 0$) এবং (9) থেকে (12) এই অসমতাগুলোকে দ্বিচল $x$ ও $y$ এর রৈখিক অসমতা বলে ($a \neq 0$, $b \neq 0$)।

(13) ও (14) নং অসমতাগুলো রৈখিক নয় (প্রকৃতপক্ষে এই অসমতাগুলো হল একচল $x$ এর দ্বিমাত্রিক অসমতা $a \neq 0$)।

এই অধ্যায়ে, আমরা এক ও দুইচল বিশিষ্ট রৈখিক অসমতার মধ্যেই অধ্যয়ন সীমাবদ্ধ রাখব।

## 6.3 একচল বিশিষ্ট রৈখিক অসমতার বীজগাণিতিক সমাধান এবং তাদের লৈখিক উপস্থাপন (Algebraic Solutions of Linear Inequalities in One Variable and their Graphical Representation) :

চলো আমরা উদাহরণস্বরূপ 6.2 অনুচ্ছেদের (1) নং অসমতা $30x < 200$ কে বিবেচনা করি।

লক্ষ করো এখানে চালের প্যাকেটের সংখ্যাকে $x$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে। নিশ্চিতভাবে $x$ ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হতে পারবে না। এই অসমতার বামপক্ষ (L.H.S.) হল $30x$ এবং ডানপক্ষ (RHS) হলে 200. সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$x = 0$ এর জন্য L.H.S. $= 30\ (0) = 0 < 200$ (R.H.S.), যা সত্য

$x = 1$ এর জন্য L.H.S. $= 30\ (1) = 30 < 200$ (R.H.S.), যা সত্য

$x = 2$ এর জন্য L.H.S. $= 30\ (2) = 60 < 200$, যা সত্য

$x = 3$ এর জন্য L.H.S. $= 30\ (3) = 90 < 200$, যা সত্য

$x = 4$ এর জন্য L.H.S. $= 30\ (4) = 120 < 200$, যা সত্য

$x = 5$ এর জন্য L.H.S. $= 30\ (5) = 150 < 200$, যা সত্য

$x = 6$ এর জন্য L.H.S. $= 30\ (6) = 180 < 200$, যা সত্য

$x = 7$ এর জন্য L.H.S. $= 30\ (7) = 210 < 200$, যা মিথ্যা

উপরের অবস্থা থেকে আমরা দেখি যে, $x$ এর যে সমস্ত মানের জন্য উপরের অসমতাগুলো সত্য তাদের মান 0,1,2,3,4,5,6. $x$ এর এই সমস্ত মান যাদের জন্য উপরের অসমতাগুলো সত্য তাদেরকে এই ***অসমতার*** সমাধান বলে এবং $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ এই সেটটিকে ***সমাধান সেট*** বলে।

অতএব একচল বিশিষ্ট একটি অসমতার যে কোনো সমাধান চলরাশিটির এরূপ একটি মান যা ***অসমতাকে*** সত্য বিবৃতিতে পরিবর্তিত করে।

আমরা ***প্রচেষ্টা ও ভ্রান্তি*** (*Trial and error method*) নিয়মে উপরের অসমতাটির সমাধান নির্ণয় করেছি, যা কিন্তু খুব ফলপ্রদ নয়। স্পষ্টতই এই পদ্ধতিতে সময় বেশি লাগে এবং অনেক ক্ষেত্রে এই পদ্ধতিতে করা সম্ভবও হয় না। অসমীকরণ সমাধান করার জন্য আমাদের অবশ্যই ভাল বা শৃঙ্খলবদ্ধ কৌশল থাকা উচিত। এর আগে আমাদের কিছু সংখ্যাসূচক অসমতার ধর্ম অধ্যয়ন এবং তাদেরকে নিয়ম হিসাবে ধরে অসমতার সমাধান করা উচিত।

তোমরা মনে করে দেখবে যখন কোনো রৈখিক সমীকরণ সমাধান করি, আমরা নিম্নলিখিত নিয়মগুলো অনুসরণ করি।

**নিয়ম 1** কোনো সমীকরণের উভয়দিকে সমান সংখ্যা যোগ (বা বিয়োগ) করা যায়।

**নিয়ম 2** সমীকরণের উভয় পক্ষকে অশূন্য সমান সংখ্যা দিয়ে গুণ (বা ভাগ) করা যায়।

অসমতা সমাধান করার ক্ষেত্রে আমরা একই নিয়ম মান্য করবো, শুধুমাত্র 2 নং নিয়মের এই পার্থক্য ছাড়া যে, যখন আমরা কোনো অসমতার উভয়পক্ষকে কোনো ঋণাত্মক সংখ্যা দিয়ে গুণ (বা ভাগ) করব, তখন অসমীকরণের চিহ্ন পরিবর্তিত হবে (অর্থাৎ '$<$' হবে '$>$', $\leq$' হবে '$\geq$' ইত্যাদি) এর থেকে এটি স্পষ্ট যে

$3 > 2$ যখন $-3 < -2$,

$-8 < -7$ যখন $(-8)\ (-2) > (-7)\ (-2)$, অর্থাৎ, $16 > 14$.

তাই কোনো অসমতা সমাধান করার নিয়মগুলো হল :

**নিয়ম 1** কোনো অসমতার উভয়দিকে, অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন না করেই সমান সমান সংখ্যা যোগ (বা বিয়োগ) করা যায়।

**নিয়ম 2** অসমতার উভয়দিকে একই ধনাত্মক সংখ্যা দিয়ে গুণ (বা ভাগ) করা যায়। কিন্তু কোন ঋণাত্মক সংখ্যা দিয়ে গুণ বা ভাগ করলে অসমতার চিহ্নটি বিপরীতমুখী হবে।

এখন চলো আমরা কিছু উদাহরণ বিবেচনা করি।

**উদাহরণ 1** সমাধান করো : $30\,x < 200$ যখন

(i) $x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা (ii) $x$ একটি পূর্ণ সংখ্যা

**সমাধান :** প্রদত্ত $30\,x < 200$

বা $\dfrac{30x}{30} < \dfrac{200}{30}$ (নিয়ম 2) অর্থাৎ $x < 20 / 3$.

(i) যখন $x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা, $x$ এর নিম্নলিখিত মানের জন্য অসমতাটি সত্য হবে।

$1, 2, 3, 4, 5, 6.$

অসমতাটির সমাধান সেটটি হল $\{1,2,3,4,5,6\}$.

(ii) যখন $x$ একটি পূর্ণ সংখ্যা, তখন অসমতাটির সমাধানগুলো হল

$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

অসমতাটির সমাধান সেট হল $=\{\ldots,-3, -2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

**উদাহরণ 2** সমাধান করো : $5x - 3 < 3x + 1$ যখন

(i) $x$ একটি পূর্ণ সংখ্যা (ii) $x$ একটি বাস্তব সংখ্যা

**সমাধান :** আমরা পাই $5x - 3 < 3x + 1$

বা $5x - 3 + 3 < 3x + 1 + 3$ (নিয়ম1)

বা $5x < 3x + 4$

বা $5x - 3x < 3x + 4 - 3x$ (নিয়ম 1)

বা $2x < 4$

বা $x < 2$ (নিয়ম 2)

(i) যখন $x$ একটি পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে প্রদত্ত অসমতাটির সমাধানগুলো হবে

$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1$

(ii) যখন $x$ একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, অসমতাটির সমাধান হবে $x < 2$, অর্থাৎ সমস্ত বাস্তব সংখ্যা $x$, যারা 2 থেকে ছোটো। তাই অসমতাটির সমাধান সেট হল $x \in (-\infty, 2)$।

আমরা অসমতার সমাধান স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, পূর্ণসংখ্যার সেট এবং বাস্তব সংখ্যার সেট ইত্যাদিতে বিবেচনা করেছি। এখন থেকে উল্লেখ করা না থাকলে, এই অধ্যায়ে অসমতাগুলোর সমাধান বাস্তব সংখ্যার সেটে ধরব।

**উদাহরণ 3** সমাধান করো : $4x + 3 < 6x + 7$.

**সমাধান :** আমরা পাই $4x + 3 < 6x + 7$

বা $\quad 4x - 6x < 6x + 4 - 6x$

বা $\quad -2x < 4$

বা $\quad x > -2$

অর্থাৎ প্রদত্ত অসমতাটির সমাধান হল $x$ এর সমস্ত বাস্তব মান, যারা 2 থেকে বড়ো। অতএব সমাধান সেটটি হবে $(-2, \infty)$.

**উদাহরণ 4** সমাধান করো : $\dfrac{5-2x}{3} \le \dfrac{x}{6} - 5$.

**সমাধান :** আমরা পাই $\quad \dfrac{5-2x}{3} \le \dfrac{x}{6} - 5$

বা $\quad 2(5 - 2x) \le x - 30.$

বা $\quad 10 - 4x \le x - 30$

বা $\quad -5x \le -40,$

বা $\quad x \ge 8$

এইভাবে প্রদত্ত অসমতার সমাধান হল $x$ এর সমস্ত বাস্তব মান যারা 8 এর চেয়ে বড়ো বা সমান অর্থাৎ, $x \in [8, \infty)$.

**উদাহরণ 5** সমাধান করো : $7x + 3 < 5x + 9$. সংখ্যা রেখার উপর সমাধানগুলো দেখাও।

**সমাধান :** আমরা পাই $\quad 7x + 3 < 5x + 9$

বা $\quad 2x < 6$

বা $\quad x < 3$

সমাধানগুলোর লৈখিক উপস্থাপন 6.1. নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।


*চিত্র নং* **6.1**

**উদাহরণ 6** সমাধান করো : $\dfrac{3x-4}{2} \ge \dfrac{x+1}{4} - 1$. সংখ্যা রেখার উপর সমাধানগুলো দেখাও।

**সমাধান :** আমরা পাই $\quad \dfrac{3x-4}{2} \ge \dfrac{x+1}{4} - 1$

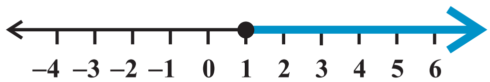
বা $\quad \dfrac{3x-4}{2} \ge \dfrac{x-3}{4}$

বা $\quad 2(3x - 4) \ge (x - 3)$

বা $\quad 6x - 8 \geq x - 3$

বা $\quad 5x \geq 5$ বা $x \geq 1$

সমাধানগুলোর লৈখিক উপস্থাপন 6.2. নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।




*চিত্র নং* **6.2**

**উদাহরণ 7** একাদশ শ্রেণির একজন ছাত্রের প্রথম ও দ্বিতীয় পর্যায়ের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর যথাক্রমে 62 ও 48। ছাত্রটি বার্ষিক পরীক্ষায় ন্যূনতম কত নম্বর পেলে তার গড় নম্বর অন্তত 60 হবে?

**সমাধান :** ধরো ছাত্রটি বার্ষিক পরীক্ষায় $x$ নম্বর পেয়েছে।

তবে, $\quad \dfrac{62+48+x}{3} \geq 60$

বা $\quad 110 + x \geq 180$

বা $\quad x \geq 70$

অতএব ছাত্রটিকে গড়ে অন্ততঃ 60 নম্বর পেতে হলে বার্ষিক পরীক্ষায় তাকে অবশ্যই ন্যূনতম 70 নম্বর পেতে হবে।

**উদাহরণ 8** 10 থেকে বড়ো এমন পর পর ক্রমিক অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার জোড় নির্ণয় করো, যাদের সমষ্টি 40 থেকে ছোটো।

**সমাধান :** ধরো পর পর ক্রমিক অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা দুটির মধ্যে ছোট সংখ্যাটি $x$। সুতরাং অপর সংখ্যাটি $(x+2)$.

আমরা পাই, $x > 10$ $\quad \ldots (1)$

এবং $\quad x + (x + 2) < 40$ $\quad \ldots (2)$

(2) নং সমাধান করে আমরা পাই

$$2x + 2 < 40$$

অর্থাৎ $\quad x < 19$ $\quad \ldots (3)$

(1) ও (3) নং থেকে আমরা পাই

$$10 < x < 19$$

যেহেতু $x$ একটি অযুগ্ম সংখ্যা, $x$ এর মানগুলো হতে পারে 11, 13, 15, 17। সুতরাং নির্ণেয় সম্ভাব্য জোড়গুলো হল (11, 13), (13, 15), (15, 17), (17, 19)।

## অনুশীলনী 6.1

1. সমাধান করো : $24x < 100$, যখন
   (i) $x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা (ii) $x$ একটি অখন্ড সংখ্যা
2. সমাধান করো : $-12x > 30$, যখন
   (i) $x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা (ii) $x$ একটি অখন্ড সংখ্যা
3. সমাধান করো : $5x - 3 < 7$, যখন
   (i) $x$ একটি অখন্ড সংখ্যা (ii) $x$ একটি বাস্তব সংখ্যা
4. সমাধান করো : $3x + 8 > 2$, যখন
   (i) $x$ একটি অখন্ড সংখ্যা (ii) $x$ একটি বাস্তব সংখ্যা

$x$ এর বাস্তব মানের জন্য 5 থেকে 16 নং প্রশ্নের অসমতাগুলোর সমাধান করো।

5. $4x + 3 < 5x + 7$
6. $3x - 7 > 5x - 1$
7. $3(x - 1) \le 2(x - 3)$
8. $3(2 - x) \ge 2(1 - x)$
9. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 11$
10. $\frac{x}{3} > \frac{x}{2} + 1$
11. $\frac{3(x-2)}{5} \le \frac{5(2-x)}{3}$
12. $\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{5} + 4\right) \ge \frac{1}{3}(x - 6)$
13. $2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$
14. $37 - (3x + 5) > 9x - 8(x - 3)$
15. $\frac{x}{4} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$
16. $\frac{(2x-1)}{3} \ge \frac{(3x-2)}{4} - \frac{(2-x)}{5}$

অনুশীলনীর 17 থেকে 20 পর্যন্ত অসমতাগুলোর সমাধান করো এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে সমাধানগুলোকে সংখ্যা রেখায় দেখাও।

17. $3x - 2 < 2x + 1$
18. $5x - 3 \ge 3x - 5$
19. $3(1 - x) < 2(x + 4)$
20. $\frac{x}{2} \ge \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$
21. রবি প্রথম দুটি ইউনিট টেস্টে 70 ও 75 নম্বর পেয়েছে। তৃতীয় ইউনিট টেস্টে সে ন্যূনতম কত নম্বর পেলে তার গড় নম্বর অন্ততঃপক্ষে 60 হবে?
22. কোনো পাঠ্যক্রমে ‘A’ গ্রেড পেতে হলে পাঁচটি পরীক্ষায় (প্রতিটি 100 নম্বরের) একজনকে অবশ্যই গড়ে 90 বা তার বেশি নম্বর পেতে হবে। যদি প্রথম চারটি পরীক্ষায় সুনিতার প্রাপ্ত নম্বর 87, 92, 94 এবং 95 হয়, তবে পঞ্চম পরীক্ষায় সুনিতা ন্যূনতম কত নম্বর পেলে পাঠ্যক্রমে ‘A’ গ্রেড পাবে?
23. 10 থেকে ছোটো এমন পরপর ক্রমিক অযুগ্ম ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যার জোড় নির্ণয় করো, যাদের সমষ্টি 11 থেকে বড়ো।
24. 5 থেকে বড়ো এমন পরপর ক্রমিক যুগ্ম ঋণাত্মক অখন্ড সংখ্যার জোড় নির্ণয় করো, যাদের সমষ্টি 23 থেকে ছোটো।

**25.** কোনো ত্রিভুজের সবচেয়ে বড়ো বাহুটির দৈর্ঘ্য সবচেয়ে ছোটো বাহুটির দৈর্ঘ্যের 3 গুণ এবং তৃতীয় বাহুটি সর্ববৃহৎ বাহুর চেয়ে 2 সেমি ছোটো। যদি ত্রিভুজটির পরিসীমা ন্যূনতম 61 সেমি হয় তবে ক্ষুদ্রতম বাহুটির ন্যূনতম দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

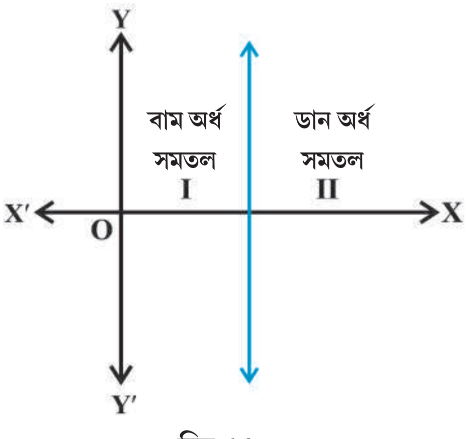
**26.** একজন ব্যক্তি 91 সেমি দৈর্ঘ্যের একটি বোর্ডকে তিন টুকরো করতে চায়। দ্বিতীয়টির দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতর টুকরোটি থেকে 3 সেমি বেশি এবং তৃতীয় টুকরোটির দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতর দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট টুকরোটির দ্বিগুণ। যদি তৃতীয় টুকরোটির দৈর্ঘ্য, দ্বিতীয় টুকরোটির দৈর্ঘ্যের চেয়ে অন্ততঃ 5 সেমি বেশি হয় তবে ক্ষুদ্রতর টুকরোটির সম্ভাব্য ন্যূনতম দৈর্ঘ্য কত হবে?

[সংকেত: যদি ক্ষুদ্রতর টুকরোটির দৈর্ঘ্য $x$ হয়, তবে দ্বিতীয় ও তৃতীয় টুকরো দুটির দৈর্ঘ্য হবে যথাক্রমে, $(x + 3)$ এবং $2x$। অতএব, $x + (x + 3) + 2x \leq 91$ এবং $2x \geq (x + 3) + 5$].

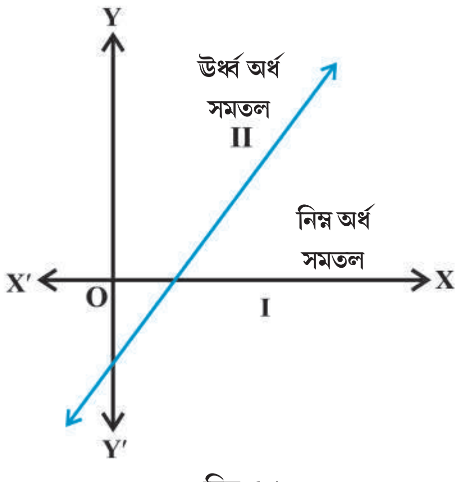
## 6.4 দ্বিচল বিশিষ্ট রৈখিক অসমতার লৈখিক সমাধান (Graphical Solution of Linear Inequalities in Two Variables)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে, আমরা দেখেছি যে একচল বিশিষ্ট কোনো অসমতার লেখ হল একটি চাক্ষুষ উপস্থাপনা এবং অসমতার সমাধান প্রকাশ করার একটি সহজ পদ্ধতি। এখন আমরা দ্বিচল বিশিষ্ট রৈখিক অসমতার লেখ নিয়ে আলোচনা করবো।

আমরা জানি যে একটি রেখা কার্তেসীয় তলকে দুটি অংশে বিভক্ত করে। প্রত্যেকটি অংশ অর্ধ-সমতল (half plane) নামে পরিচিত। একটি উল্লম্ব রেখা এই সমতলকে বাম ও ডান অর্ধ-সমতলে বিভক্ত করে (left and right half planes) এবং একটি তির্যক রেখা এই সমতলকে নিম্ন ও উর্ধ্ব অর্ধসমতলে (lower and upper half planes) বিভক্ত করে। (চিত্র 6.3 ও 6.4)




চিত্র 6.3




চিত্র 6.4

কার্তেসীয় তলে একটি বিন্দু কোনো রেখার উপর বা অর্ধসমতলের প্রথমে বা দ্বিতীয় অংশে অবস্থান করে। এখন আমরা কোনো তলে অবস্থিত বিন্দুগুলোর মধ্যে এবং অসমতা $ax + by < c$ বা $ax + by > c$. এর মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কি না তা পরীক্ষা করবো।

চলো আমরা একটি রেখা $ax + by = c, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$ কে বিবেচনা করি। ..... (1)

এখানে তিনটি সম্ভাবনা আছে, যেমন :

(i) $ax + by = c$ (ii) $ax + by > c$ (iii) $ax + by < c$.

(i) নং এর ক্ষেত্রে স্পষ্টতই (i) নং-কে সিদ্ধ করে এমন সব বিন্দুই $(x, y)$ রেখাটির উপর অবস্থিত এবং বিপরীত ক্রমেও এটি সত্য। (ii) নং ক্ষেত্রে চলো আমরা ধরি $b > 0$. ধরো P $(\alpha,\beta)$ বিন্দুটি $ax + by = c$, $b > 0$, রেখাটির উপর অবস্থিত। সুতরাং $a\alpha + b\beta = c$. ধরো Q $(\alpha , \gamma)$ অর্ধসমতল II-এর একটি যথেচ্ছ বিন্দু (চিত্র 6.5).

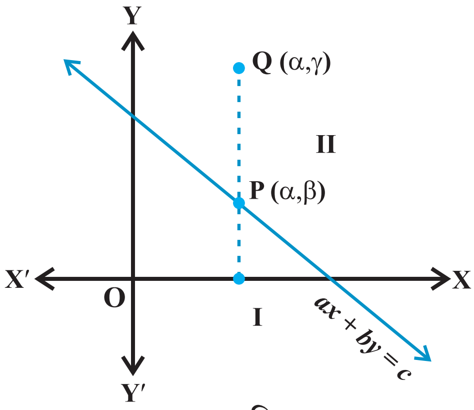
এখন (6.5) নং চিত্র ব্যাখ্যা করে পাই $\gamma > \beta$ (কেন?)

বা $b\gamma > b\beta$

বা $a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$ (কেন?)

বা $a\alpha + b\gamma > c$

অর্থাৎ $Q(\alpha, \gamma)$, $ax + by > c$. অসমতাটিকে সিদ্ধ করে।




চিত্র 6.5

অতএব, $ax + by = c$ রেখাটির উপরের দিকে অর্ধসমতল II এর সকল বিন্দুই $ax + by > c$ এই অসমতাটিকে সিদ্ধ করে। বিপরীতক্রমে, ধরো $(\alpha, \beta)$ হল $ax + by = c$ রেখাটির উপরিস্থ একটি বিন্দু এবং $Q(\alpha, \gamma)$ হল $ax + by > c$ অসমতাটিকে সিদ্ধ করে এরূপ যথেচ্ছ একটি বিন্দু।

সুতরাং, $a\alpha + b\gamma > c$

$\Rightarrow$ $a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$ (কেন?)

$\Rightarrow$ $\gamma > \beta$ (যেহেতু $b > 0$)

এর অর্থ $(\alpha, \gamma)$ বিন্দুটি II অর্ধতলে অবস্থিত।

অতএব, অর্ধসমতল II এর যে কোন বিন্দু $ax + by > c$, কে সিদ্ধ করে এবং বিপরীতক্রমে, $ax + by > c$ কে সিদ্ধ করে এরূপ যে কোন বিন্দু অর্ধসমতল II-এ অবস্থিত।

$b < 0$ এর ক্ষেত্রে আমরা অনুরূপে প্রমাণ করতে পারি যে, $ax + by > c$ কে সিদ্ধ করে এরূপ যে কোন বিন্দু অর্ধসমতলে I-এ অবস্থিত এবং বিপরীতক্রমেও এটি সত্য।

অতএব আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে সকল বিন্দু $ax + by > c$ এই অসমতাকে সিদ্ধ করে তারা $b > 0$ বা $b < 0$, অনুযায়ী অর্ধ সমতল I বা II-এ অবস্থান করবে এবং বিপরীত ক্রমেও এটি সত্য।

এইভাবে, $ax + by > c$ অসমতাটির লেখ যে কোনো একটি অর্ধসমতল হবে (যাকে সমাধান অঞ্চল বলে) এবং অনুরূপ অর্ধ সমতলটি ছায়াবৃতকরণের মাধ্যমে প্রকাশিত হয়।

**মন্তব্য** **1.** কোনো অসমতার সমস্ত সমাধান যে অঞ্চল জুড়ে থাকে তাকে সমাধান অঞ্চল বলে।
**2.** যে অর্ধসমতলটি অসমতাটি দ্বারা প্রকাশিত হয় তা নির্ণয়ের জন্য একটি বিন্দু $(a, b)$ [রেখাটির উপর নয়] নিয়ে অসমতাটি সিদ্ধ করে কি করে না শুধুমাত্র এইটুকু পরীক্ষা করাই যথেষ্ট। যদি বিন্দুটি অসমতাটিকে সিদ্ধ করে তবে অসমতাটি ওই বিন্দুটি যে অর্ধসমতলে অবস্থিত তাকে প্রকাশ করে এবং ওই অঞ্চলকে

ছায়াবৃত করবে। অন্যথায় বিন্দুটি যে অর্ধসমতলে নেই তাকে প্রকাশ করবে। সুবিধার জন্য (0, 0) বিন্দুটিকে পছন্দ করা হয়।

**3.** যদি অসমতাটি $ax + by \geq c$ বা $ax + by \leq c$, আকারের হয় তবে $ax + by = c$ রেখার উপরিস্থ বিন্দুগুলিও সমাধান অঞ্চলের অন্তর্গত হবে। সেক্ষেত্রে একটি গাঢ় রেখা অঙ্কন করে সমাধান অঞ্চলটিকে চিহ্নিত করবে।

**4.** যদি অসমতাটি $ax + by > c$ বা $ax + by < c$, আকারের হয় তবে $ax + by = c$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলো সমাধান অঞ্চলের অন্তর্গত হবে না, তাই একটি ডট যুক্ত (dotted line) রেখা দিয়ে সমাধান অঞ্চলটিকে চিহ্নিত করবে।

6.2 নং অনুচ্ছেদে যখন আমরা রেশমার খাতা ও কলমের সমস্যাটির রূপান্তর করেছিলাম তখন দুইচল $x$ ও $y$ এর নিম্নলিখিত রৈখিক অসমীকরণগুলো পেয়েছিলাম

$$40x + 20y \leq 120 \qquad \ldots (1)$$

যেহেতু বস্তুর সংখ্যা কখন ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হয় না তাই $x$ ও $y$ শুধুমাত্র সমগ্র সংখ্যা হবে একথা মনে রেখে, চলো আমরা এই অসমতাটিকে সমাধান করি। এক্ষেত্রে আমরা $x$ ও $y$ এর মানের এমন জোড় নির্ণয় করব যার জন্য (1) নং বিবৃতিটি সত্য হবে। প্রকৃতপক্ষে এ ধরনের জোড়গুলোই হবে (1) নং অসমতাটির ***সমাধান সেট।***

শুরু করার জন্য, ধরো $x = 0$. এখন (1) নং এর বামপক্ষ

$$= 40x + 20y = 40\,(0) + 20y = 20y.$$

অতএব, আমরা পাই $\quad 20y \leq 120$ বা, $y \leq 6 \qquad \ldots (2)$

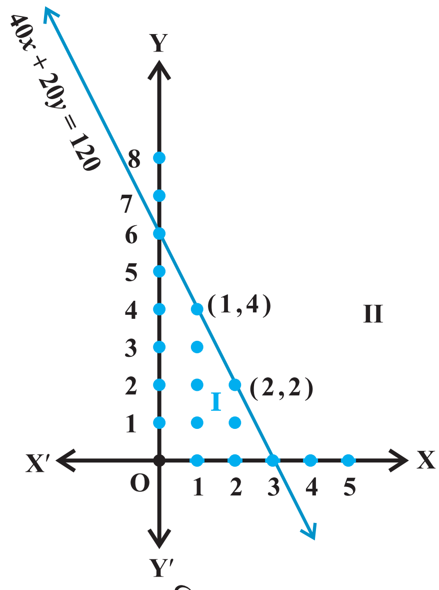
$\therefore x = 0$, এর জন $y$ এর অনুরূপ মানগুলো হতে পারে শুধুমাত্র 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. এক্ষেত্রে (1) নং এর সমাধানগুলো হবে (0, 0), (0, 1), (0,2), (0,3), (0,4), (0, 5) এবং (0, 6).

অনুরূপে $x = 1, 2$ এবং 3 এর জন্য (1) নং এবং অন্যান্য সমাধানগুলো হতে পারে, (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0) এই সমাধানগুলো 6.6 নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।

চলো আমরা এখন $x$ ও $y$ মানের সীমা অখণ্ড সংখ্যা থেকে বাস্তব সংখ্যা পর্যন্ত বিস্তৃত করি এবং এক্ষেত্রে (1) নং এর সমাধানগুলো কী হয় দেখো। তোমরা দেখবে এক্ষেত্রে লৈখিক নিয়ম খুব সুবিধাজনক। চলো আমরা

$40x + 20y = 120 \qquad \ldots (3)$ এই সমীকরণটি বিবেচনা করি এবং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

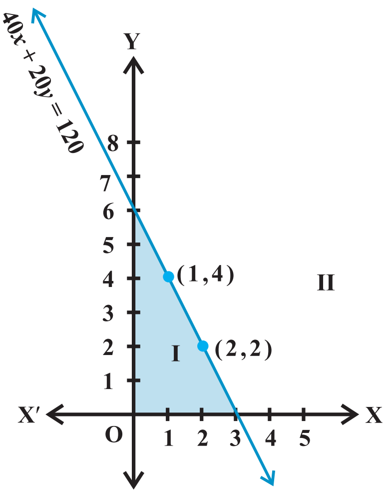
(1) নং অসমতাটির লেখচিত্র অঙ্কন করার জন্য আমরা I নং অর্ধসমতলের একটি বিন্দু (0, 0) ধরি এবং $x$ এবং $y$ এই মান (1) নং অসমতাকে সিদ্ধ করে কি না পরীক্ষা করি।



চিত্র 6.6

আমরা লক্ষ করি যে $x = 0$, $y = 0$ অসমতাটিকে সিদ্ধ করে। তাই আমরা বলি যে (I) নং অর্ধ সমতলটিই হল (1) নং অসমতার লেখচিত্র (চিত্র 6.7)। যেহেতু রেখার উপরিস্থ বিন্দুগুলোও (1) নং অসমতাকে সিদ্ধ করে, তাই রেখাটিও এই লেখচিত্রের একটি অংশ হবে।

তাই প্রদত্ত অসমতাটির লেখচিত্র হবে রেখাটি সহ (I) নং অর্ধসমতল। স্পষ্টতই, II নং অর্ধ সমতলটি এই লেখচিত্রের অংশ হবে না। অতএব (1) নং অসমতাটির সমাধান লেখচিত্রের সকল বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত (রেখা সহ (I) নং অর্ধ সমতল)।



চিত্র 6.7

আমরা এখন দুই চলবিশিষ্ট রৈখিক অসমতা সমাধান করার জন্য উপরে বর্ণিত পদ্ধতির ব্যাখ্যা কিছু উদাহরণের সাহায্যে করবো।

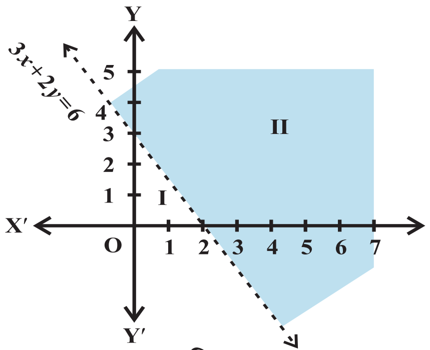
**উদাহরণ 9** লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো : $3x + 2y > 6$.

**সমাধান :** $3x + 2y = 6$ এর লেখটি 6.8 নং চিত্রে ডটেড্ রেখা দ্বারা দেখানো হয়েছে।

এই রেখাটি $x$-$y$ তলকে দুটি অর্ধসমতল I ও II এ বিভক্ত করে। আমরা একটি বিন্দু (0, 0) [রেখার উপরিস্থ নয়] নির্বাচন করি, যা যে কোন একটি অর্ধ সমতলে অবস্থান করে (চিত্র 6.8) এবং এই বিন্দুটি প্রদত্ত অসমতাকে সিদ্ধ করে কি না তা নির্ধারণ করি। আমরা লক্ষ করি যে

$3\ (0) + 2\ (0) > 6$

বা $\quad 0 > 6$, $\quad$ যা মিথ্যা



চিত্র 6.8

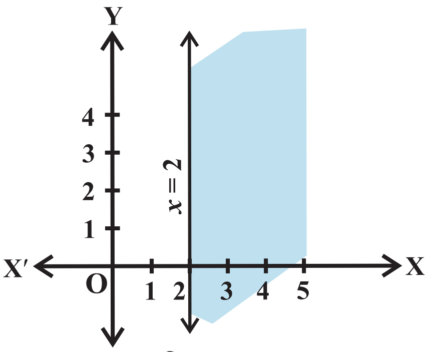
অতএব (1) নং অর্ধসমতল প্রদত্ত অসমতার সমাধান অঞ্চল নয়। স্পষ্টতই রেখার উপরিস্থ কোনো বিন্দুই প্রদত্ত যথার্থ অসমতাকে সিদ্ধ করে না। অন্যভাবে বললে রেখার উপরিস্থ বিন্দুগুলো ছাড়া, ছায়াবৃত II নং অর্ধসমতলই অসমতাটির সমাধান অঞ্চল।

**উদাহরণ 10** দ্বিমাত্রিকতলে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো $3x - 6 \geq 0$.

**সমাধান :** $3x - 6 = 0$ এর লেখচিত্র 6.9 নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।

আমরা একটি বিন্দু (0, 0) নির্বাচন করি এবং প্রদত্ত অসমতাতে প্রতিস্থাপন করে আমরা দেখি :

$3\ (0) - 6 \geq 0$ বা $-6 \geq 0$ যা মিথ্যা। তাই সমাধান অঞ্চলটি হল $x = 2$ রেখার ডান দিকের ছায়াবৃত অঞ্চল।



চিত্র 6.9

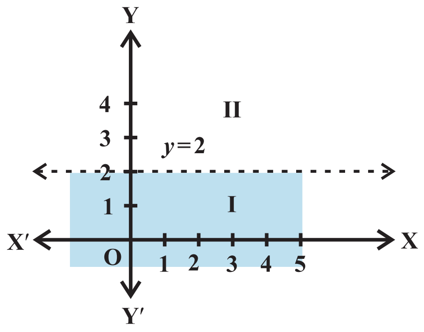
**উদাহরণ 11** $y < 2$ কে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো।

**সমাধান :** $y = 2$ এর লেখচিত্রটি 6.10 নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।

চলো আমরা (I) নং অর্ধসমতলের নীচের দিকে একটি বিন্দু (0, 0) নির্বাচন করি এবং প্রদত্ত অসমতাতে $y = 0$ বসিয়ে পাই

$1 \times 0 < 2$ বা $0 < 2$ যা সত্য।

তাই সমাধান অঞ্চলটি হল $y = 2$ রেখার নীচের দিকের ছায়াবৃত অঞ্চল। অতএব এই রেখার নিচের সমস্ত বিন্দু (রেখার উপরিস্থগুলো নয়) প্রদত্ত অসমতার সমাধান।




চিত্র 6.10

## অনুশীলনী 6.2

দ্বিমাত্রিক তলে নিম্নলিখিত অসমতাগুলোকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো :

1. $x + y < 5$
2. $2x + y \geq 6$
3. $3x + 4y \leq 12$
4. $y + 8 \geq 2x$
5. $x - y \leq 2$
6. $2x - 3y > 6$
7. $-3x + 2y \geq -6$
8. $3y - 5x < 30$
9. $y < -2$
10. $x > -3$.

## 6.5 দ্বিচল বিশিষ্ট রৈখিক অসমতা তন্ত্রের সমাধান (Solution of System of Linear Inequalities in Two Variables)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে, তোমরা শিখেছ কীভাবে একচল বা দ্বিচল বিশিষ্ট রৈখিক অসমতার লৈখিক সমাধান করতে হয়। আমরা এখন কিছু উদাহরণের সাহায্যে কীভাবে দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক অসমতা তন্ত্রের লৈখিক সমাধান করতে হয় তার পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব।

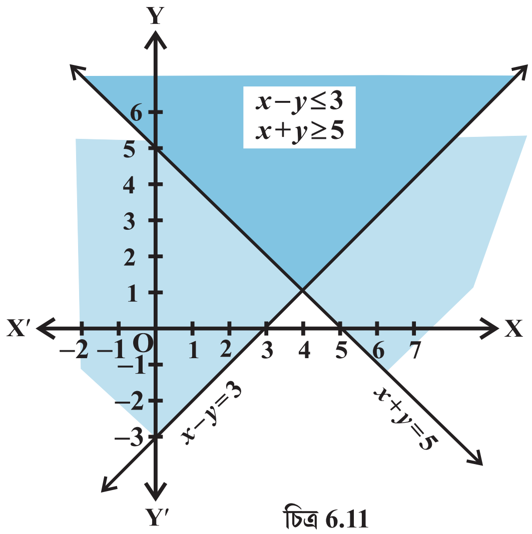
**উদাহরণ 12** নিম্নলিখিত রৈখিক অসমতাগুলোকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো।

$$x + y \geq 5 \qquad \ldots (1)$$

$$x - y \leq 3 \qquad \ldots (2)$$

**সমাধান :** $x + y = 5$ রৈখিক সমীকরণটির লেখচিত্র 6.11 নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।

আমরা লক্ষ করি (1) নং অসমতাটির সমাধান $x + y = 5$ রেখার উপরিস্থ বিন্দুগুলো সহ রেখাটির উপরের ছায়াবৃত অঞ্চল দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে।




চিত্র 6.11

একই অক্ষদ্বয়ের স্বাপেক্ষে $x - y = 3$ সমীকরণের লেখচিত্রটি 6.11 নং চিত্রে দেখানো হয়েছে। আমরা লক্ষ করি (2) নং অসমতাটির সমাধান

$x - y = 3$ রেখার উপরিস্থ বিন্দুগুলো সহ রেখাটির উপরের ছায়াবৃত অঞ্চল দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে।

স্পষ্টতই দুইটি ছায়াবৃত অঞ্চলের সাধারণ (common) ছায়াবৃত অঞ্চলটিই প্রদত্ত অসমতাদ্বয়ের সমাধান অঞ্চল।

**উদাহরণ 13** নিম্নলিখিত অসমতাগুলোর লৈখিক সমাধান করো।

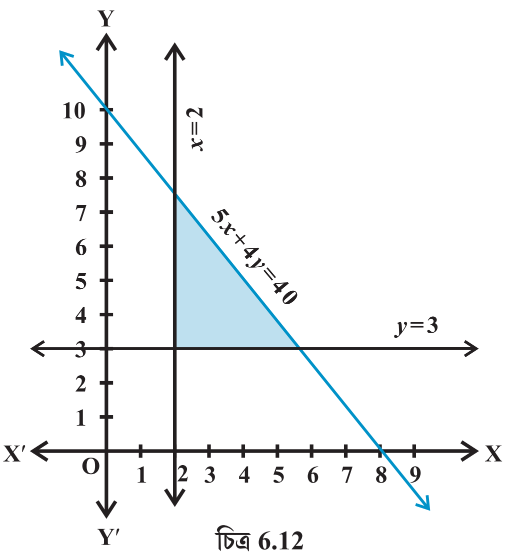
$5x + 4y \leq 40$ ... (1)

$x \geq 2$ ... (2)

$y \geq 3$ ... (3)

**সমাধান :** আমরা প্রথমে $5x + 4y = 40$, $x = 2$ এবং $y = 3$ রেখাত্রয়ের লেখ অঙ্কন করব।

আমরা লক্ষ্য করি (1) নং অসমতা $5x + 4y = 40$ রেখাটির নিচের ছায়াবৃত অঞ্চলটি প্রকাশ করে এবং (2) নং অসমতা $x = 2$ রেখাটির ডান দিকের ছায়াবৃত অঞ্চলটি প্রকাশ করে, কিন্তু (3) নং অসমতা $y = 3$. রেখাটির উপরের ছায়াবৃত অঞ্চলটি প্রকাশ করে। অতএব রেখাগুলোর উপরিস্থ বিন্দুগুলো সহ সাধারণ ছায়াবৃত অঞ্চলটি (চিত্র 6.12) প্রদত্ত অসমতাগুলোর সমাধান।



চিত্র 6.12

অনেক বাস্তব ক্ষেত্রে অসমতাগুলোতে অন্তর্ভুক্ত চল $x$ ও $y$ প্রায়ই পরিমাণ (quantities) নির্দেশ করে, যাদের ঋণাত্মক মান থাকতে পারে না, উদাহরণস্বরূপ উৎপাদিত এককের সংখ্যা, ক্রয় করা জিনিসের সংখ্যা, কাজের সময়ের পরিমাণ ইত্যাদি। স্পষ্টতই এ সমস্ত ক্ষেত্রে $x \geq 0$, $y \geq 0$ এবং সমাধান অঞ্চলটি শুধুমাত্র প্রথম পাদেই থাকবে।

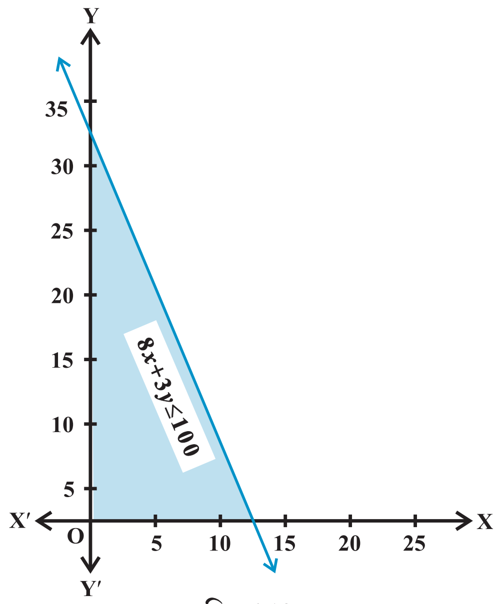
**উদাহরণ 14** নিম্নলিখিত অসমতাগুলোর সমাধান করো

$8x + 3y \leq 100$ ... (1)

$x \geq 0$ ... (2)

$y \geq 0$ ... (3)

**সমাধান :** আমরা $8x + 3y = 100$ রেখাটির লেখচিত্র অঙ্কন করব। $8x + 3y \leq 100$ এই অসমতাটি; $8x + 3y = 100$ এর উপরিস্থ বিন্দু সহ, রেখাটির নীচের চিহ্নিত অঞ্চলটিকে নির্দেশ করে (চিত্র 6.13).



চিত্র 6.13

যেহেতু $x \geq 0, y \geq 0$, তাই রেখা ও অক্ষদ্বয়ের উপরিস্থ বিন্দুগুলো সহ প্রথম পাদের ছায়াবৃত অঞ্চলটিই প্রদত্ত অসমতাগুলোর সমাধান।

**উদাহরণ 15** নিম্নলিখিত অসমতাগুলোকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো

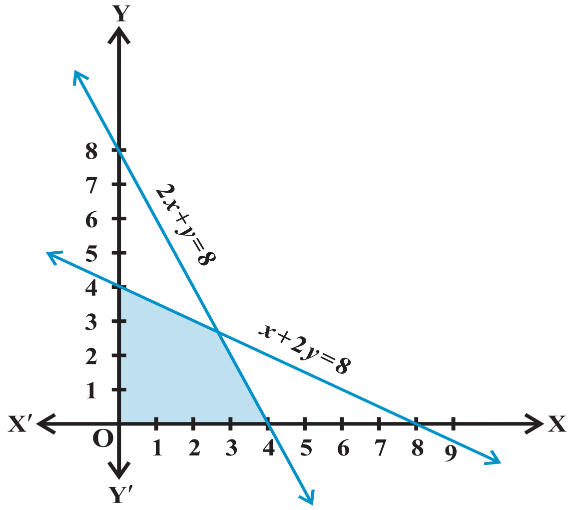
$x + 2y \leq 8$ ... (1)

$2x + y \leq 8$ ... (2)

$x > 0$ ... (3)

$y > 0$ ... (4)

**সমাধান :** আমরা $x + 2y = 8$ ও $2x + y = 8$ রেখাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করবো। অসমতা (1) ও (2) রেখাদ্বয়ের উপরিস্থ বিন্দুগুলো সহ রেখাদ্বয়ের নীচের অঞ্চলটিকে প্রকাশ করে।



চিত্র 6.14

যেহেতু $x \geq 0, y \geq 0$, তাই প্রথম পাদের চিহ্নিত অঞ্চলের প্রত্যেক বিন্দুই প্রদত্ত অসমতাগুলোর সমাধান (চিত্র 6.14)।

## অনুশীলনী 6.3

নিম্নলিখিত অসমতাগুলোর লৈখিক সমাধান করো :

1. $x \geq 3, y \geq 2$
2. $3x + 2y \leq 12, \ x \geq 1, y \geq 2$
3. $2x + y \geq 6, 3x + 4y \leq 12$
4. $x + y \geq 4, \ 2x - y < 0$
5. $2x - y > 1, x - 2y < -1$
6. $x + y \leq 6, \ x + y \geq 4$
7. $2x + y \geq 8, \ x + 2y \geq 10$
8. $x + y \leq 9, \ y > x, \ x \geq 0$
9. $5x + 4y \leq 20, \ x \geq 1, y \geq 2$
10. $3x + 4y \leq 60, x + 3y \leq 30, x \geq 0, \ y \geq 0$
11. $2x + y \geq 4, \ x + y \leq 3, \ 2x - 3y \leq 6$
12. $x - 2y \leq 3, 3x + 4y \geq 12, \ x \geq 0, y \geq 1$
13. $4x + 3y \leq 60, y \geq 2x, \ x \geq 3, \ x, y \geq 0$
14. $3x + 2y \leq 150, x + 4y \leq 80, \ x \leq 15, \ y \geq 0, x \geq 0$
15. $x + 2y \leq 10, x + y \geq 1, x - y \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$

## বিবিধ উদাহরণ

**উদাহরণ 16** সমাধান করো : $-8 \le 5x - 3 < 7$.

**সমাধান :** এক্ষেত্রে, দুটি অসমতা আছে, $-8 \le 5x - 3$ এবং $5x - 3 < 7$, আমরা তাদের একত্রে সমাধান করবো। $-8 \le 5x - 3 < 7$

বা $\quad -5 \le 5x < 10$

বা $\quad -1 \le x < 2$

**উদাহরণ 17** সমাধান করো : $-5 \le \dfrac{5-3x}{2} \le 8$.

**সমাধান :** আমরা পাই $-5 \le \dfrac{5-3x}{2} \le 8$

বা $\quad -10 \le 5 - 3x \le 16$

বা $\quad -15 \le -3x \le 11$

বা $\quad 5 \ge x \ge -\dfrac{11}{3}$

যাকে আমরা লিখতে পারি $\dfrac{-11}{3} \le x \le 5$

**উদাহরণ 18** অসমতাগুলো সমাধান করো :

$$3x - 7 < 5 + x \qquad \ldots (1)$$

$$11 - 5x \le 1 \qquad \ldots (2)$$

এবং সমাধানগুলোকে সংখ্যারেখায় উপস্থাপন করো।

**সমাধান :** (1) নং অসমতা থেকে আমরা পাই

$3x - 7 < 5 + x$

বা $\quad x < 6 \qquad \ldots (3)$

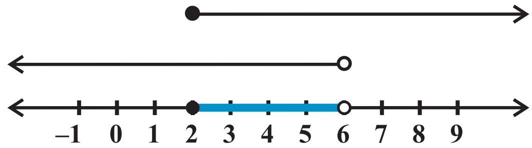
আবার (2) নং অসমতা থেকে পাই

$11 - 5x \le 1$

বা $\quad -5x \le -10$

অর্থাৎ, $\quad x \ge 2 \qquad \ldots (4)$

যদি আমরা সংখ্যা রেখায় (3) এবং (4) নং অসমতার লেখ অঙ্কন করি তবে $x$ এর সাধারণ মানগুলো দেখতে পাব, যাদেরকে 6.15 নং চিত্রে মোটা রেখার মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।




**চিত্র 6.15**

তাই অসমতাগুলোর সমাধান হল, 2 সহ 2 ও 6 এর মধ্যবর্তী সমস্ত বাস্তব সংখ্যা, অর্থাৎ, $2 \le x < 6$

**উদাহরণ 19** কোনো পরীক্ষায়, হাইড্রোক্লোরিক অ্যাসিডের দ্রবণকে 30°C থেকে 35°C তাপমাত্রার মধ্যে রাখতে হয়। যদি সেন্টিগ্রেড স্কেল থেকে ফারেনহাইট স্কেলে রূপান্তরীকরণের সূত্র $C = \frac{5}{9}(F-32)$ হয় তবে, ফারেনহাইট স্কেলে ওই তাপমাত্রার প্রসার কত হবে, যেখানে C ও F দিয়ে যথাক্রমে ডিগ্রি সেন্টিগ্রেড ও ডিগ্রি ফারেনহাইট তাপমাত্রা প্রকাশিত হয়।

**সমাধান :** এটি প্রদত্ত যে, $30 < C < 35$।

এখন $\quad C = \frac{5}{9}(F-32)$, বসিয়ে আমরা পাই

$$30 < \frac{5}{9}(F-32) < 35,$$

বা $\quad \frac{9}{5} \times (30) < (F-32) < \frac{9}{5} \times (35)$

বা $\quad 54 < (F-32) < 63$

বা $\quad 86 < F < 95$

অতএব, তাপমাত্রার নির্ণেয় প্রসার হল 86° F এবং 95° F এর মধ্যে।

**উদাহরণ 20** একজন প্রস্তুতকারকের কাছে 12% অ্যাসিড দ্রবণের 600 লিটার আছে। এই দ্রবণে কত লিটার 30% অ্যাসিড দ্রবণ মিশ্রিত করলে ওই মিশ্রিত দ্রবণে অ্যাসিডের পরিমাণ 15% থেকে বেশি, কিন্তু 18% থেকে কম হবে?

**সমাধান :** ধরো 30% অ্যাসিড দ্রবণটি $x$ লিটার মিশ্রিত করা দরকার। তবে মোট মিশ্রণের পরিমাণ হবে = $(x + 600)$ লিটার

সুতরাং $\quad x$ এর 30% + 600 এর 12% > $(x + 600)$ এর 15%

এবং $\quad x$ এর 30% + 600 এর 12% < $(x + 600)$ এর 18%

বা $\quad \frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) > \frac{15}{100}(x+600)$

এবং $\quad \frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) < \frac{18}{100}(x+600)$

বা $\quad 30x + 7200 > 15x + 9000$

এবং $\quad 30x + 7200 < 18x + 10800$

বা $\quad 15x > 1800$ এবং $12x < 3600$

বা $\quad x > 120$ এবং $x < 300$,

অর্থাৎ $\quad 120 < x < 300$

অতএব, 30% অ্যাসিড দ্রবণের পরিমাণ 120 লিটার থেকে বেশি কিন্তু 300 লিটার থেকে কম হবে।

## *ষষ্ঠ অধ্যায়ের বিবিধ অনুশীলনী*

1 থেকে 6 নং অসমতাগুলো সমাধান করো :

**1.** $2 \le 3x - 4 \le 5$

**2.** $6 \le -3(2x - 4) < 12$

**3.** $-3 \le 4 - \frac{7x}{2} \le 18$

**4.** $-15 < \frac{3(x-2)}{5} \le 0$

**5.** $-12 < 4 - \frac{3x}{-5} \le 2$

**6.** $7 \le \frac{(3x+11)}{2} \le 11$.

7 নং থেকে 10 নং পর্যন্ত অসমতাগুলোর সমাধান করে সংখ্যা রেখার উপর লৈখিক উপস্থাপন করো।

**7.** $5x + 1 > -24, \quad 5x - 1 < 24$

**8.** $2(x - 1) < x + 5, \quad 3(x + 2) > 2 - x$

**9.** $3x - 7 > 2(x - 6), \quad 6 - x > 11 - 2x$

**10.** $5(2x - 7) - 3(2x + 3) \le 0, \quad 2x + 19 \le 6x + 47$.

**11.** একটি দ্রবণকে 68° F ও 77° F. তাপমাত্রার মধ্যে রাখতে হয়। যদি সেলসিয়াস (C) ফারেনহাইট (F) রূপান্তরীকরণের সূত্র $F = \frac{9}{5}C + 32$ হয়, তবে ডিগ্রি সেলসিয়াসে (C) তাপমাত্রার প্রসার কী হবে?

**12.** একটি 8% বোরিক অ্যাসিডের দ্রবণকে লঘু করার জন্য তার সাথে 2% বোরিক অ্যাসিডের দ্রবণ মেশানো হলো। মিশ্রিত দ্রবণে বোরিক অ্যাসিডের পরিমাণ 4% এর বেশি কিন্তু 6% এর কম হতে হবে। যদি আমাদের কাছে 640 লিটার 8% দ্রবণ থাকে, তবে তার মধ্যে কত লিটার 2% দ্রবণ মেশাতে হবে?

**13.** 1125 লিটার 45% অ্যাসিড দ্রবণের সাথে কত লিটার জল মেশালে মিশ্রিত দ্রবণে 25% এর বেশি কিন্তু 30% এর কম অ্যাসিড থাকবে?

**14.** কোনো ব্যক্তির IQ (বুদ্ধ্যঙ্ক) নির্ণয়ের সূত্রটি প্রদত্ত

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100,$$

যেখানে MA হল মানসিক বয়স (mental age) এবং CA হলো সময়গত (chronological age) বয়স। যদি একদল 12 বছরের শিশুর ক্ষেত্রে $80 \le IQ \le 140$ হয়, তবে তাদের মানসিক বয়সের প্রসার নির্ণয় করো।

## সারসংক্ষেপ

- দুটি বাস্তব সংখ্যা বা দুটি বীজগাণিতিক রাশিমালা $<$, $>$, $\leq$ বা $\geq$ প্রতীকের সাহায্যে যুক্ত হয়ে অসমতা গঠন করে।
- কোনো অসমতার উভয় পক্ষে সমান সমান সংখ্যা যোগ (বা বিয়োগ) করা যায়।
- কোনো অসমতার উভয় পক্ষকে একই ধনাত্মক সংখ্যা দিয়ে গুণ (বা ভাগ) করা যায়। কিন্তু উভয় পক্ষকে যদি কোনো ঋণাত্মক সংখ্যা দিয়ে গুণ (বা ভাগ) করা হয়, তখন অসমতার চিহ্ন পরিবর্তিত হয়।
- $x$ এর যে মানগুলো, কোনো অসমতাকে সত্য বিবৃতিতে পরিবর্তিত করে তাদেরকে অসমতাটির সমাধান বলে।
- $x < a$ (বা $x > a$) কে সংখ্যা রেখার উপস্থাপন করার জন্য '$a$' সংখ্যাটির উপর একটি বৃত্ত অঙ্কন করো এবং '$a$' সংখ্যাটির বাঁ (বা ডান) দিকে একটি গাঢ় রেখা অঙ্কন করো।
- $x \leq a$ (বা $x \geq a$) কে সংখ্যা রেখার উপর উপস্থাপন করার জন্য '$a$' সংখ্যাটির উপর একটি গাঢ় বৃত্ত অঙ্কন করো এবং '$a$' সংখ্যাটির বাঁ (বা ডান) দিকে একটি গাঢ় রেখা অঙ্কন করো।
- যদি কোনো অসমতাতে $\leq$ বা $\geq$ চিহ্ন থাকে তবে অসমতার সমাধানে, রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলোও অন্তর্ভুক্ত হবে এবং সমতার গাঢ় রেখা দিয়ে চিহ্নিত রেখাটির বাম (নিচে) বা ডান (উপরে) পাশের যে অঞ্চলের একটি যথেচ্ছ বিন্দু অসমতাটিকে সিদ্ধ করে তাই হবে অসমতার লেখ।
- যদি কোনো অসমতাতে $<$ বা $>$ চিহ্ন থাকে তবে অসমতার সমাধানে, রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলো অন্তর্ভুক্ত হবে না এবং সমতার ডটযুক্ত রেখা দিয়ে চিহ্নিত রেখাটির বাম (নিচে) বা ডান (উপরে) পাশের যে অঞ্চলের একটি যথেচ্ছ বিন্দু অসমতাটিকে সিদ্ধ করে, তাই হবে অসমতার লেখ।
- কোনো অসমতাতন্ত্রের সমাধান অঞ্চল এমন একটি অঞ্চল যা প্রদত্ত অসমতাগুলোর প্রত্যেককে একসাথে সিদ্ধ করে।

অধ্যায় 7

# বিন্যাস ও সমবায় (Permutations and Combinations)

❖*Every body of discovery is mathematical in form because there is no other guidance we can have – DARWIN*❖

## 7.1 ভূমিকা

জ্যাকব বার্নৌলী
(1654-1705)

ধরো, তোমার কাছে নম্বর লক্ যুক্ত একটি সুটকেস আছে। নম্বর লক্টিতে 0 থেকে 9 এই 10 অঙ্কের লেবেলযুক্ত চারটি চাকা আছে। যদি 4টি নির্দিষ্ট অঙ্ককে পুনরাবৃত্তি ছাড়া একটি নির্দিষ্ট ক্রমে বিন্যস্ত করা যায়, তবেই এই লক্টিকে খোলা যায়। যে কোনোভাবে তুমি অঙ্কগুলোর এই নির্দিষ্ট অণুক্রমকে ভুলে গেছ। তোমার শুধু প্রথম অঙ্কটি যে 7 সেটাই মনে আছে। লক্টিকে খুলতে হলে, তিন অঙ্কের কতগুলো অনুক্রমকে তোমার পরীক্ষা করতে হবে? এই প্রশ্নের উত্তরের জন্য, তোমরা হয়তো বাকি 9টি অঙ্ক হতে একযোগে 3টি অঙ্ক নিয়ে সম্ভাব্য যত প্রকারে সাজানো যায় তার একটি তালিকা প্রস্তুত করবে। কিন্তু এই পদ্ধতি ক্লান্তিকর হবে, কারণ, সম্ভাব্য অনুক্রম বড়ো হতে পারে। এই অধ্যায়ে আমরা গণনার এমন কিছু মৌলিক কৌশল শিখব, যার ফলে 3 অঙ্কের ক্রমের যথাযথ তালিকা প্রস্তুত না করেই এর উত্তর দিতে পারব। প্রকৃতপক্ষে, বিভিন্ন বস্তুর সজ্জা এবং নির্বাচন সংখ্যা, তাদের যথাযথ তালিকা তৈরি না করে নির্ণয়ের জন্য এই কৌশলগুলো খুবই উপযোগী হবে। প্রথম ধাপে আমরা এমন একটি নীতি পরীক্ষা করব যা এই কৌশলগুলোর শিখনের মূল ভিত্তি।

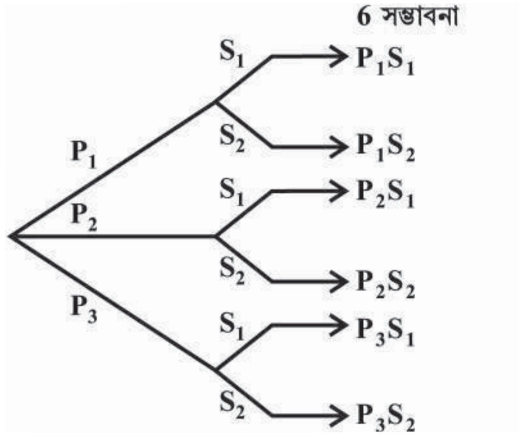
## 7.2 গণনার মৌলিক নীতি (Fundamental Principle of Counting)

চলো আমরা নিম্নলিখিত সমস্যাটি বিবেচনা করি। মোহনের 3টি প্যান্ট ও 2টি শার্ট আছে। কত প্রকারে সে প্যান্ট ও শার্টের বিভিন্ন জোড়া পড়তে পারে? যেহেতু 3টি প্যান্ট আছে তাই 3 উপায়ে 1টি প্যান্ট পছন্দ করা যায়। অনুরূপে একটি শার্ট 2 উপায়ে পছন্দ করা যায়। একটি প্যান্টের প্রত্যেক প্রকারের পছন্দের জন্য একটি শার্টকে 2 প্রকারে পছন্দ করা যায়। সুতরাং একটি প্যান্ট ও একটি শার্টের মোট পছন্দের সংখ্যা $3 \times 2 = 6$ জোড়া।

চলো আমরা তিনটি প্যান্টের নাম দেব $P_1, P_2, P_3$ এবং দুটি শার্টকে নাম দেব $S_1$ ও $S_2$। তবে ছয়টি সম্ভাব্য ঘটনাকে 7.1 নং চিত্রের মাধ্যমে বর্ণনা করা যায়।

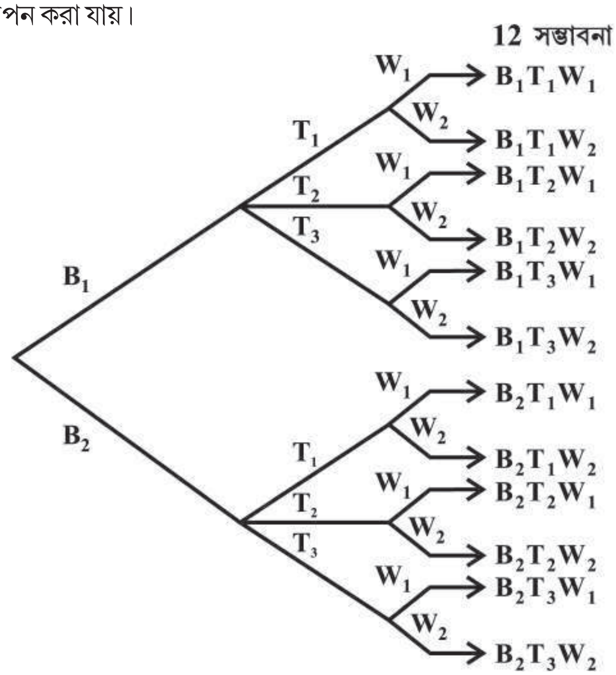
চলো আমরা একই ধরনের অন্য একটি সমস্যা বিবেচনা করি।

শব্‌নমের 2টি স্কুল ব্যাগ, 3টি টিফিনের বাক্স এবং 2টি জলের বোতল আছে। সে কত প্রকারে জিনিসগুলোকে বহন করতে পারে (প্রত্যেক প্রকারের একটি করে)।




চিত্র 7.1

একটি স্কুল ব্যাগ 2টি বিভিন্ন উপায়ে পছন্দ করা যায়। একটি স্কুল ব্যাগের পছন্দের পর একটি টিফিন বাক্সকে 3টি বিভিন্ন উপায়ে পছন্দ করা যায়। অতএব এক জোড়া স্কুল ব্যাগ ও টিফিন বাক্স মোট $2 \times 3 = 6$ প্রকারে পছন্দ করা যায়। এই জোড়াগুলোর প্রতিটির জন্য একটি জলের বোতল 2টি বিভিন্ন প্রকারে পছন্দ করা যায়। সুতরাং শব্‌নম মোট $6 \times 2 = 12$টি বিভিন্ন প্রকারে এই জিনিসগুলোকে স্কুলে বহন করে নিয়ে যেতে পারে। যদি দুটি স্কুল ব্যাগের নাম $B_1$, $B_2$, তিনটি টিফিন বাক্সের নাম $T_1$, $T_2$, $T_3$ এবং দুটি জলের বোতলের নাম $W_1$, $W_2$ হয়, তবে এই সম্ভাবনাগুলোকে 7.2 নং চিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা যায়।




চিত্র 7.2

প্রকৃতপক্ষে উপরের এই ধরনের সমস্যাগুলো নিম্নলিখিত নীতি যা *"গণনার মৌলিক নীতি"* বা *"গুণন নীতি"* নামে পরিচিত, প্রয়োগ করে সমাধান করা হয়। নীতিটি হল,

*"যদি একটি ঘটনা $m$ সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে ঘটে এবং তাকে অনুসরণ করে অন্য একটি ঘটনা $n$ সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে ঘটে, তবে ঘটনা দ্বয়ের প্রদত্ত ক্রমে ঘটার মোট সংখ্যা $m \times n$"*।

উপরের নীতিটি যে কোনো সসীম সংখ্যক ঘটনার ক্ষেত্রে সাধারণীকরণ করা যায়। উদাহরণ স্বরূপ তিনটি ঘটনার জন্য নীতিটি নিম্নরূপ :

"যদি একটি ঘটনা $m$ সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে ঘটে এবং তাকে অনুসরণ করে অন্য একটি ঘটনা $n$ সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে ঘটে এবং তাকে অনুসরণ করে তৃতীয় একটি ঘটনা যদি $p$ সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে ঘটে তবে প্রদত্ত ক্রমে ঘটনাগুলো ঘটার মোট সংখ্যা হল $m \times n \times p$"।

প্রথম সমস্যাটিতে, একটি প্যান্ট ও একটি শার্ট যত প্রকারে পরিধান করা যায় তার সংখ্যা হল, যত প্রকারে নিম্নলিখিত ঘটনাগুলো পর পর ঘটতে পারে :

(i) একটি প্যান্ট পছন্দ করার ঘটনা, (ii) একটি শার্ট পছন্দ করার ঘটনা।

দ্বিতীয় সমস্যাটিতে নির্ণেয় সংখ্যা হল, যত প্রকারে নিম্নলিখিত ঘটনাগুলো পরপর ঘটতে পারে :

(i) একটি স্কুল ব্যাগ পছন্দ করার ঘটনা

(ii) একটি টিফিন বক্স পছন্দ করার ঘটনা

(iii) একটি জলের বোতল পছন্দ করার ঘটনা।

এখানে, প্রত্যেক ক্ষেত্রে ঘটনাগুলো বিভিন্ন সম্ভাব্য ক্রমে ঘটতে পারে। কিন্তু আমাদের যে কোনো একটি সম্ভাব্য ক্রম বিবেচনা করতে হবে এবং ঘটনা সমূহের এই পছন্দমত ক্রমে ঘটার বিভিন্ন উপায়ের সংখ্যা গণনা করতে হবে।

**উদাহরণ 1** ROSE শব্দের অক্ষরগুলোকে দিয়ে অর্থযুক্ত বা অর্থহীন, চার অক্ষর বিশিষ্ট শব্দের সংখ্যা নির্ণয় করো, যেখানে অক্ষরগুলোর পুনরাবৃত্তি করা যাবে না।

**সমাধান :** পুনরাবৃত্তি করা যাবে না এই কথা মনে রেখে যত প্রকারে 4টি শূন্যস্থান $\boxed{\phantom{X}}\ \boxed{\phantom{X}}\ \boxed{\phantom{X}}\ \boxed{\phantom{X}}$ 4টি অক্ষর দিয়ে পূর্ণ করা যায়, তাই হবে শব্দের সংখ্যা। প্রথম স্থানটি R,O,S,E এই 4টি অক্ষরের যে কোনো একটি দিয়ে 4টি বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায়। তাকে অনুসরণ করে দ্বিতীয় স্থানটি বাকি তিনটি অক্ষরের যে কোনো একটি দিয়ে 3 প্রকারে পূর্ণ করা যায়, তাকে অনুসরণ করে তৃতীয় স্থানটি দুটি ভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায়, তাকে অনুসরণ করে চতুর্থ স্থানটি 1 প্রকারে পূর্ণ করা যায়। তবে, গুণন নীতি দ্বারা 4টি স্থান যত প্রকারে পূর্ণ করা যায় তার সংখ্যা $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

অতএব নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 24$

☛ দ্রষ্টব্য যদি অক্ষরগুলোর পুনরাবৃত্তি করা যায়, তবে কয়টি শব্দ গঠন করা যেতো? প্রত্যেকেই খুব সহজেই বুঝতে পারবে যে, 4টি শূন্যস্থানের প্রত্যেকটিকে পরপর 4টি ভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়। অতএব নির্ণেয় শব্দ সংখ্যা $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$.

**উদাহরণ 2** 4টি বিভিন্ন রং এর পতাকা আছে। একটির নীচে আরেকটি এভাবে 2টি পতাকা ব্যবহার করে কত ধরনের বিভিন্ন সংকেত তৈরি করা যায়?

**সমাধান :** যত প্রকারে 2টি শূন্যস্থান 4টি বিভিন্ন রং এর পতাকা দিয়ে পরপর পূর্ণ করা যায়, তাই হবে সংকেত সংখ্যা। উপরের শূন্য স্থানটি 4টি বিভিন্ন পতাকা থেকে যে কোনো একটি দিয়ে 4টি ভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়, যাকে অনুসরণ করে নিচের শূন্যস্থানটি বাকি তিনটি পতাকা থেকে যে কোনো একটি পতাকা দিয়ে 3টি ভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়। অতএব গুণনের নীতি অনুযায়ী, নির্ণেয় সংকেতের সংখ্যা $= 4 \times 3 = 12$.

**উদাহরণ 3** একই অঙ্ক একাধিক বার ব্যবহার করে 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলোর সাহায্যে 2 অঙ্কের কয়টি যুগ্ম সংখ্যা গঠন করা যায়?

**সমাধান :** যত প্রকারে 2টি শূন্যস্থান 5টি অঙ্ক দিয়ে পরপর পূর্ণ করা যায়, তাই হবে দুই অঙ্ক বিশিষ্ট যুগ্ম সংখ্যার সংখ্যা। এক্ষেত্রে আমরা এককের স্থান থেকে পূর্ণ করা শুরু করব, কারণ এই স্থানটি শুধুমাত্র 2 ও 4 দ্বারা 2 প্রকারে পূর্ণ করা যায়; যাকে অনুসরণ করে দশকের স্থানটি, যেহেতু একই অঙ্ক একাধিক বার ব্যবহার করা যায় তাই, 5টি অঙ্ক দ্বারা 5টি বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায়। সুতরাং গুণন নীতি অনুযায়ী নির্ণেয় দুই অঙ্কের যুগ্ম সংখ্যার সংখ্যা $= 2 \times 5$ অর্থাৎ 10।

**উদাহরণ 4** যদি 5টি বিভিন্ন পতাকা থাকে, তবে অন্তত দুটি বিভিন্ন পতাকা একটি ক্রমে (একটি অপরটির নিচে) একটি দণ্ডের উপর বিন্যস্ত করে কত প্রকার সংকেত তৈরি করা যায় তা নির্ণয় করো।

**সমাধান :** একটি সংকেতে 2টি, 3টি, 4টি বা 5টি পতাকা থাকতে পারে। চলো আমরা এখন 2টি, 3টি, 4টি এবং 5টি পতাকা দিয়ে গঠিত সম্ভাব্য সংকেতের সংখ্যা আলাদাভাবে গণনা করি এবং সংখ্যাগুলো যথাক্রমে যোগ করি।

2টি পতাকা দ্বারা উৎপন্ন সংকেতের সংখ্যা হবে 5টি পতাকা দিয়ে 2টি স্থান পরপর যত প্রকারে পূর্ণ করা যায় তার সমান। গুণন নীতি অনুসারে এই সংখ্যা $5 \times 4 = 20$।

অনুরূপে, 3টি পতাকা দিয়ে উৎপন্ন সংকেতের সংখ্যা হবে 5টি পতাকা দিয়ে 3টি স্থান পর পর যত প্রকারে পূর্ণ করা যায় তার সমান।

সংকেত সংখ্যা $5 \times 4 \times 3 = 60$।

এভাবে অগ্রসর হয়ে আমরা পাই যে

4টি পতাকা দিয়ে তৈরি সংকেত সংখ্যা $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

5টি পতাকা দিয়ে তৈরি সংকেত সংখ্যা $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

সুতরাং নির্ণেয় সংকেতের সংখ্যা$= 20 + 60 + 120 + 120 = 320$।

## অনুশীলনী 7.1

**1.** 1, 2, 3, 4 এবং 5 এই অঙ্কগুলো দিয়ে 3 অঙ্কবিশিষ্ট কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাবে, যখন—

(i) অঙ্কগুলোর পুনরাবৃত্তি করা যায়

(ii) অঙ্কগুলোর পুনরাবৃত্তি করা যায় না

**2.** যদি একই অঙ্ক একাধিকবার ব্যবহার করা যায় তবে 1, 2, 3, 4, 5, 6 ব্যবহার করে তিন অঙ্কের কয়টি যুগ্ম সংখ্যা গঠন করা যায়?

**3.** কোনো অক্ষরের পুনরাবৃত্তি না করে, ইংরেজি বর্ণমালার প্রথম 10টি অক্ষর ব্যবহার করে 4 অক্ষরের কয়টি সংকেত (code) গঠন করা যায়?

**4.** একটি অঙ্ক একাধিকবার ব্যবহার না করে, 0 থেকে 9 পর্যন্ত অঙ্কগুলো দিয়ে 5 অঙ্কের কয়টি টেলিফোন নম্বর গঠন করা যায়, যদি প্রত্যেক টেলিফোন নম্বর 67 দিয়ে শুরু হয়?

**5.** একটি মুদ্রা 3 বার নিক্ষেপ করা হল এবং তার ফলাফল লিপিবদ্ধ করা হল। সম্ভাব্য ফলাফলের সংখ্যা কত হবে?

**6.** পাঁচটি বিভিন্ন রং এর পতাকা আছে। দুটি পতাকা, একটি অপরটির নীচে ব্যবহার করে কয়টি ভিন্ন ভিন্ন সংকেত তৈরি করা যায়?

## 7.3 বিন্যাস (Permutations)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের 1নং উদাহরণে আমরা প্রকৃতপক্ষে অক্ষরের বিভিন্ন সম্ভাব্য সজ্জা যেমন ROSE, REOS, ...। ইত্যাদির সংখ্যা গণনা করেছিলাম। এখানে, এই তালিকায় প্রত্যেকটি সজ্জা অন্যটি থেকে আলাদা। অন্যভাবে বলতে গেলে, অক্ষরগুলোর লেখার ক্রম খুবই গুরুত্বপূর্ণ। প্রত্যেক সজ্জাকে বলা হয় *4টি বিভিন্ন অক্ষরের প্রত্যেককে একযোগে নিয়ে বিন্যাস (permutation)*। এখন যদি আমাদের NUMBER শব্দের অক্ষরগুলো থেকে, অক্ষরগুলোর পুনরাবৃত্তির অনুমোদন ছাড়া, অর্থযুক্ত বা অর্থহীন 3 অক্ষর বিশিষ্ট শব্দের সংখ্যা নির্ণয় করতে হয়, তবে আমাদের NUM, NMU, MUN, NUB, ..., ইত্যাদি সজ্জার গণনা করতে হবে। এখানে আমরা 6টি ভিন্ন অক্ষর থেকে 3টি অক্ষরের একত্রে বিন্যাস গণনা করি। এক্ষেত্রে নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $6 \times 5 \times 4 = 120$ (গুণন নীতি ব্যবহার করে)।

যদি অক্ষরগুলোর পুনরাবৃত্তি অনুমোদিত হয়, তবে নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $6 \times 6 \times 6 = 216$

**সংজ্ঞা 1** বিন্যাস হল, কিছু সংখ্যক বস্তু থেকে কয়েকটি বা সবগুলোকে নিয়ে নির্দিষ্ট ক্রমে সজ্জা।

নিম্নলিখিত উপ-অনুচ্ছেদে আমরা এই প্রশ্নগুলোর তাৎক্ষণিক উত্তর দেওয়ার জন্য সূত্র নির্ণয় করব।

### 7.3.1 বিভিন্ন বস্তুর সবগুলোকে নিয়ে বিন্যাস *(Permutations when all the objects are distinct)*

**উপপাদ্য 1** কোনো বস্তুর পুনরাবৃত্তি না করে $n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে $r$ সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা হল $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)$, যা ${}^nP_r$ দিয়ে সূচিত করা হয়, যেখানে $0 < r \leq n$ ।

**প্রমাণ** $r$ সংখ্যক শূন্যস্থানকে $\boxed{\phantom{x}}\ \boxed{\phantom{x}}\ \boxed{\phantom{x}} \ldots \boxed{\phantom{x}}$ $n$ সংখ্যক বস্তু

$\leftarrow$ $r$ শূন্যস্থান $\rightarrow$

দিয়ে যত প্রকারে পূর্ণ করা যায় তাই হবে এর বিন্যাস সংখ্যা। প্রথম স্থানটি পূর্ণ করা যায় $n$ প্রকারে, যাকে অনুসরণ করে দ্বিতীয় স্থানটি পূর্ণ করা যায় $(n-1)$ প্রকারে, একে অনুসরণ করে তৃতীয় স্থানটি পূর্ণ করা যায় $(n-2)$ প্রকারে.......... এরূপে $r$ তম স্থানটি পূর্ণ করা যায় $(n-(r-1))$ প্রকারে। সুতরাং $r$ সংখ্যক শূন্যস্থানকে পরপর পূর্ণ করা যায় $n(n-1)\,(n-2)\ldots\,(n-(r-1))$ বা $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)$ প্রকারে।

${}^nP_r$ এর জন্য এই রাশিমালাটি কষ্টকর এবং আমাদের একটি প্রতীকের দরকার, যা আমাদের এই রাশিমালাটির আকার ছোটো করতে সাহায্য করবে। $n!$ প্রতীকটি (পড়া হয় ফ্যাক্টোরিয়েল $n$ বা $n$ ফ্যাক্টোরিয়াল) আমাদের সাহায্য করবে। নীচের পাঠে $n!$ প্রকৃতপক্ষে কী বোঝায় তা আমরা শিখব।

**7.3.2 ফ্যাক্টোরিয়েল প্রতীক *(Factorial notation)*** $n!$ প্রতীকটি প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল প্রকাশ করে, অর্থাৎ $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$ কে $n!$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আমরা এই প্রতীকটিকে পড়ি '$n$ ফ্যাক্টোরিয়েল'। অতএব $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n-1) \times n = n\,!$

$$1 = 1\,!$$

$$1 \times 2 = 2\,!$$

$$1 \times 2 \times 3 = 3\,!$$

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4\,!$ এবং ক্রমশ চলবে।

আমরা সংজ্ঞায়িত করি $0\,! = 1$

আমরা লিখতে পারি $5\,! = 5 \times 4\,! = 5 \times 4 \times 3\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2\,!$

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1!$$

স্পষ্টতই একটি স্বাভাবিক সংখ্যা $n$ এর জন্য

$$n\,! = n\,(n-1)\,!$$

$= n\,(n-1)\,(n-2)\,!$ (যখন $n \geq 2$)

$= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,!$ (যখন $n \geq 3$)

এবং ক্রমশ চলবে।

**উদাহরণ 5** মান নির্ণয় করো : (i) 5 ! (ii) 7 ! (iii) 7 ! – 5!

**সমাধান :** (i) $5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

(ii) $7\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

(iii) $7\,! - 5! = 5040 - 120 = 4920$

**উদাহরণ 6** গণনা করো : (i) $\frac{7!}{5!}$ (ii) $\frac{12!}{(10!)\,(2!)}$

**সমাধান :** (i) আমরা পাই $\frac{7!}{5!} = \frac{7\times6\times5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

(ii) $\frac{12!}{(10!)\,(2!)} = \frac{12\times11\times(10!)}{(10!)\times(2)} = 6 \times 11 = 66$

**উদাহরণ 7** মান নির্ণয় করো : $\frac{n!}{r!(n-r)!}$, যখন $n = 5, r = 2$

**সমাধান :** আমাদের নির্ণয় করতে হবে $\frac{5!}{2!(5-2)!}$ (যেহেতু $n = 5, r = 2$)

আমরা পাই, $\frac{5!}{2\,!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\times3!} = \frac{5\times4}{2} = 10$

**উদাহরণ 8** যদি $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{x}{10!}$ হয়, তবে $x$ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা পাই $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9\times8!} = \frac{x}{10\times9\times8!}$

সুতরাং, $1+\frac{1}{9} = \frac{x}{10\times9}$ বা, $\frac{10}{9} = \frac{x}{10\times9}$

সুতরাং, $x = 100$

## অনুশীলনী 7.2

**1.** মান নির্ণয় করো :

(i) 8 ! (ii) 4 ! – 3 !

**2.** 3 ! + 4 ! = 7 ! হবে কি?

**3.** গণনা করো : $\dfrac{8!}{6!\times 2!}$

**4.** যদি $\dfrac{1}{6!}+\dfrac{1}{7!}=\dfrac{x}{8!}$ হয়, তবে $x$ নির্ণয় করো।

**5.** মান নির্ণয় করো : $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ যখন,

(i) $n=6, r=2$ (ii) $n=9, r=5$

### 7.3.3 $^nP_r$ সূত্র নির্ণয় (*Derivation of the formula for $^nP_r$*)

$$^n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!},\ 0\le r\le n$$

এখন চলো আমরা ফিরে যাই ঐ পরিস্থিতিতে যেখানে আমরা নিম্নলিখিত সূত্রটি নির্ণয় করেছিলাম :

$$^n\mathrm{P}_r = n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,\,(n-r+1)$$

এর হর ও লবকে $(n-r)\,(n-r-1)\,.\,.\,.\,3\times 2\times 1$, দ্বারা গুণ করে পাই

$$^n\mathrm{P}_r=\frac{n(n-1)\,(n-2)...(n-r+1)(n-r)(n-r-1)...3\times 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)...3\times 2\times 1}=\frac{n!}{(n-r)!},$$

এইভাবে $\quad ^n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$, যেখানে $0<r\le n$

$^n\mathrm{P}_r$ এর এই সূত্রটি আগেরটির চেয়ে অনেক বেশি সুবিধাজনক।

অনুরূপে, যখন $r=n,\ {}^n\mathrm{P}_n=\dfrac{n!}{0!}=n!$

বিন্যাস গণনা হল শুধুমাত্র কিছু বা সমস্ত বস্তুকে একত্রে যত প্রকারে পুনঃসজ্জিত করা যায় তার সংখ্যা নির্ণয়। কোনো বস্তুকে না নিয়ে সজ্জা আর সমস্ত বস্তুকে ফেলে রাখা একই ব্যাপার এবং এটি করার কেবলমাত্র একটি উপায়ই আছে। তাই আমরা পেতে পারি

$$^n\mathrm{P}_0=1=\frac{n!}{n!}=\frac{n!}{(n-0)!} \qquad ...\ (1)$$

সুতরাং (1) নং সূত্রটি $r=0$ এর জন্য প্রযোজ্য।

তাই $\quad ^n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!},\ 0\le r\le n$

**উপপাদ্য 2** $n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে $r$ সংখ্যক বস্তুকে বারবার নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা হবে $n^r$।

প্রমাণটি 1 নং উপপাদ্যের একদম অনুরূপ এবং তাই এটি পাঠকদের প্রমাণ করার জন্য রাখা হল।

এখন আমরা $^nP_r$ সূত্রটির ব্যবহার ও তার উপযোগিতা ব্যাখ্যা করার জন্য পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের কিছু সমস্যার সমাধান করব।

1 নং উদাহরণে, নির্ণেয় শব্দ সংখ্যা = $^4P_4 = 4! = 24$, এখানে পুনরাবৃত্তি না করে বিন্যাস। যদি পুনরাবৃত্তি করা হয়, তবে নির্ণেয় শব্দ সংখ্যা হবে $4^4 = 256$।

NUMBER শব্দের অক্ষরগুলো থেকে 3টি অক্ষর নিয়ে গঠিত শব্দের সংখ্যা

$= {}^6P_3 = \dfrac{6!}{3!} = 4 \times 5 \times 6 = 120$, এখানেও বিন্যাস পুনরাবৃত্তি না করে। যদি পুণরাবৃত্তি করা হয়, তবে নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা হবে $6^3 = 216$.

এক ব্যক্তি একের অধিক পদ দখল করবে না এই শর্তে 12 জন লোকের একটি দল থেকে একজন সভাপতি ও সহ-সভাপতি নির্বাচিত হওয়ার সংখ্যা = $^{12}P_2 = \dfrac{12!}{10!} = 11 \times 12 = 132$.

**7.3.4 সবগুলো বিভিন্ন নয় এমন বস্তু সমূহের বিন্যাস (*Permutations when all the objects are not distinct objects*)** ধরো আমাদের ROOT শব্দের অক্ষরগুলোর পুনঃসজ্জার সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে। এক্ষেত্রে শব্দটির অক্ষরগুলোর প্রতিটি ভিন্ন নয়। এখানে দুটি O আছে, যারা একই প্রকারের। চলো আমরা সাময়িকভাবে 2টি O কে ভিন্ন মনে করি, তাদেরকে ধরি $O_1$ এবং $O_2$। এক্ষেত্রে 4টি ভিন্ন অক্ষরকে একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা হবে 4!। এই বিন্যাসগুলোর মধ্যে ধরো একটি $RO_1O_2T$। এই বিন্যাসের নিরিখে আমরা পাই 2! টি বিন্যাস যেমন, $RO_1O_2T$ এবং $RO_2O_1T$। যদি $O_1$ ও $O_2$ কে ভিন্ন রূপে ভাবা না হয় অর্থাৎ যদি $O_1$ ও $O_2$ এর জায়গায় O হয় তবে এরা একই ধরনের বিন্যাস হয়।

সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = $\dfrac{4!}{2!} = 3 \times 4 = 12$

| $O_1$, $O_2$ ভিন্ন হলে বিন্যাস সমূহ | | $O_1$, $O_2$ একই O হলে বিন্যাস সমূহ |
|---|---|---|
| $\left.\begin{matrix} RO_1O_2T \\ RO_2O_1T \end{matrix}\right]$ | $\longrightarrow$ | R O O T |
| $\left.\begin{matrix} TO_1O_2R \\ TO_2O_1R \end{matrix}\right]$ | $\longrightarrow$ | T O O R |

$$\left.\begin{matrix} R\,O_1\,T\,O_2 \\ R\,O_2\,T\,O_1 \end{matrix}\right] \longrightarrow R\,O\,T\,O$$

$$\left.\begin{matrix} T\,O_1\,R\,O_2 \\ T\,O_2\,R\,O_1 \end{matrix}\right] \longrightarrow T\,O\,R\,O$$

$$\left.\begin{matrix} R\,T\,O_1\,O_2 \\ R\,T\,O_2\,O_1 \end{matrix}\right] \longrightarrow R\,T\,O\,O$$

$$\left.\begin{matrix} T\,R\,O_1\,O_2 \\ T\,R\,O_2\,O_1 \end{matrix}\right] \longrightarrow T\,R\,O\,O$$

$$\left.\begin{matrix} O_1\,O_2\,R\,T \\ O_2\,O_1\,T\,R \end{matrix}\right] \longrightarrow O\,O\,R\,T$$

$$\left.\begin{matrix} O_1\,R\,O_2\,T \\ O_2\,R\,O_1\,T \end{matrix}\right] \longrightarrow O\,R\,O\,T$$

$$\left.\begin{matrix} O_1\,T\,O_2\,R \\ O_2\,T\,O_1\,R \end{matrix}\right] \longrightarrow O\,T\,O\,R$$

$$\left.\begin{matrix} O_1\,R\,T\,O_2 \\ O_2\,R\,T\,O_1 \end{matrix}\right] \longrightarrow O\,R\,T\,O$$

$$\left.\begin{matrix} O_1\,T\,R\,O_2 \\ O_2\,T\,R\,O_1 \end{matrix}\right] \longrightarrow O\,T\,R\,O$$

$$\left.\begin{matrix} O_1\,O_2\,T\,R \\ O_2\,O_1\,T\,R \end{matrix}\right] \longrightarrow O\,O\,T\,R$$

চলো আমরা দেখি, INSTITUTE শব্দের অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়। এক্ষেত্রে 9টি অক্ষরের মধ্যে I 2 বার, এবং T 3 বার এসেছে।

আমরা সাময়িকভাবে এই অক্ষরগুলোকে ভিন্ন ভিন্ন ধরবো এবং তাদের নাম দেবো $I_1$, $I_2$, $T_1$, $T_2$, $T_3$। তবে এক্ষেত্রে 9টি ভিন্ন ভিন্ন অক্ষরের প্রত্যেককে একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা হবে 9 !। ধরো এরূপ একটি বিন্যাস হল $I_1NT_1SI_2T_2U\,E\,T_3$। এখানে যদি $I_1$, $I_2$ এক না হয় এবং $T_1$, $T_2$, $T_3$ এক না হয়, তবে $I_1$, $I_2$ কে 2! প্রকারে এবং $T_1$, $T_2$, $T_3$ কে 3! প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়। সুতরাং, $2! \times 3!$ সংখ্যক বিন্যাস ঠিক

একই রকম হবে এবং তা $I_1NT_1SI_2T_2UET_3$ বিন্যাসের অনুরূপ হবে। অতএব, ভিন্ন ভিন্ন বিন্যাসের মোট সংখ্যা হবে $\dfrac{9!}{2!\,3!}$

আমরা নিম্নের উপপাদ্যটি বিবৃত (প্রমাণ না করে) করতে পারি :

**উপপাদ্য 3** $n$ সংখ্যক বস্তুর মধ্যে যদি $p$ সংখ্যক একই প্রকারের এবং বাকিরা ভিন্ন হয়, তবে এই $n$ সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{n!}{p!}$ ।

প্রকৃতপক্ষে এই উপপাদ্যটিকে আমরা আরও সাধারণভাবে লিখতে পারি।

**উপপাদ্য 4** $n$ সংখ্যক বস্তুর মধ্যে যদি $p_1$ সংখ্যক বস্তু প্রথম প্রকারের, $p_2$ সংখ্যক বস্তু দ্বিতীয় প্রকারের, ...$p_k$ সংখ্যক বস্তু $k$-তম প্রকারের এবং বাকিগুলো ভিন্ন প্রকারের হয়, তবে এই $n$ সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা

$$\frac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots\,p_k!}$$

**উদাহরণ 9** ALLAHABAD শব্দের অক্ষরগুলোর বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করো।

**সমাধান :** এখানে 9টি বস্তু (অক্ষর) আছে, যার মধ্যে ‘A’ চারটি, ‘L’ দুটি, এবং বাকিগুলো প্রত্যেকে ভিন্ন।

সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{9!}{4!\,2!} = \dfrac{5\times6\times7\times8\times9}{2} = 7560$

**উদাহরণ 10** 1 থেকে 9 পর্যন্ত অঙ্কগুলোর পুনরাবৃত্তি না করে এদের সাহায্যে 4 অঙ্কের কয়টি সংখ্যা গঠন করা যায়?

**সমাধান :** এখানে ক্রমের গুরুত্ব আছে। উদাহরণস্বরূপ 1234 এবং 1324 দুটি ভিন্ন সংখ্যা।

সুতরাং, 9টি ভিন্ন অঙ্ক থেকে 4টিকে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা হবে 4 অঙ্ক বিশিষ্ট গঠিত বিভিন্ন সংখ্যা।

সুতরাং, নির্ণেয় গঠিত চার অঙ্কের সংখ্যা $= {}^9P_4 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024.$

**উদাহরণ 11** 0, 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলোর পুনরাবৃত্তি না করে এদের সাহায্যে 100 ও 1000 এর মধ্যবর্তী কয়টি সংখ্যা গঠন করা যায়?

**সমাধান :** 100 ও 1000 এর মধ্যবর্তী সব সংখ্যাই 3 অঙ্ক বিশিষ্ট। আমাদের প্রথমে 6টি অঙ্ক থেকে 3টি অঙ্ককে একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা গণনা করতে হবে। এই বিন্যাসের সংখ্যা হবে ${}^6P_3$। কিন্তু এই বিন্যাসগুলোতে

কিছু ক্ষেত্রে 0 শতকের স্থানে চলে আসে। উদাহরণস্বরূপ এরূপ সংখ্যাগুলো হল 092, 042, . . . ইত্যাদি। এরা প্রকৃতপক্ষে 2 অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা এবং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করতে হলে $^6P_3$ থেকে এরূপ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা বিয়োগ করতে হবে। এরূপ দুই অঙ্কের সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য 0 কে শতকের স্থানে স্থির রেখে বাকি 5টি অঙ্ক থেকে 2টি অঙ্ককে একত্রে নিয়ে পুনর্বিন্যাস করতে হবে। এরূপ বিন্যাসের সংখ্যা $^5P_2$।

সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^6P_3 - {}^5P_2 = \dfrac{6!}{3!} - \dfrac{5!}{3!}$

$= 4 \times 5 \times 6 - 4 \times 5 = 100$

**উদাহরণ 12** $n$ এর মান নির্ণয় করো, যখন

(i) ${}^nP_5 = 42\ {}^nP_3,\ n > 4$ (ii) $\dfrac{{}^nP_4}{{}^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3},\ n > 4$

**সমাধান :** (i) প্রদত্ত,

$${}^nP_5 = 42\ {}^nP_3$$

বা, $n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4) = 42\ n(n-1)\ (n-2)$

যেহেতু, $n > 4$ সুতরাং, $n(n-1)\ (n-2) \neq 0$

সুতরাং, উভয়পক্ষকে $n(n-1)\ (n-2)$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$(n-3)\ (n-4) = 42$$

বা, $n^2 - 7n - 30 = 0$

বা, $n^2 - 10n + 3n - 30 = 0$

বা, $(n-10)\ (n+3) = 0$

বা, $n - 10 = 0$ অথবা $n + 3 = 0$

বা, $n = 10$ অথবা $n = -3$

যেহেতু $n$ ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই $n = 10$ ।

(ii) প্রদত্ত $\dfrac{{}^nP_4}{{}^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3}$

সুতরাং, $3n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3) = 5(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4)$

বা, $3n = 5\ (n-4)$ [যেহেতু $(n-1)\ (n-2)\ (n-3) \neq 0,\ n > 4$]

বা, $n = 10$

**উদাহরণ 13** যদি $5\ {}^4P_r = 6\ {}^5P_{r-1}$ হয় তবে $r$ এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা পাই, $5\ {}^4P_r = 6\ {}^5P_{r-1}$

বা, $5\times\dfrac{4!}{(4-r)!} = 6\times\dfrac{5!}{(5-r+1)!}$

বা, $\dfrac{5!}{(4-r)!} = \dfrac{6\times 5!}{(5-r+1)\,(5-r)(5-r-1)!}$

বা, $(6 - r)(5 - r) = 6$

বা, $r^2 - 11r + 24 = 0$

বা, $r^2 - 8r - 3r + 24 = 0$

বা, $(r - 8)(r - 3) = 0$

বা, $r = 8$ অথবা $r = 3$

অতএব, $r = 8, 3$

**উদাহরণ 14** DAUGHTER শব্দের অক্ষরগুলো থেকে 8টি অক্ষরের ভিন্ন ভিন্ন সজ্জা সংখ্যা নির্ণয় করো, যখন

(i) সব স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে,

(ii) সব স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে না।

**সমাধান :** (i) DAUGHTER শব্দটিতে 8টি ভিন্ন ভিন্ন অক্ষর আছে, যেখানে 3টি স্বরবর্ণ যথা A,U এবং E আছে। যেহেতু স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকতে হবে, তাই আমরা কিছুক্ষণের জন্য তাদেরকে একটি অক্ষর হিসেবে ধরব (AUE)। এই অক্ষরটি সহ বাকি পাঁচটি অক্ষর মিলিয়ে মোট অক্ষর সংখ্যা হবে 6টি। এই 6টি অক্ষরের সবগুলোকে একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = ${}^6P_6 = 6!$। এই 6! প্রকারের বিন্যাসের প্রত্যেক প্রকারের জন্য A, U, E স্বরবর্ণ তিনটিকে নিজেদের মধ্যে 3! প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়। অতএব, গুণন নীতি অনুযায়ী নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 6\,! \times 3\,! = 4320$

(ii) স্বরবর্ণগুলো কখনই একত্রে থাকবে না এরূপ বিন্যাস নির্ণয় করতে, আমরা প্রথমে এই 8টি অক্ষরকে একত্রে নিয়ে সম্ভাব্য সব বিন্যাস নির্ণয় করব। এরূপ বিন্যাস সংখ্যা 8! । তারপর এই সংখ্যাটি থেকে স্বরবর্ণগুলো সর্বদা একত্রে থাকে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করে, তাকে বিয়োগ করব।

সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 8\,! - 6\,! \times 3\,! = 6\,!\,(7\times 8 - 6)$

$= 2 \times 6\,!\,(28 - 3)$

$= 50 \times 6\,! = 50 \times 720 = 36000$

**উদাহরণ 15** 4টি লাল, 3টি হলুদ, এবং 2টি সবুজ রঙের চাকতিকে কত প্রকারে একটি সারিতে বিন্যস্ত করা যায়, যদি একই রঙের চাকতিগুলো সদৃশ হয়।

**সমাধান :** মোট চাকতির সংখ্যা $= 4 + 3 + 2 = 9$, এই 9টি চাকতির মধ্যে 4টি প্রথম প্রকারের (লাল), 3টি দ্বিতীয় প্রকারের (হলুদ) এবং 2টি তৃতীয় প্রকারের (সবুজ)।

সুতরাং, বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260$

**উদাহরণ 16** "INDEPENDENCE" শব্দের অক্ষরগুলোর বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করো। কতগুলো বিন্যাসের ক্ষেত্রে,

(i) শব্দগুলো P দিয়ে শুরু হয়

(ii) স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে

(iii) স্বরবর্ণগুলো কখনই একত্রে থাকে না

(iv) শব্দগুলো I দিয়ে শুরু এবং P দিয়ে শেষ হয়?

**সমাধান :** এখানে 12টি অক্ষর আছে, যার মধ্যে N আছে 3 বার, E আছে 4 বার, D আছে 2 বার এবং বাকিগুলো প্রত্যেকে ভিন্ন। সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{12!}{3!\,4!\,2!} = 1663200$

(i) P কে সর্বাপেক্ষা বাঁদিকের অবস্থানে স্থির রেখে আমরা বাকি 11টি অক্ষরকে বিন্যস্ত করব। সুতরাং P দিয়ে শুরু এরূপ নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= \dfrac{11!}{3!\,2!\,4!} = 138600$

(ii) প্রদত্ত শব্দটিতে 5টি স্বরবর্ণ আছে, যার মধ্যে E আছে 4টি, I আছে 1টি। যেহেতু স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকবে তাই তাদেরকে আমরা 1টি অক্ষর $\boxed{\text{EEEEI}}$ হিসেবে বিবেচনা করব। এই 1টি অক্ষর এবং বাকি 7টি অক্ষর মিলে মোট অক্ষর সংখ্যা 8, যার মধ্যে N আছে 3টি, D আছে 2টি। সুতরাং এই 8টি অক্ষরকে $\dfrac{8!}{3!\,2!}$ প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়। এখন $\dfrac{8!}{3!\,2!}$ প্রকার বিন্যাসের প্রতিটি প্রকারের জন্য, 5টি স্বরবর্ণ E, E, E, E এবং I কে নিজেদের মধ্যে $\dfrac{5!}{4!}$ প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়। সুতরাং, গুণনের নিয়মে

নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{8!}{3!\,2!} \times \dfrac{5!}{4!} = 16800$

(iii) নির্ণেয় সজ্জা সংখ্যা

= মোট বিন্যাস সংখ্যা (কোনও শর্ত ছাড়া)— স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা

$= 1663200 - 16800 = 1646400$

(iv) I এবং P কে প্রান্তিক অবস্থানে স্থির রেখে (I কে বাম প্রান্তে এবং P কে ডান প্রান্তে) বাকি 10টি অক্ষরের বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{10!}{3!\,2!\,4!} = 12600$

## অনুশীলনী 7.3

**1.** কোনো অঙ্কের পুনরাবৃত্তি না করে 1থেকে 9 পর্যন্ত অঙ্কগুলো দিয়ে 3 অঙ্কের কয়টি সংখ্যা গঠন করা যায়?

**2.** কোনো অঙ্ক বারবার ব্যবহার না করে 4 অঙ্কের কয়টি সংখ্যা গঠন করা যায়?

**3.** কোনো অঙ্ক বারবার ব্যবহার না করে 1, 2, 3, 4, 6, 7 অঙ্কগুলো ব্যবহার করে 3 অঙ্কের কয়টি যুগ্ম সংখ্যা গঠন করা যায়?

**4.** যদি কোনো অঙ্ক বার বার ব্যবহার না করা হয় তবে 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলো ব্যবহার করে 4 অঙ্কের কয়টি সংখ্যা গঠন করা যায়? তাদের মধ্যে কয়টি যুগ্ম হবে?

**5.** যদি এক ব্যক্তি একাধিক পদ দখল না করে, তবে 8 জন লোকের দল থেকে কত প্রকারে একজন সভাপতি ও একজন সহ-সভাপতি নির্বাচন করা যায়?

**6.** যদি $^{n-1}P_3 : {^nP_4} = 1 : 9$ হয় তবে $n$ নির্ণয় করো।

**7.** $r$ এর মান নির্ণয় করো যখন (i) $^5P_r = 2\,{^6P_{r-1}}$ (ii) $^5P_r = {^6P_{r-1}}$

**8.** একটি অক্ষরকে কেবলমাত্র একবার ব্যবহার করে EQUATION শব্দের অক্ষরগুলো দিয়ে কয়টি অর্থযুক্ত বা অর্থহীন শব্দ গঠন করা যায়?

**9.** কোনো অক্ষরকে একাধিকবার ব্যবহার না করে MONDAY শব্দের অক্ষরগুলো হতে কয়টি অর্থযুক্ত বা অর্থহীন শব্দ গঠন করা যাবে, যদি

(i) 4 টি অক্ষরকে একত্রে ব্যবহার করা হয়, (ii) সবগুলো অক্ষরকে একত্রে ব্যবহার করা হয়,
(iii) সবগুলো অক্ষরকে একত্রে ব্যবহার করা হয়, কিন্তু প্রথমস্থানে স্বরবর্ণ থাকে?

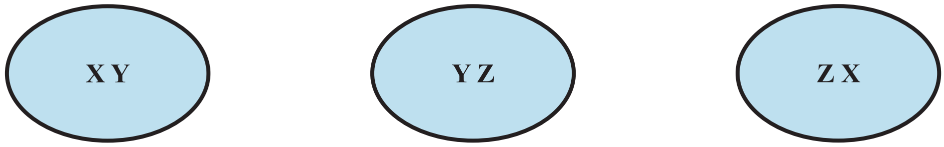
**10.** MISSISSIPPI শব্দের অক্ষরগুলোর কতগুলো ভিন্ন বিন্যাসে চারটি I একত্রে থাকবে না?

**11.** PERMUTATIONS শব্দের অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে বিন্যস্ত করে শব্দ গঠন করা যাবে যদি

(i) শব্দগুলো P দিয়ে শুরু এবং S দিয়ে শেষ হয়, (ii) শব্দগুলোতে স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে,
(iii) শব্দগুলোতে P ও S এর মধ্যে সর্বদা 4টি অক্ষর থাকে

## 7.4 সমবায় (Combinations)

ধরো X, Y, Z হল তিনজন লন টেনিস খেলোয়াড়ের একটি দল। দু'জন খেলোয়াড়ের একটি দল গঠন করতে হবে। এই কাজটি আমরা কত রকম ভাবে করতে পারি? X ও Y কে নিয়ে গঠিত দলটি কি Y ও X কে নিয়ে গঠিত দল থেকে আলাদা? না, এখানে ক্রম গুরুত্বপূর্ণ নয়। প্রকৃতপক্ষে দলটি তিনটি সম্ভাব্য উপায়ে গঠন করা যায়।




**চিত্র 7.3**

এগুলো হল XY, YZ এবং ZX (চিত্র 7.3) ।

এখানে প্রত্যেকটি নির্বাচনকে বলা হয়, *3টি বিভিন্ন বস্তু থেকে 2টিকে একত্রে নিয়ে সমবায়*। সমবায়ে ক্রমের কোনো গুরুত্ব নেই।

এখন আরও কয়েকটি উদাহরণ বিবেচনা করা যাক। 12 জন ব্যক্তি একটি ঘরের মধ্যে সাক্ষাত করলো এবং পরস্পর পরস্পরের সাথে করমর্দন করলো। আমরা কীভাবে করমর্দনের সংখ্যা নির্ধারণ করব। X এর সাথে Y এর করমর্দন এবং Y এর সাথে X এর করমর্দন দুটি ভিন্ন ভিন্ন করমর্দন নয়। এখানে ক্রম গুরুত্বপূর্ণ নয়। 12 টি ভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে 2 টি বস্তুর সমবায় সংখ্যাই হবে করমর্দনের সংখ্যা।

একটি বৃত্তের উপর 7টি বিন্দু আছে। এই বিন্দুগুলোকে জোড়ায় জোড়ায় যুক্ত করে কয়টি জ্যা অঙ্কন করা যাবে? 7টি ভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে 2টি বস্তুর সমবায় সংখ্যাই হবে জ্যা-এর সংখ্যা।

আমরা এখন $n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে $r$ সংখ্যক বস্তুর সমবায় সংখ্যা নির্ণয়ের সূত্র প্রতিষ্ঠা করব। এটিকে প্রকাশ করা হয় ${}^nC_r$ দ্বারা।

ধরো আমাদের কাছে A, B, C এবং D এই চারটি বস্তু আছে। যদি আমরা তাদের মধ্য থেকে একযোগে 2টি করে বস্তু নিয়ে সমবায় তৈরি করি, তবে তারা হবে AB, AC, AD, BC, BD এবং CD। যেহেতু ক্রম সমবায়কে পরিবর্তন করে না, তাই AB এবং BA একই সমবায় হবে। এই কারণেই আমরা BA, CA, DA, CB, DB ও DC কে এই তালিকায় অন্তর্ভুক্ত করিনি। এখানে 4টি বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে দুটি করে বস্তু নিয়ে 6টি সমবায় হবে, অর্থাৎ ${}^4C_2 = 6$।

এই তালিকায় প্রত্যেকটি সমবায়ের জন্য আমরা 2! টি বিন্যাস পাই, কারণ প্রত্যেকটি সমবায়ের 2টি বস্তুকে 2! প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়। অতএব নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = ${}^4C_2 \times 2!$

অন্যদিকে, 4টি বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে 2টি বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা = ${}^4P_2$

সুতরাং, ${}^4P_2 = {}^4C_2 \times 2!$ বা, $\dfrac{4!}{(4-2)!\,2!} = {}^4C_2$

এখন ধরো আমাদের কাছে A, B, C, D, E এই পাঁচটি বিভিন্ন বস্তু আছে। যদি আমরা তাদের মধ্য থেকে একযোগে 3টি করে বস্তু নিয়ে সমবায় তৈরি করি, তবে তারা হবে ABC, ABD, ABE, BCD, BCE, CDE, ACE, ACD, ADE, BDE। এই ${}^5C_3$ টি সমবায়ের প্রত্যেকটির জন্য আমরা 3! টি বিন্যাস পাই, কারণ প্রত্যেকটি সমবায়ের 3টি বস্তুকে 3! প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়। সুতরাং মোট বিন্যাস সংখ্যা = ${}^5C_3 \times 3!$

সুতরাং, $^5P_3 = {}^5C_3 \times 3!$ বা $\dfrac{5!}{(5-3)!\ 3!} = {}^5C_3$

উপরের উদাহরণগুলো থেকে বিন্যাস ও সমবায়ের সম্বন্ধ সম্পর্কিত নিম্নলিখিত উপপাদ্যটি উপস্থাপন করতে পারি।

**উপপাদ্য 5** $^nP_r = {}^nC_r \times r!,\ 0 < r \le n$

**প্রমাণ :** $^nC_r$ সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটির জন্য, আমরা $r!$ সংখ্যক বিন্যাস পাই, কারণ প্রত্যেকটি সমবায়ের $r$ সংখ্যক বস্তুকে $r!$ প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়।

অতএব, $n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে $r$ সংখ্যক বস্তুর মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে $^nC_r \times r!$।

অন্যভাবে, এটি হবে $^nP_r$।

অতএব, $^nP_r = {}^nC_r \times r!,\ 0 < r \le n$

**মন্তব্য :** **1.** উপরের উপপাদ্য থেকে পাই, $\dfrac{n!}{(n-r)!} = {}^nC_r \times r!$, অর্থাৎ $^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

বিশেষভাবে যদি $r = n$ হয়, তবে $^nC_n = \dfrac{n!}{n!\ 0!} = 1$

**2.** আমরা সংজ্ঞায়িত করি $^nC_0 = 1$, অর্থাৎ $n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একটিও বস্তু না নেওয়ার সমবায় সংখ্যাকে 1 হিসাবে বিবেচনা করা হয়। সমবায়ের গণনা হল শুধুমাত্র কিছু বা সকল বস্তুকে একত্রে কত প্রকারে নির্বাচন করা যায় তার গণনা করা। কোনো বস্তুই নির্বাচন না করা বা তাদের সবগুলোকে ফেলে রাখা একই কথা। আমরা জানি এ কাজ আমরা একরকম ভাবেই করতে পারি। এভাবে আমরা বোঝালাম $^nC_0 = 1$ ।

**3.** যেহেতু, $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1 = {}^nC_0$, তাই $^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ সূত্রটি $r = 0$ এর জন্যেও প্রযোজ্য।

অতএব $^nC_r = \dfrac{n!}{r!\ (n-r)!},\ 0 \le r \le n$

**4.** $^nC_{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = {}^nC_r$,

অর্থাৎ, $n$ সংখ্যক বস্তু থেকে $r$ সংখ্যক বস্তুর নির্বাচন সংখ্যা আর $(n - r)$ সংখ্যক বস্তুর প্রত্যাখ্যানের সংখ্যা একই।

**5.** $^{n}C_a = {}^{n}C_b \Rightarrow a = b$ বা $a = n - b$ অর্থাৎ, $n = a + b$

**উপপাদ্য 6** $^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

**প্রমাণ :** আমরা পাই $^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} + \dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$

$$= \frac{n!}{r\times(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = {}^{n+1}C_r$$

**উদাহরণ 17** যদি $^{n}C_9 = {}^{n}C_8$ হয় তবে $^{n}C_{17}$ এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা পাই, $^{n}C_9 = {}^{n}C_8$

অর্থাৎ, $\dfrac{n!}{9!(n-9)!} = \dfrac{n!}{(n-8)!\,8!}$

বা, $\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{n-8}$ বা, $n - 8 = 9$ বা, $n = 17$

সুতরাং, $^{n}C_{17} = {}^{17}C_{17} = 1$

**উদাহরণ 18** 2 জন পুরুষ ও 3 জন মহিলা থেকে 3 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। কত প্রকারে এই কমিটিটি গঠন করা যায়? এই কমিটিগুলোর মধ্যে কতগুলো কমিটিতে 1 জন পুরুষ এবং 2 জন মহিলা থাকবে?

**সমাধান :** এখানে ক্রমের কোনও ব্যাপার নেই। সুতরাং, আমাদের সমবায় গণনা করতে হবে। এখানে কমিটির সংখ্যা হল, 5 জন বিভিন্ন ব্যক্তি থেকে একত্রে 3 জন ব্যক্তির সমবায়ের সংখ্যার সমান। অতএব, নির্ণেয়

সমবায়ের সংখ্যা $= {}^{5}C_3 = \dfrac{5!}{3!\,2!} = \dfrac{4\times5}{2} = 10$

এখন 2 জন পুরুষ থেকে 1 জন পুরুষ নির্বাচন করা যায় $^2C_1$ প্রকারে এবং 3 জন মহিলা থেকে 2 জন মহিলা নির্বাচন করা যায় $^3C_2$ প্রকারে।

$$\text{সুতরাং নির্ণেয় কমিটির সংখ্যা } = {}^2C_1 \times {}^3C_2 = \frac{2!}{1!\ 1!} \times \frac{3!}{2!\ 1!} = 6$$

**উদাহরণ 19** 52 টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে কত প্রকারে 4টি তাস পছন্দ করা যায়? এর মধ্যে কতগুলো ক্ষেত্রে

(i) চারটি তাসই এক জাতের (suit) হবে,

(ii) চারটি তাস চারটি বিভিন্ন জাতের হবে,

(iii) চারটি মুখাবয়ব তাস (face card) হবে।

(iv) দুটি তাস লাল এবং দুটি তাস কালো হবে,

(v) চারটি তাসই একই রং এর হবে?

**সমাধান :** 52 টি তাস থেকে 4 টি তাসের পছন্দের সংখ্যা হবে 52 টি বিভিন্ন বস্তু থেকে একত্রে 4টি বস্তুর সমবায় সংখ্যার সমান।

$$\text{সুতরাং নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা} = {}^{52}C_4 = \frac{52!}{4!\ 48!} = \frac{49 \times 50 \times 51 \times 52}{2 \times 3 \times 4}$$

$$= 270725$$

(i) এখানে 4 ধরনের বা জাতের তাস : রুইতন, চিরতন, ইস্কাবন, হরতন আছে এবং প্রত্যেক ধরনের 13টি করে তাস আছে। সুতরাং $^{13}C_4$ প্রকারে 4টি রুইতনকে পছন্দ করা যায়। অনুরূপে 4টি চিরতনকে $^{13}C_4$ প্রকারে, 4টি ইস্কাবনকে $^{13}C_4$ প্রকারে, এবং 4টি হরতনকে $^{13}C_4$ প্রকারে পছন্দ করা যায়।

$$\text{সুতরাং মোট নির্বাচন সংখ্যা} = {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4$$

$$= 4 \times \frac{13!}{4!\ 9!} = 2860$$

(ii) এখানে প্রত্যেক ধরনের বা জাতের (suit) 13টি করে তাস আছে। সুতরাং 13টি রুইতন থেকে 1টি তাস পছন্দ করা যায় $^{13}C_1$ প্রকারে, 13টি হরতন থেকে 1টি পছন্দ করা যায় $^{13}C_1$ প্রকারে, 13টি চিরতন থেকে 1টি তাস পছন্দ করা যায় $^{13}C_1$ প্রকারে, এবং 13টি ইস্কাবন থেকে 1টি পছন্দ করা যায় $^{13}C_1$ প্রকারে।

অতএব, গুণননীতি অনুসারে, নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $= {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 = 13^4$

(iii) সাহেব, বিবি ও গোলাম মিলে মোট 12টি মুখাবয়ব তাস আছে। এই 12টি তাস থেকে 4টি তাস নির্বাচন করা যায় $^{12}C_4$ প্রকারে।

$$\text{সুতরাং নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা} = \frac{12!}{4!\ 8!} = 495$$

(iv) একটি তাসের প্যাকেটে 26টি লাল ও 26টি কালো রং এর তাস আছে। সুতরাং 2টি লাল ও 2টি কালো তাসের মোট নির্বাচন সংখ্যা $= {}^{26}C_2 \times {}^{26}C_2$

$$= \left(\frac{26!}{2!\ 24!}\right)^2 = (325)^2 = 105625$$

(v) 26টি লাল রং এর তাস থেকে 4টি লাল তাস নির্বাচন করা যায় ${}^{26}C_4$ প্রকারে। 26টি কালো রং এর তাস থেকে 4টি কালো তাস নির্বাচন করা যায় ${}^{26}C_4$ প্রকারে।

সুতরাং নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $= {}^{26}C_4 + {}^{26}C_4$

$$= 2 \times \frac{26!}{4!\ 22!} = 29900$$

## অনুশীলনী 7.4

1. যদি ${}^nC_8 = {}^nC_2$ হয় তবে ${}^nC_2$ নির্ণয় করো।
2. $n$ এর মান নির্ণয় করো যদি
   (i) ${}^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 12 : 1$ (ii) ${}^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11 : 1$
3. একটি বৃত্তের উপরিস্থ 21টি বিন্দু যুক্ত করে কয়টি জ্যা অঙ্কন করা যায়?
4. 5 জন বালক এবং 4 জন বালিকা থেকে কত প্রকারে 3 জন বালক এবং 3 জন বালিকার একটি দল গঠন করা যায়?
5. 6টি লাল বল, 5টি সাদা বল এবং 5টি নীল বল থেকে প্রত্যেক রঙের তিনটি করে বল নিয়ে কত প্রকারে 9টি বল নির্বাচন করা যায়?
6. 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে 5টি তাস নির্বাচন করে সমবায় সংখ্যা নির্ণয় করো, যাতে প্রতিটি সমবায়ে একটি করে টেক্কা থাকে।
7. 17 জন ক্রিকেট খেলোয়াড়ের দলে শুধুমাত্র 5 জন খেলোয়াড় বল করতে পারে। এই 17 জন খেলোয়াড় থেকে ঠিক 4 জন বোলার সহ কত প্রকারে একটি 11 জন খেলোয়াড়ের দল গঠন করা যায়?
8. একটি ব্যাগে 5টি কালো এবং 6টি লাল বল আছে। ব্যাগটি থেকে কত প্রকারে 2টি কালো এবং 3টি লাল বল নির্বাচন করা যায়?
9. একজন শিক্ষার্থী 9টি বিভিন্ন কোর্স থেকে কত প্রকারে 5টি কোর্স পছন্দ করতে পারে, যদি 2টি বিশেষ কোর্স প্রতিটি শিক্ষার্থীর জন্য বাধ্যতামূলক হয়?

## *বিবিধ উদাহরণমালা*

**উদাহরণ 20** INVOLUTE শব্দের অক্ষরগুলো থেকে 3টি স্বরবর্ণ ও 2টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে অর্থযুক্ত বা অর্থহীন কয়টি শব্দ গঠন করা যায়?

**সমাধান :** INVOLUTE শব্দটিতে 4টি স্বরবর্ণ যথা I,O,E,U এবং 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ যথা N, V, L ও T আছে। এই চারটি স্বরবর্ণ থেকে 3টি স্বরবর্ণের নির্বাচন সংখ্যা = $^4C_3 = 4$

এবং চারটি ব্যাঞ্জনবর্ণ থেকে 2টি ব্যঞ্জনবর্ণের নির্বাচন সংখ্যা $= {}^4C_2 = 6$

সুতরাং, 3টি স্বরবর্ণ ও 2টি ব্যঞ্জনবর্ণের নির্বাচন সংখ্যা $= 4 \times 6 = 24$

এখন এই 24 প্রকারের প্রত্যেক প্রকারের সমবায়ের জন্য নির্বাচিত 5টি অক্ষরকে নিজেদের মধ্যে 5! প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়। সুতরাং নির্ণেয় বিভিন্ন গঠিত শব্দের সংখ্যা $= 24 \times 5\,! = 2880$।

**উদাহরণ 21** একটি দলে 4 জন বালিকা এবং 7 জন বালক আছে। কত প্রকারে 5 জন সদস্যের একটি দল নির্বাচন করা যায়, যদি দলে (i) কোনো বালিকা না থাকে? (ii) অন্ততঃ একজন বালক ও একজন বালিকা থাকে? (iii) অন্তত 3 জন বালিকা থাকে?

**সমাধান :** (i) যেহেতু দলে কোনো বালিকা থাকবে না, তাই শুধুমাত্র বালিকদেরই নির্বাচন করতে হবে। 7 জন বালক থেকে 5 জন বালক নির্বাচন করা যায় $^7C_5$ প্রকারে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা } = {}^7C_5 = \frac{7!}{5!\ \ 2!} = \frac{6\times 7}{2} = 21$$

(ii) যেহেতু প্রত্যেক দলে অন্তত একজন বালক এবং একজন বালিকা থাকতে হবে তাই নিম্নলিখিত প্রকারে দলটি গঠন করা যায়—

(a) 1 জন বালক ও 4 জন বালিকা, (b) 2 জন বালক ও 3 জন বালিকা,

(c) 3 জন বালক ও 2 জন বালিকা, (d) 4 জন বালক ও 1 জন বালিকা।

এখন 1 জন বালক ও 4 জন বালিকা নির্বাচন করা যায় $^7C_1 \times {}^4C_4$ প্রকারে।

2 জন বালক ও 3 জন বালিকা নির্বাচন করা যায় $^7C_2 \times {}^4C_3$ প্রকারে।

3 জন বালক ও 2 জন বালিকা নির্বাচন করা যায় $^7C_3 \times {}^4C_2$ প্রকারে।

4 জন বালক ও 1 জন বালিকা নির্বাচন করা যায় $^7C_4 \times {}^4C_1$ প্রকারে।

সুতরাং, নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা

$$= {}^7C_1 \times {}^4C_4 + {}^7C_2 \times {}^4C_3 + {}^7C_3 \times {}^4C_2 + {}^7C_4 \times {}^4C_1$$
$$= 7 + 84 + 210 + 140 = 441$$

(iii) যেহেতু দলে অন্তত তিনজন বালিকা থাকতে হবে তাই দলটি গঠন করা যায়—

(a) 3 জন বালিকা এবং 2 জন বালক, বা (b) 4 জন বালিকা এবং 1 জন বালক

লক্ষ করো দলে 5 জন বালিকা থাকতে পারবে না, কারণ, শুধুমাত্র 4 জন বালিকাই আছে। 3 জন বালিকা এবং 2 জন বালককে নির্বাচন করা যায় $^4C_3 \times {}^7C_2$ প্রকারে। 4 জন বালিকা ও 1 জন বালককে নির্বাচন করা যায় $^4C_4 \times {}^7C_1$ প্রকারে।

সুতরাং মোট নির্বাচন সংখ্যা $= {}^4C_3 \times {}^7C_2 + {}^4C_4 \times {}^7C_1 = 84 + 7 = 91$

**উদাহরণ 22** AGAIN শব্দের সবগুলো অক্ষর ব্যবহার করে অর্থযুক্ত বা অর্থহীন শব্দের সংখ্যা নির্ণয় করো। যদি এই শব্দগুলো অভিধানের নিয়মে লেখা হয় তবে 50 তম শব্দটি কি হবে?

**সমাধান :** AGAIN শব্দটিতে 5টি অক্ষর আছে। এর মধ্যে A দুইবার আছে। সুতরাং নির্ণেয় শব্দ সংখ্যা =

$\frac{5!}{2!} = 60$ ।

A দিয়ে শুরু শব্দের সংখ্যা নির্ণয় করতে A কে সর্বাপেক্ষা বাঁ দিকের অবস্থানে স্থির রেখে, বাকি 4টি অক্ষরকে একত্রে বিন্যাস করতে হবে। এই চারটি অক্ষর থেকে 4টি অক্ষরের সজ্জা সংখ্যা, 4টি বিভিন্ন বস্তু থেকে 4টি বস্তুর বিন্যাস সংখ্যার সমান। অতএব, A দিয়ে শুরু শব্দের সংখ্যা A = $4! = 24$। তারপর G দিয়ে শুরু শব্দের সংখ্যা $= \frac{4!}{2!} = 12$, কারণ G কে সর্বাপেক্ষা বাঁ দিকের অবস্থানে স্থির রাখলে বাকি থাকে A, A, I, N। অনুরূপে I দিয়ে শুরু শব্দের সংখ্যা 12। সুতরাং মোট শব্দের সংখ্যা $= 24 + 12 + 12 = 48$।

সুতরাং 49 তম শব্দটি হবে NAAGI এবং 50 তম শব্দটি হবে NAAIG।

**উদাহরণ 23** 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 অঙ্কগুলো ব্যবহার করে 1000000 অপেক্ষা বড়ো কয়টি সংখ্যা গঠন করা যায়?

**সমাধান :** যেহেতু 1000000 একটি 7 অঙ্কের সংখ্যা এবং ব্যবহৃত অঙ্কের সংখ্যাও 7 তাই যে সমস্ত সংখ্যা গঠন করতে হবে তারা সবাই 7 অঙ্কের সংখ্যাই হবে। এছাড়া যেহেতু সংখ্যাগুলো 1000000 থেকে বড়ো তাই তারা 1, 2 বা 4 দিয়ে শুরু হবে।

এখন 1 দিয়ে শুরু সংখ্যার সংখ্যা $= \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{4\times5\times6}{2} = 60$, কারণ 1 কে যদি সর্বাপেক্ষা বাঁ দিকের স্থানে স্থির রাখা হয় তবে বিন্যাস করার জন্য বাকি অঙ্কগুলো হবে 0, 2, 2, 2, 4, 4 যেখানে 2 এর সংখ্যা 3টি ও 4 এর সংখ্যা 2টি।

2 দিয়ে শুরু এরূপ সংখ্যার সংখ্যা

$$= \frac{6!}{2!\;2!} = \frac{3\times4\times5\times6}{2} = 180$$

এবং 4 দিয়ে শুরু এরূপ সংখ্যার সংখ্যা $= \frac{6!}{3!}$

$= 4\times5\times6$

$= 120$

সুতরাং নির্ণেয় মোট সংখ্যার সংখ্যা $= 60 + 180 + 120 = 360$

### বিকল্প পদ্ধতি

স্পষ্টতই, 7 টি প্রদত্ত অঙ্কের বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{7!}{3!\ 2!} = 420$। কিন্তু এর মধ্যে এমন কিছু সংখ্যাও রয়েছে যেখানে সর্বাপেক্ষা বাঁ দিকের অবস্থানে 0 আছে। এরূপ বিন্যাসের সংখ্যা $\dfrac{6!}{3!\ 2!}$ (0 কে সর্বাপেক্ষা বাঁ দিকের অবস্থানে স্থির রেখে) = 60 ।

সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যার সংখ্যা = 420 – 60 = 360 ।

> **দ্রষ্টব্য** যদি প্রদত্ত অঙ্কগুলোর মধ্যে এক বা একাধিক অঙ্ক বার বার থাকে, তবে এটা বুঝতে হবে যে সংখ্যা গঠনের সময় অঙ্কগুলোকে ততবার করেই ব্যবহার করা যাবে যতবার করে তাদের দেওয়া আছে। উপরের উদাহরণে 1 এবং 0 কে কেবলমাত্র একবার করেই ব্যবহার করা যাবে যদিও 2 এবং 4 কে যথাক্রমে তিনবার ও দুইবার করে ব্যবহার করা যাবে।

**উদাহরণ 24** 5 জন বালিকা ও 3 জন বালককে কত প্রকারে একটি সারিতে বসানো যায় যাতে কোনো দু'জন বালক একত্রে না থাকে?

**সমাধান :** আমরা প্রথমে 5 জন বালিকাকে বিন্যস্ত করবো। এটা করা যায় 5! প্রকারে। এরূপ প্রত্যেক বিন্যাসের জন্য, 3 জন বালককে শুধুমাত্র × চিহ্ন যুক্ত স্থানে বসানো যায়।

$\times\ G \times G \times G \times G \times G \times$

এখানে 6টি × চিহ্নিত স্থান আছে এবং তিনজন বালককে $^6P_3$ প্রকারে বসানো যায়। অতএব, গুণন নীতি অনুযায়ী মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 5! \times {}^6P_3 = 5!\ \dfrac{6!}{3!}$

$= 4 \times 5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 14400.$

## *অধ্যায় 7 এর বিবিধ অনুশীলনী*

1. DAUGHTER শব্দের অক্ষরগুলো থেকে 2টি স্বরবর্ণ ও 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে, অর্থযুক্ত বা অর্থহীন কয়টি শব্দ গঠন করা যায়?
2. EQUATION শব্দের অক্ষরগুলো থেকে সবগুলো অক্ষর নিয়ে অর্থযুক্ত বা অর্থহীন কয়টি শব্দ গঠন করা যায়, যাতে সবগুলো স্বরবর্ণ ও সবগুলো ব্যঞ্জনবর্ণ একত্রে থাকে?
3. 9 জন বালক ও 4 জন বালিকা থেকে 7 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। এই কমিটিটি কত প্রকারে গঠন করা যায় যদি কমিটিতে
   (i) ঠিক তিনজন বালিকা থাকে? (ii) কমপক্ষে তিনজন বালিকা থাকে? (iii) সবচেয়ে বেশি তিনজন বালিকা থাকে?
4. যদি EXAMINATION শব্দের অক্ষরগুলোকে বিন্যস্ত করে অভিধানের নিয়ম অনুযায়ী সাজানো হয়, তবে E দিয়ে শুরু প্রথম শব্দটির আগে পর্যন্ত কয়টি শব্দ থাকবে?

**5.** 0, 1, 3, 5, 7 ও 9 এই অঙ্কগুলো ব্যবহার করে এবং কোনো অঙ্কের পুনরাবৃত্তি না করে 10 দ্বারা বিভাজ্য 6 অঙ্কের কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাবে?

**6.** ইংরেজি বর্ণমালায় 5টি স্বরবর্ণ ও 21টি ব্যঞ্জনবর্ণ আছে। এখান থেকে 2টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ ও 2টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে কয়টি শব্দ গঠন করা যায়?

**7.** কোনো পরীক্ষার প্রশ্নপত্রের দুটি বিভাগ, বিভাগ I ও বিভাগ II তে যথাক্রমে 5টি ও 7টি প্রশ্ন মিলিয়ে মোট 12টি প্রশ্ন আছে। একজন ছাত্রকে প্রত্যেক বিভাগ থেকে অন্তত 3টি করে প্রশ্ন নিয়ে মোট 8টি প্রশ্নের উত্তর করতে হবে। ছাত্রটি কত প্রকারে প্রশ্নপত্র নির্বাচন করতে পারে?

**8.** 52টি তাসের প্যাকেট থেকে 5টি তাসের সমবায় সংখ্যা নির্ণয় করো, যদি প্রত্যেক সমবায়ে ঠিক একটি রাজা (king) থাকে।

**9.** 5 জন পুরুষ ও 4 জন মহিলাকে একটি সারিতে এমনভাবে বসাতে হবে যেন মহিলারা যুগ্ম স্থান দখল করে। এরূপ কতগুলো সজ্জা সম্ভব?

**10.** 25 জন শিক্ষার্থী বিশিষ্ট একটি ক্লাশ থেকে 10 জনকে একটি শিক্ষামূলক ভ্রমণের জন্য নির্বাচন করা হবে। এই শ্রেণির কোনো 3 জন ছাত্র এই সিদ্ধান্ত নিল যে— তারা 3 জনই ভ্রমণে অংশগ্রহণ করবে অথবা কেউই অংশগ্রহণ করবে না। এই শর্তে কত প্রকারে শিক্ষার্থীদের ভ্রমণের জন্য নির্বাচন করা যাবে?

**11.** ASSASSINATION শব্দের অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সজ্জিত করা যায় যদি সবগুলো S একত্রে থাকে?

## *সারসংক্ষেপ*

- *গণনার মৌলিক নীতি* : যদি একটি ঘটনা '$m$' সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে ঘটে এবং যাকে অনুসরণ করে অন্য একটি ঘটনা যদি '$n$' সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে ঘটে, তবে ঘটনাদ্বয় প্রদত্ত ক্রমে মোট যতরকমে ঘটতে পারে তার সংখ্যা হলো $m \times n$।
- $n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে পুনরাবৃত্তি ছাড়া $r$ সংখ্যক বস্তুর একত্রে বিন্যাস সংখ্যা প্রকাশিত হয় $^nP_r$ দ্বারা এবং $^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, যেখানে $0 \le r \le n$।
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$
- $n! = n \times (n-1)\,!$
- যদি একই বস্তু বারবার ব্যবহার করা যায় তবে $n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে $r$ সংখ্যক বস্তুর একত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= n^r$।
- $n$ সংখ্যক বস্তুর সবগুলোকে একসাথে নিয়ে, যেখানে $p_1$ সংখ্যক বস্তু প্রথম প্রকারের, $p_2$ সংখ্যক

বস্তু দ্বিতীয় প্রকারের, ..., $p_k$ সংখ্যক বস্তু $k$ তম প্রকারের এবং বাকিগুলোর প্রত্যেকে ভিন্ন হয় (যদি থাকে), তবে এই $n$ স্যখ্যক বস্তুর প্রত্যেককে একযোগে নিয়ে মোট বিন্যাস সংখ্যা $\dfrac{n!}{p_1!\, p_2\,!...\, p_k!}$ ।

- $n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে $r$ সংখ্যক বস্তুর একত্রে নির্বাচন সংখ্যাকে ${}^n\mathrm{C}_r$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ${}^n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!},\ 0 \le r \le n$ ।

## *ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট*

বিন্যাস ও সমবায়ের ধারণা জৈন ধর্মের আবির্ভাবের আগেই খুঁজে পাওয়া গিয়েছিল। তথাপি জৈনরা এজন্য সম্মান পাওয়ার যোগ্য, কারণ জৈনরা এই বিষয় বস্তুকে গণিতের অভ্যন্তরীণ বিষয় হিসেবে গণ্য করত এবং এর নাম দিয়েছিল "বিকল্প" (*Vikalpa*)।

জৈনদের মধ্যে মহাবীর-ই (850 এর কাছাকাছি) সম্ভবত বিশ্বের সর্বপ্রথম গণিতজ্ঞ হিসেবে বিন্যাস ও সমবায়ের সাধারণ সূত্রাবলী প্রমাণের জন্য সম্মান পাওয়ার যোগ্য।

খ্রিস্টপূর্ব ষষ্ঠ শতকে *সুশ্রুত* উনার ঔষধ সম্বন্ধীয় গবেষণা "*সুশ্রুত সংহিতা*" এর মাধ্যমে দাবি করেছিলেন যে 6টি ভিন্ন কর্মকাণ্ড থেকে একত্রে 1টি করে, 2টি করে, ইত্যাদি এরূপে নিয়ে 63টি সমবায় গঠন করা যায়। খ্রিস্টপূর্ব তৃতীয় শতকের দিকে *পিংগালা* নামে একজন সংস্কৃত পণ্ডিত তার গবেষণা পত্র *Chhanda Sutra* এর মাধ্যমে প্রদত্ত সংখ্যক অক্ষর থেকে একটি, দুটি ইত্যাদি সংখ্যক অক্ষরকে একত্রে নিয়ে সমবায় সংখ্যা নির্ণয়ের পদ্ধতি দেখিয়েছিলেন। *ভাস্করাচার্য* (জন্ম 1114) বিন্যাস ও সমবায়ের বিষয়বস্তুকে তার বিখ্যাত কর্মকাণ্ড *লীলাবতীতে* "*অঙ্ক পাশা*" নামে চিহ্নিত করেছিলেন। মহাবীর ও ভাস্করাচার্যের মত গণিতজ্ঞরা ${}^n\mathrm{C}_r$ ও ${}^n\mathrm{P}_r$ এর মত সাধারণ সূত্রাবলি প্রমাণ করার পাশাপাশি এই বিষয়ে আরও কিছু গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য ও ফলাফল দিয়েছিলেন।

ভারতবর্ষের বাইরে, বিন্যাস ও সমবায়ের বিষয়বস্তুর উপর চিনের বিখ্যাত বই I–King এ মনোরম সূত্রপাত হয়েছিল। যেহেতু 213 খ্রিস্টপূর্বাব্দে চিনের সম্রাট ঐ দেশের সমস্ত বই ও পাণ্ডুলিপি পোড়ানোর আদেশ দিয়েছিলেন এবং সৌভাগ্যবশত এই কাজ সম্পূর্ণরূপে করা হয়নি, তাই এই কাজের আনুমাণিক সময়কাল নিয়ে মন্তব্য করা কঠিন। গ্রীকরা এবং পরবর্তীতে ল্যাটিন লেখকেরাও বিন্যাস ও সমবায়ের উপর বিচ্ছিন্নভাবে কাজ করেছিলেন।

আরব ও হিব্রোর কিছুকিছু লেখকরা জ্যোতিষশাস্ত্র অধ্যয়নে বিন্যাস ও সমবায়ের ধারণা ব্যবহার করেন। উদাহরণস্বরূপ, *Rabbi ben Ezra,* জ্ঞাত গ্রহের দুটিকে একসাথে নিয়ে, তিনটিকে একসাথে

নিয়ে এবং এরূপে, সমবায় সংখ্যা নিরূপণ করেন। 1140 এর সমসাময়িক কালে ${}^nC_r$ এর সূত্র সম্পর্কে *Rabbi ben Ezra* জানতেন না। যদিও, $n$ ও $r$ এর বিশেষ মানে ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ -এটা তাঁর জানা ছিল। 1321এ অপর হিব্রো লেখক *Levi Ben Gerson*- ${}^nP_r$, ${}^nP_n$ সূত্রগুলোকে সাথে নিয়ে ${}^nC_r$ এর সাধারণ সূত্র দেন।

বিন্যাস ও সমবায় সম্পর্কিত তত্ত্ব সর্বপ্রথম পূর্ণ এবং ক্রমবদ্ধ গ্রন্থ Ars *Conjectandi*-তে স্যুইস গণিতিজ্ঞ *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705) ব্যক্ত করেন, যা তাঁর মৃত্যুর পর 1713-তে প্রকাশিত হয়। এই গ্রন্থটি আজকাল আমরা বিন্যাস ও সমবায় নিয়ে যেসব তত্ত্ব অধ্যয়ন করি, তা নিয়ে গঠিত।

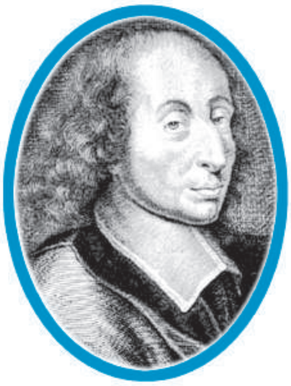
অধ্যায় **8**

# দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem)

❖*Mathematics is a most exact science and its conclusions are capable of absolute proofs. – C.P. STEINMETZ*❖

## 8.1 ভূমিকা

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে আমরা শিখেছি কীভাবে দ্বিপদ রাশি যেমন $a + b$ ও $a - b$ এর বর্গ এবং ঘন বের করতে হয়। এদের ব্যবহার করে, আমরা বিভিন্ন সংখ্যা যেমন $(98)^2 = (100 - 2)^2$, $(999)^3 = (1000 - 1)^3$, ইত্যাদির সাংখ্যমান নির্ণয় করতে পারি। যাই হোক, উচ্চতর ঘাত যেমন $(98)^5$, $(101)^6$, ইত্যাদির জন্য বার বার গুণ করে গণনা কষ্টসাধ্য হয়ে পড়ে। এই অসুবিধা এড়ানো যায় একটি উপপাদ্য প্রয়োগের মাধ্যমে, যা দ্বিপদ উপপাদ্য নামে পরিচিত। এটি $(a + b)^n$ -এর বিস্তৃত করার একটি সহজতর পথ দেখায়, যেখানে $n$ হল একটি পূর্ণসংখ্যা বা মূলদ সংখ্যা। এ অধ্যায়ে, আমরা দ্বিপদ উপপাদ্যের কেবলমাত্র ধনাত্মক অখণ্ড সূচক নিয়ে অধ্যয়ন করব।



ব্লেইজ পাস্কাল
**(1623-1662)**

## 8.2 দ্বিপদ উপপাদ্যের ধনাত্মক অখণ্ড সূচক (Binomial Theorem for Positive Integral Indices)

চলো, পূর্বে করা নীচের অভেদগুলোর দিকে নজর দেওয়া যাক :

$$(a + b)^0 = 1 \qquad a + b \neq 0$$
$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

এসব বিস্তৃতিতে, আমরা লক্ষ করি যে,

(i) বিস্তৃতিতে মোট পদের সংখ্যা ঘাতের সূচক থেকে এক বেশি। যেমন, $(a + b)^2$ এর বিস্তৃতিতে, মোট পদের সংখ্যা 3, যেখানে $(a + b)^2$ এর ঘাতের সূচক (index) 2 ।

(ii) শুরু থেকে পরপর পদগুলোতে প্রথম পদ '$a$' এর ঘাত 1 করে কমতে থাকে যেখানে দ্বিতীয় পদ '$b$' এর ঘাত 1 করে বাড়তে থাকে।

(iii) বিস্তৃতির প্রতিটি পদে, $a$ এবং $b$ এর ঘাতের সূচকের যোগফল একই এবং তা $a + b$ এর ঘাতের সূচকের সমান।

এখন আমরা এ সব বিস্তৃতির সহগগুলোকে নীচের মতো করে সুবিন্যস্ত (arrange) করি (চিত্র8.1):

| **ঘাতের সূচক** | | | | **সহগ** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | | | | **1** | | | | |
| **1** | | | **1** | | **1** | | | |
| **2** | | **1** | | **2** | | **1** | | |
| **3** | **1** | | **3** | | **3** | | **1** | |
| **4** | **1** | **4** | | **6** | | **4** | | **1** |

চিত্র **8.1**

এই সারণিতে আমরা কি কোনো নমুনা লক্ষ করি যা আমাদের পরবর্তী সারি লিখতে সাহায্য করবে? হ্যাঁ, আমরা লক্ষ করি। এটি দেখা যায় যে, ঘাতের সূচক 1-এর সারির দুটো 1 এর যোগফল থেকে ঘাতের সূচক 2-এর সারির 2 পাওয়া যায়। ঘাতের সূচক 2-এর সারির 1,2 এবং 2 ,1 এর যোগফল থেকে ঘাতের সূচক 3 এর সারির 3 এবং 3 পাওয়া যায় এভাবেই চলতে থাকে।

এছাড়াও, প্রত্যেক সারির শুরুতে ও শেষে 1 বর্তমান। এই প্রক্রিয়া ইচ্ছামতো যে কোনো ঘাত পর্যন্ত চালিয়ে যাওয়া যায়।

| **ঘাতের সূচক** | | | | | **সহগ সমূহ** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | | | | | **1** | | | | | |
| **1** | | | | **1** | | **1** | | | | |
| **2** | | | **1** | | **2** | | **1** | | | |
| **3** | | **1** | | **3** | | **3** | | **1** | | |
| **4** | **1** | | **4** | | **6** | | **4** | | **1** | |

চিত্র **8.2**

## পাস্কাল ত্রিভুজ (Pascal's Triangle)

চিত্র 8.2 তে প্রদত্ত গঠন কাঠামোটি একটি ত্রিভুজ এর মতো দেখতে, যার শীর্ষ নীচের দুইদিকে তির্যক বাহু বরাবর 1 থাকে। সংখ্যার এই সজ্জা পাস্কাল ত্রিভুজ নামে পরিচিত। যা ফরাসি গণিতজ্ঞ ব্লেইজ পাস্কাল (Blaise Pascal) এর নাম অনুসারে হয়েছে। এটি পিঙ্গালা (Pingala) এর মেরু প্রস্তর (*Meru Prastara*) নামেও পরিচিত।

পাস্কাল ত্রিভুজ ব্যবহার করেও দ্বিপদ রাশির উচ্চতর ঘাতের বিস্তৃতি সম্ভব। চলো আমরা পাস্কাল ত্রিভুজ ব্যবহার করে $(2x + 3y)^5$ কে বিস্তৃত করি। ঘাতের সূচক 5 এর সারিটি হল

1 5 10 10 5 1

উপরোক্ত সারি এবং আমাদের পর্যবেক্ষণ (i), (ii) ও (iii), ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$(2x + 3y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4 (3y) + 10(2x)^3 (3y)^2 + 10 (2x)^2 (3y)^3 + 5(2x)(3y)^4 + (3y)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5.$$

এখন, যদি আমরা $(2x+3y)^{12}$ এর বিস্তৃতি বের করতে চাই, তবে প্রথমে আমাদের ঘাতের সূচক 12 এর সারিটি নির্ণয় করতে হবে। এটি ঘাতের সূচক12 পর্যন্ত পাস্কাল ত্রিভুজের সবগুলো সারি লিখে করা যায়। এটি কিছুটা দীর্ঘতর প্রক্রিয়া। যদি আমরা আরও উচ্চতর ঘাতের বিস্তৃতি করতে চাই, তবে এই প্রক্রিয়া আরও কঠিন হয়ে পড়বে।

আমরা তাই এমন একটি নিয়ম বের করতে চেষ্টা করব যা পাস্কাল ত্রিভুজের কাঙ্খিত সারির আগের সবগুলো সারি না লিখেও দ্বিপদ রাশির যে কোনো ঘাতের বিস্তৃতি বের করতে আমাদের সাহায্য করবে।

এজন্য, আমরা পাস্কাল ত্রিভুজের সংখ্যাগুলো আবার লেখার জন্য আগে শেখা সমবায় এর ধারণা ব্যবহার করব। আমরা জানি যে, ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \leq r \leq n$ এবং $n$ একটি অ-ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। এছাড়াও ${}^nC_0 = 1 = {}^nC_n$

| ঘাতের সূচক | সহগ সমূহ |
|---|---|
| **0** | ${}^0C_0$ (=1) |
| **1** | ${}^1C_0$ (=1) ${}^1C_1$ (=1) |
| **2** | ${}^2C_0$ (=1) ${}^2C_1$ (=2) ${}^2C_2$ (=1) |
| **3** | ${}^3C_0$ (=1) ${}^3C_1$ (=3) ${}^3C_2$ (=3) ${}^3C_3$ (=1) |
| **4** | ${}^4C_0$ (=1) ${}^4C_1$ (=4) ${}^4C_2$ (=6) ${}^4C_3$ (=4) ${}^4C_4$ (=1) |
| **5** | ${}^5C_0$ (=1) ${}^5C_1$ (=5) ${}^5C_2$ (=10) ${}^5C_3$ (=10) ${}^5C_4$ (=5) ${}^5C_5$ (=1) |

চিত্র **8.3** পাস্কাল ত্রিভুজ

এখন পাস্কাল ত্রিভুজটিকে এভাবেও লেখা যায় (চিত্র 8.3)

এই নমুনাটি লক্ষ করে, আমরা এখন পূর্ববর্তী সারিগুলো না লিখেও যে কোনো ঘাতের জন্য পাস্কাল ত্রিভুজ-এর নির্ণেয় সারিটি লিখতে পারি। যেমন, ঘাতের সূচক 7 -এর জন্য সারিটি হবে—

$${}^7C_0 \quad {}^7C_1 \quad {}^7C_2 \quad {}^7C_3 \quad {}^7C_4 \quad {}^7C_5 \quad {}^7C_6 \quad {}^7C_{7.}$$

উপরোক্ত সারি এবং পর্যবেক্ষণ (i), (ii) এবং (iii) থেকে আমরা পাই,

$$(a+b)^7 = {}^7C_0\, a^7 + 7C_1 a^6 b + {}^7C_2 a^5 b^2 + {}^7C_3 a^4 b^3 + 7C_4 a^3 b^4 + {}^7C_5 a^2 b^5 + {}^7C_6 ab^6 + {}^7C_7 b^7$$

এসব পর্যবেক্ষণগুলো ব্যবহার করে যে কোনো ধনাত্মক অখণ্ড $n$ এর জন্য দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতি দেখানো যেতে

পারে। আমরা এখন যে কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সূচক-এর দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতি লেখার মতো অবস্থায় আছি।

### 8.2.1 যে কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা *n* এর জন্য দ্বিপদ উপপাদ্য (*Binomial theorem for any positive integer n*)

$$(a+b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + ... + {}^nC_{n-1}a.b^{n-1} + {}^nC_nb^n$$

**প্রমাণ** গাণিতিক আরোহণ নীতি প্রয়োগ করে এই প্রমাণ পাওয়া যায়। ধরি, প্রদত্ত বিবৃতিটি হল—

$$P(n) : (a+b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + ... + {}^nC_{n-1}a.b^{n-1} + {}^nC_nb^n$$

$n = 1$ হলে, আমরা পাই,

$$P(1) : (a+b)^1 = {}^1C_0a^1 + {}^1C_1b^1 = a + b$$

অতএব, $P(1)$ সত্য।

ধরি, $P(k)$ সত্য, যেখানে $k$ যে কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, অর্থাৎ

$$(a+b)^k = {}^kC_0a^k + {}^kC_1a^{k-1}b + {}^kC_2a^{k-2}b^2 + ... + {}^kC_kb^k \qquad ... (1)$$

আমরা প্রমাণ করব যে, $P(k+1)$ ও সত্য, অর্থাৎ

$$(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0\,a^{k+1} + {}^{k+1}C_1\,a^kb + {}^{k+1}C_2\,a^{k-1}b^2 + ... + {}^{k+1}C_{k+1}\,b^{k+1}$$

এখন, $(a+b)^{k+1} = (a+b)\,(a+b)^k$

$$= (a+b)\,({}^kC_0\,a^k + {}^kC_1a^{k-1}\,b + {}^kC_2\,a^{k-2}\,b^2 + ... + {}^kC_{k-1}\,ab^{k-1} + {}^kC_k\,b^k)$$

[ (1) থেকে পাই]

$$= {}^kC_0\,a^{k+1} + {}^kC_1\,a^kb + {}^kC_2a^{k-1}b^2 + ... + {}^kC_{k-1}\,a^2b^{k-1} + {}^kC_k\,ab^k + {}^kC_0\,a^kb$$
$$+ {}^kC_1a^{k-1}b^2 + {}^kC_2a^{k-2}b^3 + ... + {}^kC_{k-1}ab^k + {}^kC_kb^{k+1}$$

[প্রকৃত গুণন দ্বারা]

$$= {}^kC_0a^{k+1} + ({}^kC_1 + {}^kC_0)\,a^kb + ({}^kC_2 + {}^kC_1)a^{k-1}b^2 + ...$$
$$+ ({}^kC_k + {}^kC_{k-1})\,ab^k + {}^kC_kb^{k+1}$$

[সদৃশ্য পদগুলো একত্রিত করে]

$$= {}^{k+1}C_0a^{k+1} + {}^{k+1}C_1a^kb + {}^{k+1}C_2\,a^{k-1}b^2 + ... + {}^{k+1}C_kab^k + {}^{k+1}C_{k+1}\,b^{k+1}$$

$(\therefore\ {}^{k+1}C_0 = 1,\ {}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$ এবং ${}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1})$

অতএব, $P(k+1)$ সত্য যখন $P(k)$ সত্য।

সুতরাং, গাণিতিক আরোহণ নীতি অনুযায়ী, $P(n)$ সত্য যেখানে $n$ যেকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

আমরা $(x+2)^6$ কে বিস্তৃত করে এই উপপাদ্যটি ব্যাখ্যা করছি :

$$(x+2)^6 = {}^6C_0x^6 + {}^6C_1x^5.2 + {}^6C_2x^42^2 + {}^6C_3x^3.2^3 + {}^6C_4x^2.2^4 + {}^6C_5x.2^5 + {}^6C_6.2^6.$$
$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

অতএব, $(x+2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$ ।

## পর্যবেক্ষণসমূহ

**1.** প্রতীক $\sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k\, a^{n-k} b^k$ দিয়ে বোঝায়

${}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots + {}^nC_n a^{n-n} b^n$, যেখানে $b^0 = 1 = a^{n-n}$.

অতএব উপপাদ্যটিকে এভাবেও লেখা যায়

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k\, a^{n-k} b^k \text{ ।}$$

**2.** দ্বিপদ উপপাদ্যে বর্তমান ${}^nC_r$ সহগগুলো দ্বিপদ সহগ নামে পরিচিত।

**3.** $(a+b)^n$ -এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ আছে অর্থাৎ, ঘাতের সূচক থেকে এক বেশি।

**4.** বিস্তৃতির ক্রমান্বয়ে পরপর পদগুলোতে $a$ এর সূচক এক করে কমতে থাকে। প্রথম পদে এটি $n$, দ্বিতীয় পদে $(n-1)$, এবং এভাবে শেষ পদটি শূন্য দিয়ে শেষ হয়। একই সময়ে $b$ এর সূচক এক করে বাড়তে থাকে। প্রথম পদটিতে শূন্য দিয়ে শুরু হয়, দ্বিতীয় পদে 1 এবং এভাবে শেষ পদটিতে $n$ দিয়ে শেষ হয়।

**5.** $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতিতে, $a$ এবং $b$ এর ঘাতের সূচকের যোগফল প্রথম পদটিতে $n+0=n$, দ্বিতীয় পদটিতে $(n-1)+1=n$ এবং এভাবে শেষ পদে $0+n=n$ হয়। অতএব, দেখা যায় যে বিস্তৃতির পদে $a$ এবং $b$ এর ঘাতের সূচকের যোগফল $n$ হয়।

### 8.2.2 *কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র :* $(a + b)^n$ এর বিস্তৃতিতে,

(i) $a = x$ এবং $b = -y$ নিয়ে, আমরা পাই

$$\begin{aligned}(x-y)^n &= [x + (-y)]^n \\ &= {}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1}(-y) + {}^nC_2 x^{n-2}(-y)^2 + {}^nC_3 x^{n-3}(-y)^3 + \ldots + {}^nC_n (-y)^n \\ &= {}^nC_0 x^n - {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 - {}^nC_3 x^{n-3} y^3 + \ldots + (-1)^n\, {}^nC_n y^n\end{aligned}$$

এভাবে, $(x-y)^n = {}^nC_0 x^n - {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + (-1)^n\, {}^nC_n y^n$

এটি ব্যবহার করে, আমরা পাই, $(x-2y)^5 = {}^5C_0 x^5 - {}^5C_1 x^4 (2y) + {}^5C_2 x^3 (2y)^2 - {}^5C_3 x^2 (2y)^3 + {}^5C_4 x(2y)^4 - {}^5C_5 (2y)^5$

$$= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5.$$

(ii) $a = 1$, $b = x$ নিয়ে, আমরা পাই,

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= {}^nC_0(1)^n + {}^nC_1(1)^{n-1}x + {}^nC_2(1)^{n-2}x^2 + \ldots + {}^nC_n x^n \\ &= {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + \ldots + {}^nC_n x^n\end{aligned}$$

এভাবে, $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + \ldots + {}^nC_n x^n$

বিশেষত, $x = 1$ এর জন্য, আমরা পাই—

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots + {}^nC_n.$$

(iii) $a = 1, b = -x$ নিয়ে, আমরা পাই,

$$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - \ldots + (-1)^n\, {}^nC_nx^n$$

বিশেষত, $x = 1$ এর জন্য, আমরা পাই,

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + (-1)^n\, {}^nC_n$$

**উদাহরণ 1** $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4$ কে বিস্তৃত করো, যখন $x \neq 0$ ।

**সমাধান** দ্বিপদ উপপাদ্য থেকে আমরা পাই,

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0(x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^3\left(\frac{3}{x}\right) + {}^4C_2(x^2)^2\left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4C_3(x^2)\left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= x^8 + 4.x^6 . \frac{3}{x} + 6.x^4 . \frac{9}{x^2} + 4.x^2 . \frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4}$$

$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}.$$

**উদাহরণ 2** $(98)^5$ -এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা 98 কে দুটি সংখ্যার যোগ বা অন্তর রূপে প্রকাশ করি যাদের ঘাত হিসেব করা সহজতর এবং তারপর দ্বিপদ উপাপাদ্য প্রয়োগ করি।

98 কে $100 - 2$ লিখে পাই,

সুতরাং, $(98)^5 = (100 - 2)^5$

$$= {}^5C_0\,(100)^5 - {}^5C_1\,(100)^4.2 + {}^5C_2\,(100)^3 2^2$$
$$- {}^5C_3\,(100)^2\,(2)^3 + {}^5C_4\,(100)\,(2)^4 - {}^5C_5\,(2)^5$$
$$= 10000000000 - 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000 \times 4 - 10 \times 10000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32$$
$$= 10040008000 - 1000800032 = 9039207968.$$

**উদাহরণ 3** $(1.01)^{1000000}$ এবং 10,000 এর মধ্যে কোন্‌টি বড়ো ?

**সমাধান :** 1.01 কে দুটি অংশে বিভক্ত করে এবং তারপর দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে শুরুর কয়েকটি পদ লিখে আমরা পাই,

$$(1.01)^{1000000} = (1 + 0.01)^{1000000}$$

$$= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1(0.01) + \text{ অন্য ধনাত্মক পদগুলো}$$

$$= 1 + 1000000 \times 0.01 + \text{ অন্য ধনাত্মক পদগুলো}$$

$$= 1 + 10000 + \text{ অন্য ধনাত্মক পদগুলো}$$

$$> 10000$$

সুতরাং, $(1.01)^{1000000} > 10000$

**উদাহরণ 4** দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে প্রমাণ করো যে, $6^n–5n$ কে 25 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ সর্বদাই 1 থাকবে।

**সমাধান** দুটি সংখ্যা $a$ ও $b$ এর জন্য যদি আমরা সংখ্যা $q$ ও $r$ পাই এমন যে $a = bq + r$ , তবে আমরা বলি যে $a$ কে $b$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল $q$ এবং ভাগশেষ $r$ হয়। এভাবে $6^n – 5n$ কে 25 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ 1 থাকে, তা দেখানোর জন্য আমরা প্রমাণ করব যে, $6^n – 5n = 25k + 1$, যেখানে $k$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

আমরা পাই

$$(1 + a)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1a + {}^nC_2a^2 + \ldots + {}^nC_na^n$$

$a = 5$ হলে, আমরা পাই

$$(1 + 5)^n = {}^nC_0 + {}^nC_15 + {}^nC_25^2 + \ldots + {}^nC_n5^n$$

অর্থাৎ, $(6)^n = 1 + 5n + 5^2.{}^nC_2 + 5^3.{}^nC_3 + \ldots + 5^n$

অর্থাৎ, $6^n – 5n = 1+5^2 ({}^nC_2 + {}^nC_35 + \ldots + 5^{n-2})$

বা, $6^n – 5n = 1+ 25 ({}^nC_2 + 5 .{}^nC_3 + \ldots + 5^{n-2})$

বা, $6^n – 5n = 25k+1$ যেখানে $k = {}^nC_2 + 5 .{}^nC_3 + \ldots + 5^{n–2}$

এ থেকে বলা যায় যে $6^n – 5n$ কে 25 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ সর্বদাই 1 থাকে।

## অনুশীলনী 8.1

1 নং থেকে 5 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রত্যেকটি রাশিমালাকে বিস্তৃত করো :

**1.** $(1–2x)^5$ **2.** $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$ **3.** $(2x – 3)^6$

4. $\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{x}\right)^5$  5. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$

দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে নিচের প্রতিটির মান নির্ণয় করো :

6. $(96)^3$  7. $(102)^5$  8. $(101)^4$

9. $(99)^5$

10. দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে $(1.1)^{10000}$ অথবা 1000 এর মধ্যে কোনটি বৃহত্তর নির্ণয় করো।

11. $(a+b)^4-(a-b)^4$ এর মান নির্ণয় করো। এ থেকে $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$ এর মান বের করো।

12. $(x+1)^6+(x-1)^6$ এর মান বের করো। এর থেকে বা অন্যভাবে $(\sqrt{2}+1)^6+(\sqrt{2}-1)^6$ এর মান নির্ণয় করো।

13. দেখাও যে, $9^{n+1}-8n-9$ সর্বদাই 64 দিয়ে বিভাজ্য, যেখানে $n$ একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

14. প্রমাণ করো যে $\sum_{r=0}^{n} 3^r\ {}^n\mathrm{C}_r = 4^n$ ।

## 8.3 সাধারণপদ এবং মধ্যপদ (General and Middle Terms)

1. $(a+b)^n$ এর দ্বিপদ বিস্তৃতিতে আমরা লক্ষ করি যে প্রথম পদ হল ${}^n\mathrm{C}_0a^n$, দ্বিতীয় পদ ${}^n\mathrm{C}_1a^{n-1}b$, তৃতীয় পদ ${}^n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2$, এবং এভাবে চলতে থাকে। পর পর পদগুলোতে এই নমুনা লক্ষ করে আমরা বলতে পারি যে $(r+1)$ তম পদটি হল ${}^n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$। $(r+1)$ তম পদটিকে $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদও বলা হয়। এটি $\mathrm{T}_{r+1}$ দ্বারা সূচিত হয়।

   অতএব, $\mathrm{T}_{r+1}={}^n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r$ ।

2. $(a+b)^n$ -এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ সম্বন্ধে আমরা পাই,

   (i) যদি $n$ যুগ্ম হয়, তবে বিস্তৃতির পদসংখ্যা হয় $n+1$ । যেহেতু $n$ যুগ্ম, তাই $n+1$ অযুগ্ম।

   সুতরাং, মধ্যপদটি হল $\left(\frac{n+1+1}{2}\right)$ তম পদ অর্থাৎ, $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ।

   যেমন, $(x+2y)^8$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ হল $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ তম পদ অর্থাৎ পঞ্চম পদ।

   (ii) যদি $n$ অযুগ্ম হয়, তবে $n+1$ হয় যুগ্ম। তাই এক্ষেত্রে বিস্তৃতির মধ্যপদ হবে দুটি, যেমন, $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম পদ এবং $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ তম পদ । সুতরাং, $(2x-y)^7$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ দুটি

হল $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ তম অর্থাৎ, চতুর্থ পদ এবং $\left(\frac{7+1}{2}+1\right)$ তম পদ অর্থাৎ, পঞ্চম পদ।

**3.** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$, যেখানে $x \neq 0$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ হল $\left(\frac{2n+1+1}{2}\right)$ তম পদ অর্থাৎ, $(n+1)$ তম পদ, যেহেতু $2n$ যুগ্ম এবং

পদটি হল $^{2n}C_n x^n \left(\frac{1}{x}\right)^n = {}^{2n}C_n$ (ধ্রুবক) ।

এই পদটিকে $x$ নিরপেক্ষ পদ বা ধ্রুবক পদ বলা হয়।

**উদাহরণ 5** $(2 + a)^{50}$ এর বিস্তৃতির 17 তম ও 18 তম পদ দুটি সমান হলে $a$-এর মান বের করো।

**সমাধান** $(x + y)^n$ এর বিস্তৃতির $(r + 1)$ তম পদটি হল $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$।

17 তম পদের ক্ষেত্রে, আমরা পাই $r + 1 = 17$ অর্থাৎ, $r = 16$

সুতরাং, $T_{17} = T_{16+1} = {}^{50}C_{16}\ (2)^{50-16}\ a^{16}$

$= {}^{50}C_{16}\ 2^{34}\ a^{16}$

একইভাবে, $T_{18} = {}^{50}C_{17}\ 2^{33}\ a^{17}$

প্রদত্ত যে, $T_{17} = T_{18}$

সুতরাং, ${}^{50}C_{16}\ (2)^{34}\ a^{16} = {}^{50}C_{17}\ (2)^{33}\ a^{17}$

অতএব, $$\frac{{}^{50}C_{16}\ .2^{34}}{{}^{50}C_{17}\ .2^{33}} = \frac{a^{17}}{a^{16}}$$

অর্থাৎ, $$a = \frac{{}^{50}C_{16} \times 2}{{}^{50}C_{17}} = \frac{50!}{16!34!} \times \frac{17!\ .\ 33!}{50!} \times 2 = 1$$

**উদাহরণ 6** দেখাও যে $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদটি হল $\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!} 2n\, x^n$, যেখানে $n$ একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

**সমাধান** যেহেতু $2n$ যুগ্ম, $(1 + x)^{2n}$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদটি হল $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$তম পদ অর্থাৎ $(n + 1)$ তম পদ ।

যেহেতু, $\mathrm{T}_{n+1} = {}^{2n}\mathrm{C}_n (1)^{2n-n} (x)^n = {}^{2n}\mathrm{C}_n x^n = \dfrac{(2n)!}{n!\ n!} x^n$

$$= \frac{2n(2n-1)\ (2n-2)\ \ldots 4.3.2.1}{n!\ n!} x^n$$

$$= \frac{1.2.3.4\ldots(2n-2)(2n-1)(2n)}{n!n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5\ldots(2n-1)][2.4.6\ldots(2n)]}{n!n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]2^n[1.2.3\ldots n]}{n!n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]\,n!}{n!\ n!} 2^n . x^n$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!} 2^n\ x^n$$

**উদাহরণ 7** $(x + 2y)^9$-এর বিস্তৃতিতে $x^6y^3$ এর সহগ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** ধরো, $(x + 2y)^9$ এর বিস্তৃতির $(r + 1)$ তম পদে $x^6y^3$ আছে।

এখন, $\mathrm{T}_{r+1} = {}^9\mathrm{C}_r\, x^{9-r}\, (2y)^r = {}^9\mathrm{C}_r\, 2^r . x^{9-r} . y^r$ ।

$\mathrm{T}_{r+1}$ এবং $x^6y^3$ তে $x$ ও $y$ -এর ঘাতের তুলনা করে, আমরা পাই $r = 3$ ।

অতএব $x^6y^3$ এর সহগ হল —

$${}^9\mathrm{C}_3\, 2^3 = \frac{9!}{3!\,6!}.2^3 = \frac{9.8.7}{3.2}.2^3 = 672\ ।$$

**উদাহরণ 8** $(x + a)^n$ এর বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পদ যথাক্রমে 240, 720 ও 1080 । $x$, $a$ এবং $n$ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** প্রদত্ত যে দ্বিতীয় পদ $\mathrm{T}_2 = 240$

আমরা জানি, $\mathrm{T}_2 = {}^n\mathrm{C}_1 x^{n-1} .\ a$

অতএব, ${}^n\mathrm{C}_1 x^{n-1} .\ a = 240$ ... (1)

একইভাবে $\qquad {}^nC_2 x^{n-2} a^2 = 720 \qquad$ ... (2)

এবং $\qquad {}^nC_3 x^{n-3} a^3 = 1080 \qquad$ ... (3)

(2) কে (1) দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{{}^nC_2 x^{n-2} a^2}{{}^nC_1 x^{n-1} a} = \frac{720}{240} \quad \text{অর্থাৎ,} \quad \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \cdot \frac{a}{x} = 6$$

বা $$\frac{a}{x} = \frac{6}{(n-1)} \qquad \text{... (4)}$$

(3) কে (2) দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \qquad \text{... (5)}$$

(4) এবং (5) থেকে পাই,

$$\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)} \qquad \text{অতএব, } n = 5$$

এখন (1) থেকে পাই, $5x^4a = 240$ এবং (4) থেকে পাই, $\frac{a}{x} = \frac{3}{2}$

$a$ এবং $x$ এর জন্য এই সমীকরণগুলো সমাধান করে আমরা পাই, $x = 2$ এবং $a = 3$

**উদাহরণ 9** $(1 + a)^n$ এর বিস্তৃতির পরপর তিনটি পদের সহগ-এর অনুপাত 1: 7 : 42 হলে $n$ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** ধরো, $(1 + a)^n$ এর বিস্তৃতির পর পর তিনটি পদ হল $(r – 1)$ তম, $r$ তম এবং $(r + 1)$ তম পদ।

$(r – 1)$ তম পদ হল ${}^nC_{r-2}\, a^{r-2}$, এবং এর সহগ ${}^nC_{r-2}$ । একইভাবে, $r$ তম এবং $(r + 1)^{th}$ তম পদের সহগ যথাক্রমে ${}^nC_{r-1}$ এবং ${}^nC_r$ ।

যেহেতু সহগগুলো 1 : 7 : 42 অনুপাতে আছে, তাই আমরা পাই,

$$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{7}, \quad \text{অর্থাৎ,} \quad n - 8r + 9 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

এবং, $$\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{7}{42}, \quad \text{অর্থাৎ,} \quad n - 7r + 1 = 0 \qquad \text{... (2)}$$

(1) এবং (2) সমাধান করে আমরা পাই, $n = 55$ ।

## অনুশীলনী 8.2

সহগ নির্ণয় করো :

**1.** $(x + 3)^8$ এর বিস্তৃতিতে $x^5$ এর ।

**2.** $(a - 2b)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে $a^5b^7$ এর ।

নিম্নলিখিত বিস্তৃতিগুলোর সাধারণপদ লেখো :

**3.** $(x^2 - y)^6$

**4.** $(x^2 - yx)^{12}, x \neq 0.$

**5.** $(x - 2y)^{12}$ এর বিস্তৃতির চতুর্থ পদ নির্ণয় করো।

**6.** $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$, $x \neq 0$ এর বিস্তৃতির 13 তম পদটি নির্ণয় করো।

নিম্নলিখিত বিস্তৃতিগুলোর মধ্যপদগুলো নির্ণয় করো :

**7.** $\left(3 - \frac{x^3}{6}\right)^7$

**8.** $\left(\frac{x}{3} + 9y\right)^{10}$.

**9.** প্রমাণ করো যে, $(1 + a)^{m+n}$ এর বিস্তৃতিতে $a^m$ এবং $a^n$ এর সহগগুলো সমান।

**10.** $(x + 1)^n$ এর বিস্তৃতির $(r - 1)$ তম, $r$ তম এবং $(r + 1)$ তম পদের সহগগুলোর অনুপাত 1 : 3 : 5 হলে $n$ এবং $r$ নির্ণয় করো।

**11.** প্রমাণ করো যে, $(1 + x)^{2n}$ -এর বিস্তৃতিতে $x^n$ এর সহগ, $(1 + x)^{2n-1}$ এর বিস্তৃতিতে $x^n$ এর সহগ এর দ্বিগুণ।

**12.** $(1 + x)^m$ এর বিস্তৃতিতে $x^2$ এর সহগ 6 হলে $m$-এর একটি ধনাত্মক মান বের করো।

### *বিবিধ উদাহরণ*

**উদাহরণ 10** $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^6$ -এর বিস্তৃতিতে $x$ নিরপেক্ষ পদটি নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা পাই, $T_{r+1} = {}^6C_r \left(\frac{3}{2}x^2\right)^{6-r} \left(-\frac{1}{3x}\right)^r$

$$= {}^6C_r \left(\frac{3}{2}\right)^{6-r} \left(x^2\right)^{6-r} (-1)^r \left(\frac{1}{x}\right)^r \left(\frac{1}{3^r}\right)$$

$$= (-1)^r \ {}^6C_r \ \frac{(3)^{6-2r}}{(2)^{6-r}} \ x^{12-3r}$$

পদটি $x$ নিরপেক্ষ হবে যদি $x$-এর ঘাত শূন্য হয় অর্থাৎ $12 - 3r = 0$ হয় অর্থাৎ, $r = 4$ হয়।

অতএব, পঞ্চম পদটি $x$ নিরপেক্ষ পদ এবং পদটি হল $(-1)^4 \ {}^6C_4 \ \frac{(3)^{6-8}}{(2)^{6-4}} = \frac{5}{12}$ ।

**উদাহরণ 11** $(1 + a)^n$ এর বিস্তৃতিতে যদি $a^{r-1}$, $a^r$ এবং $a^{r+1}$ এর সহগগুলো সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে প্রমাণ করো যে, $n^2 - n(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$ ।

**সমাধান :** বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি হল ${}^nC_r a^r$ । তাই এটি দেখানো যেতে পারে যে $(r+1)$ তম পদটিতে $a^r$ আছে এবং এর সহগ হল ${}^nC_r$ । অতএব $a^{r-1}$, $a^r$ এবং $a^{r+1}$ এর সহগগুলো হল যথাক্রমে ${}^nC_{r-1}$, ${}^nC_r$ এবং ${}^nC_{r+1}$ । যেহেতু এই সহগগুলো সমান্তর প্রগতিতে আছে, তাই আমরা পাই ${}^nC_{r-1} + {}^nC_{r+1} = 2.{}^nC_r$ । এ থেকে পাওয়া যায়,

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = 2 \times \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

অর্থাৎ, $$\frac{1}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!} + \frac{1}{(r+1)(r)(r-1)!(n-r-1)!}$$

$$= 2 \times \frac{1}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!}$$

অর্থাৎ, $$\frac{1}{(r-1)! \ (n-r-1)!} \left[ \frac{1}{(n-r) \ (n-r+1)} + \frac{1}{(r+1) \ (r)} \right]$$

$$= 2 \times \frac{1}{(r-1)! \ (n-r-1)![r(n-r)]}$$

বা, $$\frac{1}{(n-r+1)(n-r)} + \frac{1}{r(r+1)} = \frac{2}{r(n-r)},$$

বা, $$\frac{r(r+1) + (n-r)(n-r+1)}{(n-r)(n-r+1) \ r(r+1)} = \frac{2}{r(n-r)}$$

বা, $r(r + 1) + (n - r) \ (n - r + 1) = 2 \ (r + 1) \ (n - r + 1)$

বা, $r^2 + r + n^2 - nr + n - nr + r^2 - r = 2(nr - r^2 + r + n - r + 1)$

বা, $n^2 - 4nr - n + 4r^2 - 2 = 0$

বা, $n^2 - n(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$

**উদাহরণ 12** দেখাও যে $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদটির সহগ, $(1+x)^{2n-1}$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ দুটির সহগগুলোর সমষ্টির সমান।

**সমাধান** যেহেতু $2n$ যুগ্ম, তাই $(1 + x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে একটি মাত্র মধ্যপদ থাকে এবং পদটি হল $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$-তম পদ অর্থাৎ, $(n + 1)$ তম পদ।

$(n + 1)$ তম পদটি হল ${}^{2n}C_n x^n$। এতে $x^n$ এর সহগ হল ${}^{2n}C_n$ ।

একইভাবে, $(2n-1)$ অযুগ্ম হওয়ায়, অপর বিস্তৃতিটির দুটি মধ্যপদ আছে এবং পদগুলো হল $\left(\frac{2n-1+1}{2}\right)$ তম এবং $\left(\frac{2n-1+1}{2}+1\right)$তম পদ অর্থাৎ, $n$ তম এবং $(n + 1)$ তম পদ। এ পদগুলোর সহগ যথাক্রমে ${}^{2n-1}C_{n-1}$ এবং ${}^{2n-1}C_n$ ।

এখন, ${}^{2n-1}C_{n-1} + {}^{2n-1}C_n = {}^{2n}C_n$ [যেহেতু, ${}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_r = {}^{n+1}C_r$] । (প্রমাণিত)

**উদাহরণ 13** দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$ গুণফল থেকে $a^4$ এর সহগ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা প্রথমে দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে প্রদত্ত গুণফলের প্রতিটি উৎপাদককে বিস্তৃত করি। আমরা পাই,

$$(1 + 2a)^4 = {}^4C_0 + {}^4C_1 (2a) + {}^4C_2 (2a)^2 + {}^4C_3 (2a)^3 + {}^4C_4 (2a)^4$$
$$= 1 + 4(2a) + 6(4a^2) + 4(8a^3) + 16a^4.$$
$$= 1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4$$

এবং $$(2 - a)^5 = {}^5C_0 (2)^5 - {}^5C_1 (2)^4 (a) + {}^5C_2 (2)^3 (a)^2 - {}^5C_3 (2)^2 (a)^3 + {}^5C_4 (2)(a)^4 - {}^5C_5 (a)^5$$
$$= 32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5$$

এভাবে, $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$

$$= (1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4)(32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5)$$

দুটি বন্ধনীর সম্পূর্ণ গুণ করে সবগুলো পদ লেখার প্রয়োজন নেই। আমরা শুধুমাত্র $a^4$ যুক্ত পদগুলো লিখবো। এটি করা যেতে পারে যদি আমরা লক্ষ করি যে $a^r. a^{4-r} = a^4$। $a^4$ যুক্ত পদগুলো হল–

$$1(10a^4) + (8a)(-40a^3) + (24a^2)(80a^2) + (32a^3)(-80a) + (16a^4)(32) = -438a^4$$

অতএব , প্রদত্ত গুণফলে $a^4$ এর সহগ – 438

**উদাহরণ 14** $(x + a)^n$ এর বিস্তৃতিতে শেষদিক থেকে $r$ -তম পদটি নির্ণয় করো।

**সমাধান :** $(x + a)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(n + 1)$ সংখ্যক পদ আছে। পদগুলো লক্ষ করে আমরা বলতে পারি যে শেষদিক থেকে প্রথম পদটিই হল শেষপদ অর্থাৎ, বিস্তৃতির $(n + 1)$ তম পদ এবং $n + 1 = (n + 1) – (1 – 1)$। শেষদিক থেকে দ্বিতীয় পদটি হল বিস্তৃতির $n$ -তম পদ, এবং $n = (n + 1) – (2 – 1)$ । শেষদিক থেকে তৃতীয় পদটি হল বিস্তৃতির $(n – 1)$ তম পদ এবং $n – 1 = (n + 1) – (3 – 1)$ এবং এভাবে চলতে থাকবে। তাই শেষদিক থেকে $r$ তম পদটি হবে বিস্তৃতির $(n + 1) – (r – 1) = (n – r + 2)$ তম পদ এবং $(n – r + 2)$ তম পদটি হল ${}^nC_{n-r+1}\, x^{r-1}\, a^{n-r+1}$।

**উদাহরণ 15** $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$, $x > 0$ এর বিস্তৃতির $x$ নিরপেক্ষ পদটি নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা পাই, $T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\sqrt[3]{x}\right)^{18-r} \left(\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^r$

$$= {}^{18}C_r\, x^{\frac{18-r}{3}} \cdot \frac{1}{2^r . x^{\frac{r}{3}}} \quad = {}^{18}C_r \frac{1}{2^r} . x^{\frac{18-2r}{3}}$$

যেহেতু আমাদের $x$ নিরপেক্ষ পদ বের করতে হবে, তাই $\dfrac{18 - 2r}{3} = 0$ , যা থেকে আমরা পাই $r = 9$।

সুতরাং, নির্ণেয় $x$ নিরপেক্ষ পদটি হল ${}^{18}C_9 \dfrac{1}{2^9}$ ।

**উদাহরণ 16** $\left(x - \dfrac{3}{x^2}\right)^m$, যেখানে $x \neq 0$ ও $m$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা, এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদের সহগগুলোর সমষ্টি 559 । বিস্তৃতিতে $x^3$ যুক্ত পদটি বের করো।

**সমাধান :** $\left(x - \dfrac{3}{x^2}\right)^m$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদের সহগ হল যথাক্রমে ${}^mC_0$, $(–3)\, {}^mC_1$ এবং $9\, {}^mC_2$ । সুতরাং, প্রদত্ত শর্তানুসারে আমরা পাই,

$${}^mC_0 - 3\, {}^mC_1 + 9\, {}^mC_2 = 559, \quad \text{অর্থাৎ,} \quad 1 - 3m + \frac{9m\,(m-1)}{2} = 559$$

যা থেকে পাওয়া যায়, $m = 12$ (যেহেতু $m$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা) ।

এখন, $$T_{r+1} = {}^{12}C_r x^{12-r}\left(-\frac{3}{x^2}\right)^r = {}^{12}C_r (-3)^r \cdot x^{12-3r}$$

যেহেতু, আমাদের $x^3$ যুক্ত পদটি প্রয়োজন, তাই ধরো, $12 - 3r = 3$ অর্থাৎ, $r = 3$.

অতএব, নির্ণেয় পদটি হল ${}^{12}C_3 (-3)^3 x^3$, অর্থাৎ, $-5940\, x^3$ ।

**উদাহরণ 17** $(1 + x)^{34}$ এর বিস্তৃতিতে যদি $(r - 5)$ তম এবং $(2r - 1)$ তম পদের সহগ সমান হয়, তবে $r$ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** $(1 + x)^{34}$ এর বিস্তৃতির $(r - 5)$ তম এবং $(2r - 1)$ তম পদের সহগ যথাক্রমে ${}^{34}C_{r-6}$ এবং ${}^{34}C_{2r-2}$ । যেহেতু তারা সমান তাই ${}^{34}C_{r-6} = {}^{34}C_{2r-2}$

সুতরাং , হয় $r - 6 = 2r - 2$ অথবা $r-6 = 34 - (2r - 2)$

[যদি ${}^nC_r = {}^nC_p$ হয়, তবে $r = p$ অথবা $r = n - p$]

অতএব, আমরা পাই $r = -4$ অথবা $r = 14$ । যেহেতু $r$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা, তাই $r = -4$ অসম্ভব। সুতরাং , $r = 14$ ।

## *অধ্যায় 8-এর বিবিধ অনুশীলনী*

1. $(a + b)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে 729, 7290 এবং 30375 হয়, তবে $a$, $b$ এবং $n$ এর মান নির্ণয় করো।
2. $(3 + ax)^9$ এর বিস্তৃতিতে $x^2$ এবং $x^3$ এর সহগ সমান হলে $a$ নির্ণয় করো।
3. দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগে $(1 + 2x)^6 (1 - x)^7$ গুণফল থেকে $x^5$ এর সহগ নির্ণয় করো।
4. যদি $a$ ও $b$ ভিন্ন অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $a^n - b^n$ এর একটি উৎপাদক হল $a - b$, যখন $n$ একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

   [**ইঙ্গিত :** $a^n = (a - b + b)^n$ লেখো এবং বিস্তৃত করো]
5. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6$ এর মান নির্ণয় করো।
6. $\left(a^2+\sqrt{a^2-1}\right)^4 + \left(a^2-\sqrt{a^2-1}\right)^4$ এর মান নির্ণয় করো।
7. $(0.99)^5$ এর বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদ ব্যবহার করে এর আসন্ন মান নির্ণয় করো।
8. $\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ এর বিস্তৃতির শুরু থেকে পঞ্চম পদ এবং শেষদিক থেকে পঞ্চম পদ দুটির অনুপাত যদি $\sqrt{6}:1$ হয়, তবে $n$-এর মান নির্ণয় করো।

**9.** দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$ কে বিস্তৃত করো।

**10.** দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$ -এর বিস্তৃতি নির্ণয় করো।

## *সারসংক্ষেপ*

- দ্বিপদ উপপাদ্যটি হল $n$ এর ধনাত্মক অখণ্ড মানে একটি দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতি, যা হল
  $(a+b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + ...+ {}^nC_{n-1}a.b^{n-1} + {}^nC_nb^n$ ।
- বিস্তৃতির সহগগুলো একটি সজ্জায় সাজানো থাকে। এই সজ্জাটিকে *পাস্কাল ত্রিভুজ* বলা হয়।
- $(a+b)^n$ বিস্তৃতির সাধারণ পদ হল $T_{r+1} = {}^nC_ra^{n-r}.b^r$ ।
- $(a+b)^n$ বিস্তৃতিতে, যদি $n$ যুগ্ম হয়, তবে মধ্যপদটি হবে $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ। যদি $n$ অযুগ্ম হয়, তবে মধ্যপদগুলো হবে $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ এবং $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ তম পদ।

## *ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট*

প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞরা $(x+y)^n, 0 \le n \le 7$ এর বিস্তৃতির সহগ সম্পর্কে জানতেন। গণিতজ্ঞ পিঙ্গালা (Pingala), তাঁর রচিত পুস্তক *Chhanda shastra* (200B.C.) তে এই সহগগুলোকে চিত্রাকারে বিন্যস্ত করেন যাকে বলা হয় *মেরু-প্রস্তর* (*Meru-Prastara*)। এই ত্রিভুজাকার সজ্জা চৈনিক গণিতজ্ঞ Chu-shi-kie (1303) এর পুস্তকেও পাওয়া গিয়েছিল। জার্মান গণিতজ্ঞ Michael Stipel (1486-1567) আনুমানিক 1544 খ্রিস্টাব্দে দ্বিপদ সহগ শব্দটি প্রথম ব্যবহার করেন। তাছাড়া Bombelli (1572) ও $(a+b)^n$ বিস্তৃতির সহগ $n = 1, 2, ...,7$ পর্যন্ত গণনা করেন এবং Oughtred (1631), $n = 1, 2,..., 10$ পর্যন্ত সহগগুলো বর্ণনা করেন। পাটিগণিতীয় ত্রিভুজ (arithmetic triangle) যা পাস্কেলের ত্রিভুজ হিসেবে জনপ্রিয় এবং একইভাবে গণিতজ্ঞ Pingala এর মেরু-প্রস্তর ফ্রেঞ্চ গণিতজ্ঞ Blaise Pascal (1623-1662) 1665 খ্রিস্টাব্দে গঠন করেছিলেন।

অখণ্ড মান $n$ এর জন্য দ্বিপদ উপপাদ্যের আধুনিক আকার পাস্কেল রচিত *Trate du triange arithmetic* পুস্তকে লেখা হয়েছিল, যা 1665 সালে উনার মৃত্যুর পর প্রকাশিত হয়েছে।

অধ্যায় 9

# অনুক্রম ও শ্রেণি
# (SEQUENCES AND SERIES)

❖ *Natural numbers are the product of human spirit. – DEDEKIND* ❖

## 9.1 ভূমিকা

ফিবোনাচ্চি (Fibonacci)
(1175-1250 খ্রিঃ)

সাধারণ ইংরেজি অর্থেই গণিতে "*sequence*" (অনুক্রম) শব্দটি ব্যবহৃত হয়। যখন আমরা বলি কিছু বস্তুর সংগ্রহ অনুক্রমে তালিকাবদ্ধ আছে, তখন আমরা সাধারণত বুঝতে পারি সংগ্রহকে এরূপ ক্রমে সাজানো হয়েছে যে, আমরা তার প্রথম সদস্য, দ্বিতীয় সদস্য, তৃতীয় সদস্য এবং পরবর্তী সদস্যদের চিহ্নিত করতে পারি। উদাহরণস্বরূপ, বিভিন্ন সময়ের ব্যবধানে জনসংখ্যা অথবা ব্যাকটেরিয়ার বৃদ্ধি একটি অনুক্রম গঠন করে। কয়েক বছর ধরে ব্যাংকে জমা দেওয়া অর্থ (টাকা) একটি অনুক্রম গঠন করে। কোনও পণ্যের মূল্যের অবনমন একটি অনুক্রমে হয়ে থাকে। সুতরাং মানুষের কার্যকলাপের বিভিন্ন ক্ষেত্রেই অনুক্রমের গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার রয়েছে।

অনুক্রম, একটি নির্দিষ্ট নমুনা বা প্যাটার্ন (*pattern*) অনুসরণ করলে তাকে বলা হয় প্রগতি (*progression*)। আগের শ্রেণিতে তোমরা সমান্তর প্রগতি [*arithmetic progression* (A.P)] সম্বন্ধে পড়েছ। এই অধ্যায়ে আমরা সমান্তর প্রগতি সম্পর্কে আরও আলোচনার পাশাপাশি *সমান্তরীয় মধ্যক (arithmetic mean or A.M.), গুণোত্তরীয় মধ্যক (geometric mean or G.M.), সমান্তরীয় ও গুণোত্তরীয় মধ্যকের মধ্যে সম্পর্ক, পর পর $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বিশেষ শ্রেণির যোগফল, $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি এবং $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন-এর সমষ্টি নির্ণয়* সম্বন্ধেও অধ্যয়ন করব।

## 9.2 অনুক্রম (Sequences)

এসো আমরা নীচের উদাহরণগুলো দেখি :

ধরে নাও, এখানে একটি প্রজন্মের পার্থক্য 30 বৎসর, আমরা কোনো ব্যক্তির আনুমানিক 300 বছরের উপর পূর্বপুরুষের অর্থাৎ মা-বাব, দাদু-দিদা, বড়ো দাদু-বড়ো দিদা ইত্যাদির সংখ্যা নির্ণয় করতে বলব।

এখানে পূর্বপুরুষের মোট সংখ্যা $= \dfrac{300}{30} = 10$

প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ..., দশম প্রজন্মের জন্য ব্যক্তির পূর্বপুরুষের সংখ্যা হল 2, 4, 8, 16, 32, …, 1024। এই সংখ্যাগুলো একটি অনুক্রম গঠন করে, এটি আমরা বলতে পারি।

10 কে 3 দিয়ে ভাগ করার সময় ভাগের বিভিন্ন ধাপে পর পর প্রাপ্ত ভাগফলগুলো বিচার করো। এই পদ্ধতিতে আমরা পাই 3,3.3,3.33,3.333, ... এবং এরূপে চলবে। এই ভাগফলগুলোও একটি অনুক্রম গঠন করে। একটি অনুক্রমে যে সংখ্যাগুলো থাকে তাদের আমরা পদ (*term*) বলি। অনুক্রমের পদগুলোকে আমরা $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ইত্যাদি দিয়ে প্রকাশ করি। প্রত্যেক পদের সাথে লেখা সংখ্যাগুলো তার অবস্থান নির্দেশ করছে। $n$-তম পদটি অনুক্রমটির $n$-তম স্থানকে নির্দেশ করে এবং তাকে $a_n$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। এই $n$-তম পদটিকে অনুক্রমের *সাধারণ পদ* (*general term*)ও বলা হয়।

অতএব, উপরে প্রদত্ত ব্যক্তির প্রজন্মের পূর্বপুরুষের সংখ্যার অনুক্রমে পদগুলো হল

$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ \ldots,\ a_{10} = 1024$।

অনুরূপে, ক্রমিক ভাগফলের উদাহরণে

$a_1 = 3, a_2 = 3.3, a_3 = 3.33, \ldots, a_6 = 3.33333$, ইত্যাদি।

যে অনুক্রমে পদ সংখ্যা সসীম (*finite*) তাকে বলা হয় *সসীম অনুক্রম*। উদাহরণস্বরূপ, পূর্বপুরুষের সংখ্যার অনুক্রমটি সসীম অনুক্রম কারণ এটিতে 10টি পদ (একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা) আছে।

একটি অনুক্রমকে *অসীম* বলা হবে যদি এটি সসীম অনুক্রম না হয়। উদাহরণস্বরূপ, উপরের ক্রমিক ভাগফলের অনুক্রমটি একটি *অসীম অনুক্রম*, অসীম এই অর্থে যে এটি কখনোই শেষ হয় না।

অনুক্রমের বিভিন্ন পদগুলোকে বীজগাণিতিক সূত্রের মাধ্যমে প্রায়ই প্রকাশ করা সম্ভব হয়। উদাহরণস্বপূর, স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার অনুক্রম 2, 4, 6, … কে ধরে নাও।

এখানে,

$$
\begin{array}{ll}
a_1 = 2 = 2 \times 1 & a_2 = 4 = 2 \times 2 \\
a_3 = 6 = 2 \times 3 & a_4 = 8 = 2 \times 4 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_{23} = 46 = 2 \times 23, & a_{24} = 48 = 2 \times 24, \text{ ইত্যাদি।}
\end{array}
$$

বস্তুতঃ, আমরা দেখতে পাচ্ছি এই অনুক্রমটির $n$-তম পদটিকে $a_n = 2n$ লেখা যেতে পারে, যেখানে $n$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। অনুরূপে, স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার অনুক্রম 1,3,5, …, এর $n$-তম পদের সূত্র হবে $a_n = 2n - 1$, যেখানে $n$ হল স্বাভাবিক সংখ্যা।

কিছু সংখ্যক ক্ষেত্রে সংখ্যার সজ্জা, যেমন 1, 1, 2, 3, 5, 8,.. এর কোনো স্পষ্ট প্যাটার্ন বা নমুনা নেই, কিন্তু অনুক্রমটি সৃষ্টি হয়েছে আবৃত্ত সম্পর্ক দিয়ে যা নিম্নরূপ—

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_2 = 1 \\
&a_3 = a_1 + a_2 \\
&a_n = a_{n-2} + a_{n-1},\ n > 2
\end{aligned}
$$

এই অনুক্রমটিকে বলে *ফিবোনাচ্চি অনুক্রম* (*Fibonacci sequence*)।

মৌলিক সংখ্যার অনুক্রম 2,3,5,7,..., তে আমরা দেখি যে এখানে $n$ -তম মৌলিক সংখ্যাটি নির্ণয় করার কোনও সূত্র নেই। এরকম অনুক্রমকে কেবলমাত্র মৌখিকভাবে বর্ণনা করা যায়।

প্রত্যেক অনুক্রমে আমরা আশা করতে পারি না যে তার পদগুলোকে একটি বিশেষ সূত্রে প্রকাশ করা যাবে। তারপরেও আমরা আশা করতে পারি একটি তত্ত্বগত পরিকল্পনা বা নিয়ম যা দিয়ে $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ পদগুলো পরপর সৃষ্টি হয়েছে।

উপরের তথ্য অনুযায়ী, *একটি অনুক্রমকে আমরা একটি অপেক্ষক (function) রূপে দেখতে পারি যার ক্ষেত্র (domain) হল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট অথবা তার কোনো উপ-সেট (subset) {1, 2, 3,...k} আকারের। কোনো কোনো ক্ষেত্রে আমরা $a_n$ কে অপেক্ষকের প্রতীক $a(n)$) রূপে ব্যবহার করি।*

## 9.3 শ্রেণি (Series)

ধরো $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, একটি প্রদত্ত অনুক্রম। তাহলে রাশিমালা $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ কে বলা হবে *প্রদত্ত অনুক্রম সম্পর্কিত শ্রেণি* (*series associated with the given sequence*)। শ্রেণিটি সসীম বা অসীম হবে যখন অনুক্রমটি যথাক্রমে সসীম বা অসীম হয়। শ্রেণিকে সংক্ষিপ্ত রূপে প্রকাশ করা হয় *সিগমা সংকেতের* সাহায্যে। এর জন্য গ্রিক অক্ষর Σ (সিগ্‌মা) ব্যবহার করা হয় যার অর্থ হল সংযুক্ত করা। অতএব, শ্রেণি $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ কে সংক্ষিপ্ত রূপে লেখা হয় $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ।

**মন্তব্য :** শ্রেণি ব্যবহার হয় যোগের আকারে দেখানোর জন্য, এটি দিয়ে যোগফলকে বোঝায় না। উদাহরণস্বরূপ, $1 + 3 + 5 + 7$ একটি সসীম শ্রেণি যার চারটি পদ আছে। যখন আমরা বলব "একটি শ্রেণির যোগফল", এটি বলতে আমরা বুঝব ঐ সংখ্যাটি, যা পদসংখ্যাগুলোর যোগফল, এখানে শ্রেণিটির যোগফল হল 16 ।

এখন, আমরা কিছু উদাহরণ বিবেচনা করব।

**উদাহরণ 1** নিম্নে প্রদত্ত অনুক্রমের নিয়ম অনুযায়ী প্রতি ক্ষেত্রে অনুক্রমের প্রথম তিনটি পদ লেখো :

(i) $a_n = 2n + 5$, (ii) $a_n = \dfrac{n-3}{4}$ ।

**সমাধান** (i) এখানে, $a_n = 2n + 5$

$n = 1, 2, 3$, বসিয়ে আমরা পাই

$a_1 = 2(1) + 5 = 7, \quad a_2 = 9, \quad a_3 = 11$

সুতরাং, নির্ণেয় পদগুলো হল 7, 9 এবং 11 ।

(ii) এখানে $a_n = \dfrac{n-3}{4}$ ।

সুতরাং, $a_1 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}, a_2 = -\dfrac{1}{4}, a_3 = 0$

অতএব, প্রথম তিনটি পদ হল $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$ এবং 0 ।

**উদাহরণ 2** $a_n = (n-1)(2-n)(3+n)$ দিয়ে সংজ্ঞায়িত অনুক্রমটির 20 -তম পদটি কী?

**সমাধান** $n = 20$ বসিয়ে আমরা পাই

$$a_{20} = (20-1)(2-20)(3+20)$$
$$= 19 \times (-18) \times (23) = -7866 \text{ ।}$$

**উদাহরণ 3** একটি অনুক্রম $a_n$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত :

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 2 \text{ যখন } n \geq 2 \text{ ।}$$

প্রথম পাঁচটি পদ নির্ণয় করো এবং অনুরূপ শ্রেণিটি লেখো।

**সমাধান** আমরা পাই

$$a_1 = 1, a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3, a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5,$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7, a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9 \text{ ।}$$

সুতরাং, অনুক্রমটির প্রথম পাঁচটি পদ হল 1,3,5,7 এবং 9 । অনুরূপ শ্রেণিটি হল $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$

## অনুশীলনী 9.1

1 থেকে 6 নং প্রশ্নের প্রত্যেকটি অনুক্রমের প্রথম পাঁচটি পদ লেখো যাদের $n$ -তম পদটি প্রদত্ত :

**1.** $a_n = n(n+2)$ **2.** $a_n = \frac{n}{n+1}$ **3.** $a_n = 2^n$

**4.** $a_n = \frac{2n-3}{6}$ **5.** $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$ **6.** $a_n = n\frac{n^2+5}{4}$ ।

7 থেকে 10 নং প্রশ্নের প্রত্যেকটি অনুক্রমের $n$ -তম পদের পাশে দেওয়া পদগুলো নির্ণয় করো :

**7.** $a_n = 4n - 3;\ a_{17}, a_{24}$ **8.** $a_n = \frac{n^2}{2^n};\ a_7$

**9.** $a_n = (-1)^{n-1} n^3;\ a_9$ **10.** $a_n = \frac{n(n-2)}{n+3};\ a_{20}$ ।

11 থেকে 13 নং প্রশ্নে প্রদত্ত প্রত্যেকটি অনুক্রমের প্রথম পাঁচটি পদ লেখ এবং অনুরূপ শ্রেণিটি নির্ণয় করো :

**11.** $a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 2$ সব $n > 1$ এর জন্য।

**12.** $a_1 = -1, a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}, n \geq 2$

**13.** $a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1, n > 2$ ।

**14.** ফিবোনাচ্চি অনুক্রম (*Fibonacci sequence*) নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত হয়

$1 = a_1 = a_2$ এবং $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$ ।

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, নির্ণয় করো যখন $n = 1, 2, 3, 4, 5$

## 9.4 সমান্তর প্রগতি (Arithmetic Progression [A.P.])

চলো আমরা কিছু সূত্র এবং বৈশিষ্ট্য মনে করি যেগুলো আগে পড়েছি।

একটি অনুক্রম $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ কে *সমান্তর অনুক্রম বা সমান্তর প্রগতি* বলা হবে যদি $a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbf{N}$ হয়, যেখানে $a_1$ হল *প্রথম পদ* (*first term*) এবং ধ্রুবক পদ $d$ কে বলা হবে সমান্তর প্রগতির (A.P.) *সাধারণ অন্তর* (*common difference*)।

একটি সমান্তর প্রগতি (তার সাধারণ রূপে) ধরি, যার প্রথম পদ $a$ এবং সাধারণ অন্তর $d$, অর্থাৎ, $a, a + d, a + 2d, \ldots$ তখন, সমান্তর প্রগতির (A.P.) $n$ -তম পদ (সাধারণ পদ) হবে $a_n = a + (n - 1) d$ ।

আমরা, সমান্তর প্রগতির নিম্নলিখিত সরল বৈশিষ্ট্যগুলো পরীক্ষা করতে পারি :

(i) যদি সমান্তর প্রগতির প্রত্যেক পদের সাথে একটি ধ্রুবক যোগ করা হয়, তবে প্রাপ্ত অনুক্রমটিও একটি সমান্তর প্রগতি হবে।

(ii) যদি সমান্তর প্রগতির প্রত্যেক পদ থেকে একটি ধ্রুবক বিয়োগ করা হয়, তবে প্রাপ্ত অনুক্রমটিও একটি সমান্তর প্রগতি হবে।

(iii) যদি সমান্তর প্রগতির প্রত্যেক পদকে একটি ধ্রুবক দিয়ে গুণ করা হয়, তবে প্রাপ্ত অনুক্রমটিও একটি সমান্তর প্রগতি হয়।

(iv) যদি সমান্তর প্রগতির প্রত্যেক পদকে একটি অশূন্য ধ্রুবক দিয়ে ভাগ করা হয়, তবে প্রাপ্ত অনুক্রমটিও একটি সমান্তর প্রগতি হবে।

এখানে, আমরা সমান্তর প্রগতির জন্য নিম্নলিখিত সংকেতগুলো ব্যবহার করব :

$a =$ প্রথম পদ, $l =$ শেষ পদ, $d =$ সাধারণ অন্তর,

$n =$ পদ সংখ্যা।

$S_n =$ সমান্তর প্রগতির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি।

ধরো, $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1) d$ হল একটি সমান্তর প্রগতি।

সুতরাং, $l = a + (n - 1) d$ ।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

আমরা আরও লেখতে পারি, $S_n = \frac{n}{2}[a+l]$

চলো কিছু উদাহরণ দেখি।

**উদাহরণ 4** যদি একটি সমান্তর প্রগতির $m$ -তম পদ $n$ এবং $n$ -তম পদ $m$ হয়, যেখানে $m \neq n$, তবে $p$ -তম পদটি নির্ণয় করো।

**সমাধান** আমরা পাই $\quad a_m = a + (m - 1)\, d = n,$ ... (1)

এবং $\quad a_n = a + (n - 1)\, d = m$ ... (2)

(1) ও (2) সমাধান করে আমরা পাই

$(m - n)\, d = n - m,$ বা $d = -1,$ ... (3)

এবং $\quad a = n + m - 1$ ... (4)

সুতরাং $\quad a_p = a + (p - 1)d$

$= n + m - 1 + (p - 1)(-1) = n + m - p$

সুতরাং, $p$ -তম পদটি হল $n + m - p$ ।

**উদাহরণ 5** যদি একটি সমান্তর প্রগতির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$ হয়, যেখানে P এবং Q ধ্রুবক। তবে সাধারণ অন্তর নির্ণয় করো।

**সমাধান** ধরো, $a_1, a_2, \ldots a_n$ একটি সমান্তর প্রগতি। অতএব,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$$

সুতরাং, $\quad S_1 = a_1 = P,\ S_2 = a_1 + a_2 = 2P + Q$

এজন্য $\quad a_2 = S_2 - S_1 = P + Q$

সুতরাং, সাধারণ অন্তর হবে $d = a_2 - a_1 = (P + Q) - P = Q$ ।

**উদাহরণ 6** দুটি সমান্তর প্রগতির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টির অনুপাত $(3n + 8) : (7n + 15)$। তাদের 12 -তম পদের অনুপাত নির্ণয় করো।

**সমাধান** ধরো, $a_1, a_2$ এবং $d_1, d_2$ যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর। প্রদত্ত শর্তানুযায়ী আমরা পাই—

$$\frac{\text{প্রথম সমান্তর প্রগতির } n \text{ সংখ্যক পদের সমষ্টি}}{\text{দ্বিতীয় সমান্তর প্রগতির } n \text{ সংখ্যক পদের সমষ্টি}} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

বা, $$\frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]}=\frac{3n+8}{7n+15}$$

বা, $$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2}=\frac{3n+8}{7n+15} \quad \text{... (1)}$$

এখন, $$\frac{\text{প্রথম সমান্তর প্রগতির 12 -তম পদ}}{\text{দ্বিতীয় সমান্তর প্রগতির 12 -তম পদ}}=\frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}$$

$$\frac{2a_1+22d_1}{2a_2+22d_2}=\frac{3\times23+8}{7\times23+15}$$ [(1) নং সমীকরণে $n = 23$ বসিয়ে]

সুতরাং, $$\frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}=\frac{\text{প্রথম সমান্তর প্রগতির 12 -তম পদ}}{\text{দ্বিতীয় সমান্তর প্রগতির 12 -তম পদ}}=\frac{7}{16}$$

অতএব, নির্ণেয় অনুপাত হল 7 : 16

**উদাহরণ 7** এক ব্যক্তির প্রথম বছরের আয় 3,00,000 টাকা এবং পরবর্তী 19 বছরে তার বেতন বৃদ্ধি পায় 10,000 টাকা প্রতি বছর হারে। 20 বছরে তার মোট আয় নির্ণয় করো।

**সমাধান** এখানে আমরা একটি সমান্তর প্রগতি পাই, যার $a = 3,00,000$, $d = 10,000$, এবং $n = 20$ সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র ব্যবহার করে আমরা পাই

$$S_{20}=\frac{20}{2}[600000+19\times10000]=10\,(790000)=79,00,000.$$

অতএব, ঐ ব্যক্তি 20 বছরের শেষে মোট 79,00,000 টাকা পেয়েছিলেন।

**9.4.1 সমান্তরীয় মধ্যক (*Arithmetic mean*)** প্রদত্ত দুটি সংখ্যা $a$ এবং $b$ আমরা এই সংখ্যা দুটির মাঝখানে একটি সংখ্যা A বসাতে পারি যাতে $a$, A, $b$ একটি সমান্তর প্রগতি (A.P.) হয়। এরূপ সংখ্যা A কে, $a$ ও $b$ সংখ্যা দুটির *সমান্তরীয় মধ্যক (arithmetic mean* [A.M.]*)* বলে। লক্ষ করো, এক্ষেত্রে আমরা পাই,

$$A-a=b-A, \quad \text{অর্থাৎ, } A=\frac{a+b}{2}$$

আমরা $a$ ও $b$ সংখ্যা দুটির সমান্তরীয় মধ্যককে তাদের গড় $\frac{a+b}{2}$ রূপেও ব্যাখ্যা করতে পারি।

উদাহরণস্বরূপ, 4 এবং 16 সংখ্যা দুটির সমান্তরীয় মধ্যক 10 । অতএব, 4 ও 16 এর মাঝখানে 10 কে বসিয়ে আমরা একটি সমান্তর প্রগতি 4, 10, 16 গঠন করতে পারি। এখন একটি স্বাভাবিক প্রশ্ন উঠছে : আমরা কি

প্রদত্ত দুটি সংখ্যার মাঝখানে দুই বা তার চেয়ে বেশি সংখ্যা বসাতে পারব যাতে নির্ণেয় অনুক্রমটি একটি সমান্তর প্রগতি হবে? লক্ষ করো 8 এবং 12 সংখ্যা দুটি, 4 এবং 16 এর মাঝখানে বসালে নির্ণেয় অনুক্রম 4, 8, 12, 16 একটি সমান্তর প্রগতি হয়। আরও সাধারণভাবে, দুটি প্রদত্ত সংখ্যা $a$ ও $b$ -এর মাঝখানে আমরা যতগুলো ইচ্ছা সংখ্যা বসাতে পারি যাতে নির্ণেয় অনুক্রমটি একটি সমান্তর প্রগতি হয়।

ধরো $a$ ও $b$ সংখ্যা দুটির মাঝখানে $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ হল এরূপ $n$ সংখ্যক সংখ্যা যাতে $a, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, b$ একটি সমান্তর প্রগতি হয়।

এখানে, $b$ হল $(n + 2)$ -তম পদ, অর্থাৎ, $b = a + [(n + 2) - 1]d$

$$= a + (n + 1)\, d \text{ ।}$$

এটি থেকে পাবে,
$$d = \frac{b-a}{n+1} \text{ ।}$$

অতএব, $a$ ও $b$ এর মাঝখানে $n$ সংখ্যক সংখ্যাগুলো নিম্নরূপ :

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

..... ..... ..... .....
..... ..... ..... .....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1} \text{ ।}$$

**উদাহরণ 8** 3 এবং 24 এর মাঝখানে 6 টি সংখ্যা বসাও যাতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি একটি সমান্তর প্রগতি হয়।

**সমাধান** ধরো, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ ও $A_6$ হল 3 এবং 24 এর মধ্যবর্তী 6 টি সংখ্যা যেখানে $3, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, 24$ একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে। এখানে, $a = 3$, $b = 24$, $n = 8$ ।

সুতরাং, $24 = 3 + (8 - 1)\, d$, এটি থেকে পাই $d = 3$ ।

অতএব, $A_1 = a + d = 3 + 3 = 6$; $A_2 = a + 2d = 3 + 2 \times 3 = 9$;
$A_3 = a + 3d = 3 + 3 \times 3 = 12$; $A_4 = a + 4d = 3 + 4 \times 3 = 15$;
$A_5 = a + 5d = 3 + 5 \times 3 = 18$; $A_6 = a + 6d = 3 + 6 \times 3 = 21$ ।

অতএব, 3 এবং 24 এর মধ্যবর্তী 6টি সংখ্যা হল 6, 9, 12, 15, 18 এবং 21 ।

## অনুশীলনী 9.2

1. 1 থেকে 2001 পর্যন্ত বিজোড় পূর্ণসংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় করো।
2. 100 এবং 1000 এর মধ্যবর্তী 5 এর গুণিতক সবগুলো স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় করো।
3. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ 2 এবং প্রথম পাঁচটি পদের যোগফল, পরবর্তী পাঁচটি পদের যোগফলের এক-চতুর্থাংশে। দেখাও যে, 20 -তম পদটি হল $-112$ ।
4. সমান্তর প্রগতি $-6, \ -\dfrac{11}{2}, -5, \ldots$ এর কয়টি পদ প্রয়োজন, যাদের যোগফল $-25$ হবে?
5. যদি একটি সমান্তর প্রগতির $p$ -তম পদ $\dfrac{1}{q}$ এবং $q$ -তম পদ $\dfrac{1}{p}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, প্রথম $pq$ সংখ্যক পদের সমষ্টি হল $\dfrac{1}{2}(pq+1)$, যেখানে $p \neq q$ ।
6. যদি কোনো সমান্তর প্রগতি 25, 22, 19, … এর কিছু সংখ্যক পদের সমষ্টি 116 হয়, তবে শেষ পদটি নির্ণয় করো।
7. সমান্তর প্রগতিটির $n$ সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় করো যার $k$ -তম পদটি হল $5k+1$ ।
8. যদি একটি সমান্তর প্রগতির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $(pn + qn^2)$ হয়, যেখানে $p$ এবং $q$ ধ্রুবক, তবে সাধারণ অন্তর নির্ণয় করো।
9. দুটি সমান্তর প্রগতির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টির অনুপাত $5n+4 : 9n+6$ ।তাদের 18 -তম পদের অনুপাত নির্ণয় করো।
10. যদি কোনো সমান্তর প্রগতির প্রথম $p$ সংখ্যক পদের যোগফল, প্রথম $q$ সংখ্যক পদের যোগফলের সমান হয়, তবে প্রথম $(p+q)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।
11. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম $p$ সংখ্যক, $q$ সংখ্যক এবং $r$ সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে $a$, $b$ এবং $c$ হলে প্রমাণ করো যে, $\dfrac{a}{p}(q-r)+\dfrac{b}{q}(r-p)+\dfrac{c}{r}(p-q)=0$
12. একটি সমান্তর প্রগতির $m$ এবং $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টির অনুপাত $m^2 : n^2$ । দেখাও যে $m$ -তম এবং $n$ -তম পদের অনুপাত হবে $(2m-1) : (2n-1)$ ।
13. যদি একটি সমান্তর প্রগতির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $3n^2 + 5n$ হয় এবং তার $m$ -তম পদ 164 হয়, তবে $m$ এর মান নির্ণয় করো।
14. 8 এবং 26 এর মধ্যবর্তী 5টি সংখ্যা বসাও যাতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি একটি সমান্তর প্রগতিভুক্ত হয়।
15. যদি $a$ ও $b$ এর মধ্যবর্তী সমান্তরীয় মধ্যক $\dfrac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$ হয়, তবে $n$ এর মান নির্ণয় করো।
16. 1 এবং 31 এর মধ্যে $m$ সংখ্যক সংখ্যা এভাবে সন্নিবেশিত আছে যাতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি একটি সমান্তর প্রগতি হয় এবং যার 7 -তম এবং $(m-1)$ -তম সংখ্যার অনুপাত হয় 5 : 9 । $m$ এর মান নির্ণয় করো।

**17.** এক জন ব্যক্তি 100 টাকা প্রথম কিস্তি দিয়ে একটি ঋণ পরিশোধ করতে শুরু করে। যদি সে প্রতি কিস্তিতে 5 টাকা প্রতি মাস হিসাবে বৃদ্ধি করে তবে 30 -তম কিস্তিতে সে কত টাকা দেবে?

**18.** একটি বহুভূজের পর পর দুটি অন্তঃকোণের পার্থক্য $5°$। যদি ক্ষুদ্রতম কোণটি $120°$ হয় তবে বহুভূজটির বাহু সংখ্যা নির্ণয় করো।

## 9.5 গুণোত্তর প্রগতি (Geometric Progression [G. P.])

চলো, আমরা প্রদত্ত অনুক্রমগুলো লক্ষ করি :

(i) 2,4,8,16,... (ii) $\frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{-1}{243} \cdots$ (iii) .01, .0001, .000001,...

এই অনুক্রমগুলোর প্রত্যেকটির পদগুলো কী করে অগ্রসর হচ্ছে? আমরা লক্ষ করেছি, প্রথম পদ ছাড়া প্রত্যেকটি পদ একটি বিশেষ ক্রমে অগ্রসর হচ্ছে।

(i) এর ক্ষেত্রে আমরা পাই, $a_1 = 2, \frac{a_2}{a_1} = 2, \frac{a_3}{a_2} = 2, \frac{a_4}{a_3} = 2$ এবং এভাবে চলতে থাকবে।

(ii) এর ক্ষেত্রে আমরা লক্ষ করি, $a_1 = \frac{1}{9}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{3}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{-1}{3}$ এবং এভাবে চলতে থাকবে।

অনুরূপে, (iii) এর পদগুলো কীভাবে অগ্রসর হচ্ছে বলো? প্রতি ক্ষেত্রে এটি লক্ষণীয় যে, প্রথম পদ ছাড়া প্রত্যেক পদ তার পূর্ববর্তী পদ থেকে একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে অগ্রসর হয়। (i)- এ এই নির্দিষ্ট অনুপাত হল 2; (ii)-এ এটি হল $-\frac{1}{3}$ এবং (iii)-এ এই নির্দিষ্ট অনুপাত হল 0.01 এরূপ অনুক্রমকে বলা হয় *গুণোত্তর অনুক্রম* বা *গুণোত্তর প্রগতি* (*geometric progression*) সংক্ষেপে G.P.।

একটি অনুক্রম $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ কে *গুণোত্তর প্রগতি* বলা হবে যদি প্রত্যেকটি পদ অ-শূন্য হয় এবং $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (ধ্রুবক) হয়, যেখানে $k \geq 1$ ।

$a_1 = a$ ধরে আমরা একটি গুণোত্তর প্রগতি পাই, $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots,$ যেখানে $a$ কে বলা হয় *প্রথম পদ* এবং $r$ কে বলা হয় গুণোত্তর প্রগতিটির *সাধারণ অনুপাত* (*common ratio*)। উপরোক্ত গুণোত্তর প্রগতি (i), (ii) এবং (iii) এর সাধারণ অনুপাত যথাক্রমে $2, -\frac{1}{3}$ এবং 0.01 । সমান্তর প্রগতির মতই, বেশি পদ যুক্ত গুণোত্তর প্রগতির $n$ -তম পদ নির্ণয় বা $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করা কষ্টকর হয় যদি আমরা সূত্র ব্যবহার না করি, যা আমরা পরবর্তী অনুচ্ছেদে বিকশিত করব। আমরা এই সূত্রগুলোতে নিম্নলিখিত সংকেতগুলো ব্যবহার করব :

$a$ = প্রথম পদ, $r$ = সাধারণ অনুপাত, $l$ = শেষ পদ,
$n$ = পদ সংখ্যা, $S_n$ = প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি।

**9.5.1 গুণোত্তর প্রগতির সাধারণ পদ (General term of a G.P.)** ধরো একটি গুণোত্তর প্রগতি যার প্রথম অশূন্য পদ '$a$' এবং সাধারণ অনুপাত '$r$'। এটির কিছু পদ লেখো। $a$ কে $r$ দিয়ে গুণ করে দ্বিতীয় পদ পাওয়া যায় অর্থাৎ $a_2 = ar$ । অনুরূপে, $a_2$কে $r$ দিয়ে গুণ করে তৃতীয় পদ পাওয়া যায়। সুতরাং,
$a_3 = a_2 r = ar^2$ ইত্যাদি।

আমরা এই পদগুলো এবং আরও কিছু পদ লেখি।

প্রথম পদ $= a_1 = a = ar^{1-1}$, দ্বিতীয় পদ $= a_2 = ar = ar^{2-1}$,
তৃতীয় পদ $= a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$, চতুর্থ পদ $= a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$,
পঞ্চম পদ $= a_5 = ar^4 = ar^{5-1}$

তোমরা কি একটি প্যাটার্ন বা নমুনা দেখতে পাচ্ছ? 16 -তম পদটি কী হবে?

$$a_{16} = ar^{16-1} = ar^{15}$$

সুতরাং, এই নমুনা থেকে পাওয়া যায় যে গুণোত্তর প্রগতির $n$ -তম পদ হল $a_n = ar^{n-1}$ ।

অতএব একটি গুণোত্তর প্রগতি এরূপে লেখা যায় যে, $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{n-1}$ এবং $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1} \ldots$ যথাক্রমে *সসীম* ও *অসীম* গুণোত্তর প্রগতি হয়।

$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ এবং $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ শ্রেণি দুটিকে যথাক্রমে সসীম এবং *অসীম গুণোত্তর শ্রেণি* বলা হয়।

**9.5.2. গুণোত্তর প্রগতির n সংখ্যক পদের সমষ্টি (Sum of n terms of a G .P.)** ধরো, একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ $a$ এবং সাধারণ অণুপাত $r$। আরো ধরে নাও গুণোত্তর প্রগিতিটির প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n$। সুতরাং,

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \qquad \ldots (1)$$

**ক্ষেত্র 1** যদি $r = 1$ হয় তবে আমরা পাই,

$$S_n = a + a + a + \ldots + a \text{ (}n\text{ সংখ্যক পদ)} = na$$

**ক্ষেত্র 2** যদি $r \neq 1$ হয় তবে (1) নং কে $r$ দিয়ে গুণ করে আমরা পাই

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n \qquad \ldots (2)$$

(1) থেকে (2) বিয়োগ করে আমরা পাই $(1 - r) S_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$

এটি থেকে পাওয়া যায় $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ অথবা, $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1}$

**উদাহরণ 9** গুণোত্তর প্রগতি 5, 25, 125,… এর 10 -তম এবং $n$ -তম পদ নির্ণয় করো।

**সমাধান** এখানে $a = 5$ এবং $r = 5$ । সুতরাং $a_{10} = 5(5)^{10-1} = 5(5)^9 = 5^{10}$

এবং $a_n = ar^{n-1} = 5(5)^{n-1} = 5^n$ ।

**উদাহরণ 10** 2,8,32, … $n$ -তম পদ পর্যন্ত গুণোত্তর প্রগতির কোন্ পদটি 131072?

**সমাধান** ধরো, প্রদত্ত গুণোত্তর প্রগতির $n$ -তম পদ 131072 । এখানে, $a = 2$ এবং $r = 4$ ।

সুতরাং, $131072 = a_n = 2(4)^{n-1}$ বা $65536 = 4^{n-1}$

অর্থাৎ, $4^8 = 4^{n-1}$.

এজন্য, $n - 1 = 8$, অর্থাৎ, $n = 9$ । অতএব, গুণোত্তর প্রগতিটির 9 -তম পদ হলো 131072 ।

**উদাহরণ 11** একটি গুণোত্তর প্রগতির তৃতীয় পদ 24 এবং ষষ্ঠ পদ 192 । দশম পদ নির্ণয় করো।

**সমাধান** এখানে, $a_3 = ar^2 = 24$ ... (1)

এবং $a_6 = ar^5 = 192$ ... (2)

(2) কে (1) দিয়ে ভাগ করে আমরা পাই $r = 2$ । (1)-এ $r = 2$ বসিয়ে আমরা পাই $a = 6$ ।

অতএব $a_{10} = 6\ (2)^9 = 3072$ ।

**উদাহরণ 12** গুণোত্তর শ্রেণি $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots$ এর প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি এবং প্রথম 5টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

**সমাধান** এখানে, $a = 1$ এবং $r = \frac{2}{3}$ । সুতরাং,

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} = \frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

বিশেষতঃ,
$$S_5 = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right] = 3\times\frac{211}{243} = \frac{211}{81}\ ।$$

**উদাহরণ 13** গুণোত্তর প্রগতি $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ এর কয়টি পদের প্রয়োজন হবে, যাদের যোগফল $\frac{3069}{512}$ হবে ?

**সমাধান** ধরো, $n$ সংখ্যক পদের প্রয়োজন হবে। দেওয়া আছে $a = 3$, $r = \frac{1}{2}$ এবং $S_n = \frac{3069}{512}$ ।

যেহেতু, $S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r}$

সুতরাং,
$$\frac{3069}{512} = \frac{3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

বা, $\frac{3069}{3072} = 1-\frac{1}{2^n}$

বা, $\frac{1}{2^n} = 1-\frac{3069}{3072} = \frac{3}{3072} = \frac{1}{1024}$

বা, $2^n = 1024 = 2^{10}$, যা থেকে পাওয়া যায় $n = 10$ ।

**উদাহরণ 14** একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম তিনটি পদের যোগফল $\frac{13}{12}$ এবং তাদের গুণফল $-1$ । সাধারণ অনুপাত ও পদগুলো নির্ণয় করো।

**সমাধান** ধরো গুণোত্তর প্রগতিটির প্রথম তিনটি পদ হল $\frac{a}{r}, a, ar$ ।

তাহলে, $\frac{a}{r} + ar + a = \frac{13}{12}$ ... (1)

এবং $\left(\frac{a}{r}\right)(a)\,(ar) = -1$ ... (2)

(2) থেকে আমরা পাই, $a^3 = -1$, অর্থাৎ $a = -1$ (কেবলমাত্র বাস্তব বীজ বিচার করে)
(1)-এ $a = -1$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$-\frac{1}{r} - 1 - r = \frac{13}{12} \text{ বা } 12r^2 + 25r + 12 = 0 \text{ ।}$$

এটি হলো $r$ এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, যাকে সমাধান করে আমরা পাই $r = -\frac{3}{4}$ বা $-\frac{4}{3}$ ।
অতএব, গুণোত্তর প্রগতির তিনটি পদ হল :

$\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ যখন $r = \frac{-3}{4}$ এবং $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$ যখন $r = \frac{-4}{3}$ ।

**উদাহরণ 15** অনুক্রম 7, 77, 777, 7777, ... এর $n$ সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় করো।

**সমাধান** এটি একটি গুণোত্তর প্রগতি নয়, তবুও পদগুলোকে নিম্নরূপে লিখে একটি গুণোত্তর প্রগতির সাথে সম্পর্ক যুক্ত করতে পারি,

$S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \ldots$ $n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

$= \frac{7}{9}[9+99+999+9999+\ldots$ $n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$]$

$$= \frac{7}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+(10^4-1)+\ldots n \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10+10^2+10^3+\ldots n \text{ সংখ্যক পদ})-(1+1+1+\ldots n \text{ সংখ্যক পদ})]$$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right] = \frac{7}{9}\left[\frac{10\,(10^n-1)}{9}-n\right] \text{ ।}$$

**উদাহরণ 16** এক ব্যক্তির মা-বাবা মিলে 2 জন, দাদু-দিদা 4 জন, বড়ো দাদু-বড়ো দিদা 8 জন এবং এভাবে চললে, ঐ ব্যক্তির দশ প্রজন্ম পর্যন্ত পূর্বপুরুষদের সংখ্যা নির্ণয় করো।

**সমাধান** এখানে, $a = 2, r = 2$ এবং $n = 10$

সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র ব্যবহার করে $S_n = \dfrac{a\,(r^n-1)}{r-1}$

আমরা পাই, $S_{10} = 2(2^{10} - 1) = 2046$

অতএব, ঐ ব্যক্তির পূর্বপুরুষদের সংখ্যা হল 2046 ।

**9.5.3 গুণোত্তরীয় মধ্যক *[Geometric Mean (G.M.)]*** দুটি ধনাত্মক সংখ্যা $a$ ও $b$ এর গুণোত্তরীয় মধ্যক হল $\sqrt{ab}$ । সুতরাং 2 এবং 8 এর গুণোত্তরীয় মধ্যক হল 4 । আমরা লক্ষ করছি 2,4,8 এই সংখ্যাগুলো হল একটি গুণোত্তর প্রগতির পর পর তিনটি পদ। যা দুটি সংখ্যার মধ্যে গুণোত্তরীয় মধ্যকের ধারণাকে সাধারণীকরণে সহায়তা করে।

যদি দুটি ধনাত্মক সংখ্যা $a$ এবং $b$ প্রদত্ত হয় তবে আমরা এদের মাঝখানে যতগুলো ইচ্ছা সংখ্যা বসাতে পারি যাতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি একটি গুণোত্তর প্রগতি হয়।

ধরো, দুটি ধনাত্মক সংখ্যা $a$ ও $b$ এর মধ্যবর্তী $n$ সংখ্যক সংখ্যা $G_1, G_2, \ldots, G_n$ এরূপ যে, $a, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, b$ একটি গুণোত্তর প্রগতি। সুতরাং $b$ হল $(n + 2)$ -তম পদ। অতএব আমরা পাই

$$b = ar^{n+1}, \quad \text{বা} \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} \text{ ।}$$

সুতরাং, $G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$, $G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$, $G_3 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$,

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

**উদাহরণ 17** 1 এবং 256 এর মধ্যে তিনটি সংখ্যা বসাও যাতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি একটি গুণোত্তর প্রগতি হয়।

**সমাধান** ধরা যাক, 1 এবং 256 এর মধ্যবর্তী তিনটি সংখ্যা $G_1, G_2, G_3$ এমন যে, $1, G_1, G_2, G_3, 256$ একটি গুণোত্তর প্রগতি গঠন করে।

সুতরাং, $256 = r^4$ থেকে পাওয়া যায় $r = \pm 4$ (শুধুমাত্র বাস্তব বীজ নিয়ে)
$r = 4$ এর জন্য আমরা পাই, $G_1 = ar = 4$, $G_2 = ar^2 = 16$, $G_3 = ar^3 = 64$ ।
অনুরূপে, $r = -4$ এর জন্য সংখ্যাগুলো হলো $-4, 16$ এবং $-64$
সুতরাং, 1 এবং 256 এর মধ্যে আমরা 4, 16, 64 কে বসাতে পারি যাতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি একটি গুণোত্তর প্রগতি হয়।

## 9.6 সমান্তরীয় মধ্যক ও গুণোত্তরীয় মধ্যকের মধ্যে সম্পর্ক (Relationship Between A.M. and G.M.)

ধরা যাক, প্রদত্ত দুটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা $a$ ও $b$ এর সমান্তরীয় মধ্যক ও গুণোত্তরীয় মধ্যক যথাক্রমে A ও G । সুতরাং,

$$A = \frac{a+b}{2} \text{ এবং } G = \sqrt{ab}$$

অতএব, আমরা পাই

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0 \qquad \dots (1)$$

(1) থেকে আমরা সম্পর্কটি পাই, $A \geq G$ ।

**উদাহরণ 18** যদি দুটি ধনাত্মক সংখ্যা $a$ ও $b$ এর সমান্তরীয় মধ্যক (A.M) ও গুণোত্তরীয় (G.M) মধ্যক যথাক্রমে 10 এবং 8 হয়, তবে সংখ্যা দুটি নির্ণয় করো।

**সমাধান** এখানে প্রদত্ত, সমান্তরীয় মধ্যক $= \dfrac{a+b}{2} = 10 \qquad \dots (1)$

এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক $= \sqrt{ab} = 8 \qquad \dots (2)$

(1) ও (2) থেকে আমরা পাই,

$$a + b = 20 \qquad \dots (3)$$
$$ab = 64 \qquad \dots (4)$$

(3) ও (4) থেকে $a$ এবং $b$ এর মাণ অভেদ $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ তে বসিয়ে আমরা পাই

$$(a-b)^2 = 400 - 256 = 144$$

অথবা, $a - b = \pm 12 \qquad \dots (5)$

(3) ও (5) সমাধান করে আমরা পাই,

$a = 4, b = 16$ অথবা, $a = 16, b = 4$

অতএব, $a$ ও $b$ সংখ্যা দুটি হল যথাক্রমে 4, 16 অথবা 16, 4 ।

## অনুশীলনী 9.3

**1.** গুণোত্তর প্রগতি $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ এর 20 -তম এবং $n$ -তম পদ নির্ণয় করো।

**2.** একটি গুণোত্তর প্রগতির 12 -তম পদ নির্ণয় করো যার 8 -তম পদ 192 এবং সাধারণ অনুপাত হল 2।

**3.** একটি গুণোত্তর প্রগতির 5 -তম, 8 -তম এবং 11 -তম পদ যথাক্রমে $p$, $q$ এবং $s$ হলে দেখাও যে $q^2 = ps$ ।

**4.** একটি গুণোত্তর প্রগতির চতুর্থ পদটি দ্বিতীয় পদের বর্গ এবং প্রথম পদটি হল $-3$ । প্রগতিটির সপ্তম পদ নির্ণয় করো।

**5.** নিম্নলিখিত অনুক্রমগুলোতে :

(a) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$ এর কোন্ পদটি 128 হয়? (b) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots$ এর কোন্ পদটি 729 হয়?

(c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ এর কোন্ পদটি $\frac{1}{19683}$ হয়?

**6.** $x$ এর কোন মানের জন্য $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ সংখ্যাগুলো গুণোত্তর প্রগতিতে থাকবে?

7 থেকে 10 পর্যন্ত প্রশ্নগুলোর প্রত্যেকটিতে গুণোত্তর প্রগতির নির্দেশিত পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করো :

**7.** 0.15, 0.015, 0.0015, ... 20 -তম পদ পর্যন্ত।

**8.** $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots$ $n$ -তম পদ পর্যন্ত।

**9.** $1, -a, a^2, -a^3, \ldots$ $n$ -তম পদ পর্যন্ত (যদি $a \neq -1$) ।

**10.** $x^3, x^5, x^7, \ldots$ $n$ -তম পদ পর্যন্ত (যদি $x \neq \pm 1$) ।

**11.** মান নির্ণয় করো : $\sum_{k=1}^{11} (2+3^k)$ ।

**12.** একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম তিনটি পদের সমষ্টি $\frac{39}{10}$ এবং তাদের গুণফল 1 । সাধারণ অনুপাত এবং পদগুলো নির্ণয় করো।

**13.** গুণোত্তর প্রগতি $3, 3^2, 3^3, \ldots$ এর কতগুলো পদের সমষ্টি 120 ?

**14.** একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম তিনটি পদের সমষ্টি 16 এবং পরবর্তী তিনটি পদের সমষ্টি 128 । প্রগতিটির প্রথম পদ, সাধারণ অনুপাত এবং $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

**15.** একটি গুণোত্তর প্রগতির $a = 729$ এবং 7 -তম পদ 64 প্রদত্ত হলে $S_7$ নির্ণয় করো।

**16.** একটি গুণোত্তর প্রগতি নির্ণয় করো যার প্রথম দুটি পদের সমষ্টি $-4$ এবং পঞ্চম পদ, তৃতীয় পদের 4 গুণ।

**17.** একটি গুণোত্তর প্রগতির 4 -তম, 10 তম এবং 16 -তম পদ যথাক্রমে $x$, $y$ এবং $z$ হলে প্রমাণ করো যে $x$, $y$, $z$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

**18.** অণুক্রম 8, 88, 888, 8888... এর $n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করো।

**19.** 2, 4, 8, 16, 32 এবং 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ অণুক্রম দুটির অনুরূপ পদগুলোর গুণফলের সমষ্টি নির্ণয় করো।

**20.** দেখাও যে, অনুক্রম $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ এবং $A, AR, AR^2, \ldots AR^{n-1}$ এর অনুরূপ পদগুলোর গুণফল একটি গুণোত্তর প্রগতি গঠন করে এবং প্রগতিটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় করো।

**21.** চারটি সংখ্যা দিয়ে গঠিত একটি গুণোত্তর প্রগতি নির্ণয় করো যার তৃতীয় পদটি প্রথম পদ থেকে 9 বেশি এবং দ্বিতীয় পদটি চতুর্থ পদ থেকে 18 বড়ো।

**22.** যদি একটি গুণোত্তর প্রগতির $p$ -তম, $q$ -তম এবং $r$ -তম পদ যথাক্রমে $a$, $b$ এবং $c$ হয় তবে প্রমাণ করো যে,

$$a^{q-r}\, b^{r-p} c^{P-q} = 1 \text{ ।}$$

**23.** যদি একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ এবং $n$ -তম পদ যথাক্রমে $a$ এবং $b$ হয় এবং যদি $n$ সংখ্যক পদের গুণফল P হয়, তবে প্রমাণ করো $P^2 = (ab)^n$ ।

**24.** দেখাও যে, একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম $n$ সংখ্যক পদের যোগফল এবং $(n + 1)$ -তম পদ থেকে $(2n)$ -তম পদ পর্যন্ত পদগুলোর যোগফলের অণুপাত হল $\frac{1}{r^n}$ ।

**25.** যদি $a, b, c$ এবং $d$ গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে তবে দেখাও যে,

$(a^2 + b^2 + c^2)\,(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ ।

**26.** 3 ও 81 এর মাঝখানে দুটি সংখ্যা বসাও যাতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হয়।

**27.** $n$-এর মান নির্ণয় করো, যাতে $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, $a$ এবং $b$ এর গুণোত্তরীয় মধ্যক হয়।

**28.** দুটি সংখ্যার যোগফল তাদের গুণোত্তরীয় মধ্যকের 6 গুণ হলে দেখাও যে সংখ্যা দুটির অণুপাত

$\left(3+2\sqrt{2}\right):\left(3-2\sqrt{2}\right)$ ।

**29.** দুটি ধনাত্মক সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক ও গুণোত্তরীয় মধ্যক যথাক্রমে A ও G হলে প্রমাণ করো যে

সংখ্যা দুটি হল $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ ।

**30.** কোনো একটি নমুনা পরীক্ষায় ব্যাকটেরিয়ার সংখ্যা প্রতি ঘণ্টায় দ্বিগুণ হয়। যদি প্রথম অবস্থায় 30টি ব্যাক্টেরিয়া উপস্থিত থাকে তবে দ্বিতীয় ঘণ্টা, চতুর্থ ঘণ্টা এবং $n$ -তম ঘণ্টার পর ব্যাকটেরিয়ার সংখ্যা কত হবে?

**31.** বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হারে 500 টাকা কোনো ব্যাঙ্কে জমা দিলে 10 বৎসর পরে সুদাসল কত হবে?

**32.** যদি একটি দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যক এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক যথাক্রমে 8 এবং 5 হয়, তবে দ্বিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় করো।

## 9.7 বিশেষ শ্রেণির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি (Sum of $n$ Terms of Special Series)

এখন আমরা কয়েকটি বিশেষ শ্রেণির প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করব, যেমন—

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ (প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি)

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$(প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি)

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$(প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন-এর সমষ্টি) ।

চলো আমরা তাদের একটি-একটি বিচার করি।

(i) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ হলে $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (অনুচ্ছেদ 9.4 দেখো)

(ii) এখানে $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

আমরা অভেদ $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ ধরি।

$k = 1, 2 \ldots, n$ পর পর বসিয়ে আমরা পাই—

$$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$$

উভয়পক্ষ যোগ করে আমরা পাই—

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

$$n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

(i) থেকে আমরা জানি যে, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

সুতরাং, $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) এখানে $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

আমরা একটি অভেদ $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ ধরি।

$k = 1, 2, 3 \ldots n$, বসিয়ে আমরা পাই—

$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$

$3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$

$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$

..................................................

..................................................

..................................................

$(n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1$

$n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$

$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

উভয়পক্ষ যোগ করে আমরা পাই—

$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n \qquad \text{... (1)}$$

(i) এবং (ii) এর অংশ থেকে আমরা জানি যে,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{এবং} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

এই মানগুলো (1) নং সমীকরণে বসিয়ে আমরা পাই—

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} - n$$

অথবা, $4S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n(n+1) - n$

$= n^4 + 2n^3 + n^2$

$= n^2(n+1)^2$ ।

সুতরাং $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \dfrac{[n(n+1)]^2}{4}$

**উদাহরণ 19** শ্রেণি 5 + 11 + 19 + 29 + 41… এর $n$ সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় করো।

**সমাধান** ধরা যাক,

$S_n = 5 + 11 + 19 + 29 + ... + a_{n-1} + a_n$

বা $S_n = \quad 5 + 11 + 19 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

বিয়োগ করে আমরা পাই,

$$0 = 5 + [6 + 8 + 10 + 12 + \ldots (n-1)\text{টি পদ}] - a_n$$

বা $$a_n = 5 + \frac{(n \quad 1)[12+(n-2)\times 2]}{2}$$

$$= 5 + (n-1)(n+4) = n^2 + 3n + 1$$

সুতরাং $$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{1}^{n} k + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+2)(n+4)}{3} \text{ ।}$$

**উদাহরণ 20** একটি শ্রেণির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করো যার $n$ -তম পদটি হলো $n\,(n+3)$ ।

**সমাধান** এখানে প্রদত্ত $a_n = n\,(n+3) \quad = n^2 + 3n$

সুতরাং, $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি হল,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \frac{3n\,(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+5)}{3} \text{ ।}$$

## অনুশীলনী 9.4

প্রশ্ন 1 থেকে 7 পর্যন্ত প্রত্যেকটি শ্রেণির $n$ সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় করো।

**1.** $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \ldots$

**2.** $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots$

**3.** $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + \ldots$

**4.** $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots$

**5.** $5^2 + 6^2 + 7^2 + \ldots + 20^2$

**6.** $3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + \ldots$

**7.** $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \ldots$

প্রশ্ন 8 থেকে 10 পর্যন্ত শ্রেণিগুলোর $n$ সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় করো যাদের $n$ তম পদটি প্রদত্ত

**8.** $n\,(n+1)\,(n+4)$

**9.** $n^2 + 2^n$

**10.** $(2n-1)^2$

## বিবিধ উদাহরণমালা

**উদাহরণ 21** যদি একটি সমান্তর প্রগতির $p$ -তম, $q$ -তম, $r$ -তম এবং $s$ -তম পদ গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে তবে দেখাও যে $(p - q)$, $(q - r)$, $(r - s)$ও গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে।

**সমাধান** এখানে,

$$a_p = a + (p - 1)\, d \quad \dots (1)$$
$$a_q = a + (q - 1)\, d \quad \dots (2)$$
$$a_r = a + (r - 1)\, d \quad \dots (3)$$
$$a_s = a + (s - 1)\, d \quad \dots (4)$$

এখানে প্রদত্ত $a_p$, $a_q$, $a_r$ এবং $a_s$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

সুতরাং $$\frac{a_q}{a_p} = \frac{a_r}{a_q} = \frac{a_q - a_r}{a_p - a_q} = \frac{q - r}{p - q} \quad \text{(কেন?)} \quad \dots (5)$$

অনুরূপে, $$\frac{a_r}{a_q} = \frac{a_s}{a_r} = \frac{a_r - a_s}{a_q - a_r} = \frac{r - s}{q - r} \quad \text{(কেন?)} \quad \dots (6)$$

অতএব, (5) ও (6) থেকে পাই—

$$\frac{q - r}{p - q} = \frac{r - s}{q - r}$$ অর্থাৎ, $p - q$, $q - r$ এবং $r - s$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

**উদাহরণ 22** যদি $a, b, c$ গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে এবং $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে $x, y, z$ সমান্তর প্রগতিতে থাকবে।

**সমাধান** ধরো $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$ সুতরাং,

$$a = k^x,\ b = k^y \text{ এবং } c = k^z \quad \dots (1)$$

যেহেতু, $a, b, c$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে, তাই

$$b^2 = ac \quad \dots (2)$$

(1) কে (2)-এ ব্যবহার করে আমরা পাই

$k^{2y} = k^{x+z}$, যা থেকে পাওয়া যায় $2y = x + z$ ।

অতএব, $x$, $y$ এবং $z$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

**উদাহরণ 23** যদি $a, b, c, d$ এবং $p$ বিভিন্ন বাস্তব সংখ্যা এমন যে $(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)\, p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0$ হয়, তবে দেখাও যে $a, b, c$ এবং $d$ গুণোত্তর প্রগতি গঠন করে।

**সমাধান** এখানে প্রদত্ত,

$$(a^2 + b^2 + c^2)\, p^2 - 2\,(ab + bc + cd)\, p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0 \quad \dots (1)$$

কিন্তু বামপক্ষ

$$= (a^2p^2 - 2abp + b^2) + (b^2p^2 - 2bcp + c^2) + (c^2p^2 - 2cdp + d^2),$$

যা থেকে পাওয়া যায়, $(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 \geq 0$ ... (2)

যেহেতু বাস্তব সংখ্যার বর্গের সমষ্টি ঋণাত্মক নয়, তাই (1) ও (2) থেকে আমরা পাই,

$$(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 = 0$$

বা, $ap - b = 0,\ bp - c = 0,\ cp - d = 0$

যা থেকে আমরা পাই, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = p$

অতএব, $a$, $b$, $c$ এবং $d$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

**উদাহরণ 24** যদি $p, q, r$ গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে এবং সমীকরণ $px^2 + 2qx + r = 0$ এবং $dx^2 + 2ex + f = 0$ এর একটি সাধারণ বীজ থাকে তবে দেখাও যে $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

**সমাধান** $px^2 + 2qx + r = 0$ সমীকরণের বীজগুলো হল

$$x = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}$$

যেহেতু, $p, q, r$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে, তাই $q^2 = pr$ । সুতরাং, $x = \frac{-q}{p}$ কিন্তু $\frac{-q}{p}$ সমীকরণ $dx^2 + 2ex + f = 0$ এরও বীজ (কেন?)

সুতরাং, $$d\left(\frac{-q}{p}\right)^2 + 2e\left(\frac{-q}{p}\right) + f = 0,$$

বা, $dq^2 - 2eqp + fp^2 = 0$ ... (1)

(1) কে $pq^2$ দিয়ে ভাগ করে এবং $q^2 = pr$ ব্যবহার করে আমরা পাই—

$$\frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{fp}{pr} = 0, \quad \text{বা} \quad \frac{2e}{q} = \frac{d}{p} + \frac{f}{r}$$

সুতরাং, $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

## অধ্যায় 9-এর বিবিধ অনুশীলনী

**1.** দেখাও যে-কোনো সমান্তর প্রগতির $(m + n)$ -তম পদ এবং $(m - n)$ -তম পদের সমষ্টি $m$ -তম পদের দ্বিগুণের সমান।

**2.** যদি কোনো সমান্তর প্রগতির তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 24 হয় এবং তাদের গুণফল 440 হয় তবে সংখ্যাগুলো নির্ণয় করো।

**3.** যদি একটি সমান্তর প্রগতির $n$, $2n$, $3n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে $S_1$, $S_2$ এবং $S_3$ হয় তবে দেখাও যে $S_3 = 3(S_2 - S_1)$ ।

**4.** 200 এবং 400-এর মধ্যবর্তী 7 দিয়ে বিভাজ্য সবগুলো সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় করো।

**5.** 1 থেকে 100 পর্যন্ত যে সব পূর্ণ সংখ্যা 2 অথবা 5 দিয়ে বিভাজ্য তাদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

**6.** দুই অঙ্ক বিশিষ্ট যে সংখ্যাগুলোকে 4 দিয়ে ভাগ করলে 1 ভাগশেষ থাকে তাদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

**7.** যদি $f$ একটি অপেক্ষক এমন হয় যে, $f(x+y) = f(x)\, f(y)$, সব $x, y \in \mathbf{N}$ এর জন্য, যেখানে $f(1) = 3$ এবং $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$ হয়, তবে $n$ এর মান নির্ণয় করো।

**8.** গুণোত্তর প্রগতির কিছু পদের সমষ্টি 315 যার প্রথম পদ এবং সাধারণ অনুপাত যথাক্রমে 5 এবং 2 প্রগতিটির শেষ পদ এবং পদ সংখ্যা নির্ণয় করো।

**9.** একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ 1, তৃতীয় পদ এবং পঞ্চম পদের সমষ্টি 90 হলে প্রগতিটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় করো।

**10.** গুণোত্তর প্রগতিতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 56 । যদি আমরা এই সংখ্যাগুলো থেকে একই ক্রমে 1, 7, 21 বিয়োগ করি তবে আমরা একটি সমান্তর প্রগতি পাই। সংখ্যাগুলো নির্ণয় করো।

**11.** একটি গুণোত্তর প্রগতির জোড় সংখ্যক পদ আছে। যদি সবগুলো পদের সমষ্টি, বিজোড় স্থানের পদগুলোর সমষ্টির 5 গুণ হয় তবে তার সাধারণ অনুপাত নির্ণয় করো।

**12.** একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম চারটি পদের সমষ্টি 56 এবং শেষ চারটি পদের সমষ্টি 112 । যদি তার প্রথম পদ 11 হয় তবে পদ সংখ্যা নির্ণয় করো।

**13.** যদি $\dfrac{a+bx}{a-bx} = \dfrac{b+cx}{b-cx} = \dfrac{c+dx}{c-dx} (x \neq 0)$ হয়, তবে দেখাও যে $a, b, c$ এবং $d$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

**14.** যদি একটি গুণোত্তর প্রগতির $n$ সংখ্যক পদের যোগফল S, এদের গুণফল P এবং পদগুলোর অনন্যোকের যোগফল R হয় তবে প্রমাণ করো যে $P^2R^n = S^n$ ।

**15.** যদি একটি সমান্তর প্রগতির $p$ -তম, $q$ -তম এবং $r$ -তম পদ যথাক্রমে $a, b, c$ হয় তবে দেখাও যে $(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0$

**16.** যদি $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right), b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right), c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ সমান্তর প্রগতিতে থাকে তবে প্রমাণ করো $a, b, c$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

**17.** যদি $a, b, c, d$ গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে তবে প্রমাণ করো $(a^n + b^n)$, $(b^n + c^n)$, $(c^n + d^n)$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

**18.** যদি $x^2 - 3x + p = 0$ এর বীজদ্বয় $a$ ও $b$ এবং $x^2 - 12x + q = 0$ এর বীজদ্বয় $c$ ও $d$ হয়, যেখানে

$a, b, c, d$ একটি গুণোত্তর প্রগতি গঠন করে তবে প্রমাণ করো যে, $(q + p) : (q - p) = 17:15$ ।

**19.** দুটি ধনাত্মক সংখ্যা $a$ এবং $b$ এর সমান্তরীয় মধ্যক ও গুণোত্তরীয় মধ্যকের অনুপাত $m : n$ । দেখাও যে,

$$a:b=\left(m+\sqrt{m^2-n^2}\right):\left(m-\sqrt{m^2-n^2}\right)$$ ।

**20.** যদি $a, b, c$ সমান্তর প্রগতি; $b, c, d$ গুণোত্তরর প্রগতি এবং $\frac{1}{c},\frac{1}{d},\frac{1}{e}$ সমান্তর প্রগতিতে থাকে তবে প্রমাণ করো যে, $a, c, e$ গুণোত্তর প্রগতি গঠন করে।

**21.** প্রদত্ত শ্রেণিগুলোর $n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করো :

(i) $5 + 55 + 555 + \ldots$ (ii) $.6 +. 66 +. 666+\ldots$

**22.** $2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 8 + \ldots + n$ -তম পদ, শ্রেণিটির 20 -তম পদটি নির্ণয় করো।

**23.** $3+ 7 +13 +21 +31 +\ldots$ শ্রেণিটির প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

**24.** যদি $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা, তাদের বর্গ এবং তাদের ঘন-এর যোগফল যথাক্রমে $S_1$, $S_2$ এবং $S_3$ হয়, তবে দেখাও যে, $9S_2^2 = S_3\,(1 + 8S_1)$ ।

**25.** প্রদত্ত শ্রেণিটির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করো :

$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots$$

**26.** দেখাও যে, $\dfrac{1\times 2^2+2\times 3^2+\ldots+n\times(n+1)^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+\ldots+n^2\times(n+1)}=\dfrac{3n+5}{3n+1}$ ।

**27.** একজন কৃষক একটি পুরাতন ট্রাক্টর 12000 টাকায় ক্রয় করে। সে নগদ 6000 টাকা দিয়ে বাকি টাকা বার্ষিক 500 টাকা প্রতি কিস্তিতে এবং অপরিশোধিত টাকার উপর 12% সুদ দিতে সম্মত হয়। তাকে ট্রাক্টরের দাম কত দিতে হবে?

**28.** সামসাদ আলী একটি স্কুটার কেনে 22000 টাকায়। সে 4000 টাকা নগদ দিয়ে বাকি টাকা বার্ষিক 1000 টাকা প্রতি কিস্তিতে এবং অপরিশোধিত টাকার উপর 10% সুদ দিতে সম্মত হন। তার স্কুটারের দাম কত পরবে?

**29.** এক ব্যক্তি তার চারজন বন্ধুকে একটি চিঠি লিখল। সে প্রত্যেককে বলল এই চিঠিটির প্রতিলিপি তৈরি করে চারজন বিভিন্ন ব্যক্তির কাছে এই নির্দেশ দিয়ে পাঠাতে যাতে তারাও এই কাজটি অনুরূপভাবে করে। ধরে নেওয়া হল এই শৃঙ্খলটি ছিন্ন হবে না এবং প্রত্যেকটি চিঠি পাঠাতে 50 পয়সা খরচ হবে। অষ্টম চিঠির সেট পাঠাতে ডাক খরচ কত পরবে?

**30.** এক ব্যক্তি বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে একটি ব্যাঙ্কে 10000 টাকা জমা রাখল। 15 -তম বছরে তার সুদাসল নির্ণয় করো, যখন থেকে সে টাকা জমা রেখেছিল এবং 20 বছর পর তার মোট সুদাসলও নির্ণয় করো।

**31.** একটি উৎপাদনকারী সংস্থা ঘোষণা করে যে তাদের তৈরি একটি মেশিন যার মূল্য 15625 টাকা, প্রতি বছর 20% হারে মূল্য হ্রাস পাবে। পাঁচ বছর পর তার অনুমানিক মূল্য নির্ণয় করো।

**32.** একটি কাজ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক দিনে সম্পন্ন করার জন্য 150 জন শ্রমিক নিযুক্ত করা হল। দ্বিতীয় দিন 4 জন শ্রমিক কাজ ছেড়ে দিল। তৃতীয় দিন আরও 4 জন শ্রমিক কাজ ছেড়ে দিল এবং এভাবে চলতে থাকল। এতে কাজটি শেষ হতে 8 দিন বেশি লাগল। কাজটি সম্পন্ন হতে কত দিন লেগেছিল তা নির্ণয় করো।

## *সারসংক্ষেপ*

- একটি অনুক্রম বলতে আমরা বুঝি, কোনো একটি নিয়ম অনুসারে একটি নির্দিষ্ট ক্রমে সংখ্যার সজ্জা। এছাড়াও আমরা অনুক্রমকে একটি অপেক্ষক (*function*) রূপেও সংজ্ঞায়িত করতে পারি যার সংজ্ঞার ক্ষেত্র হল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট অথবা তার কিছু উপ-সেট (*subset*) $\{1, 2, 3, ....k\}$ এর অনুরূপ। যে অনুক্রমের পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট (*finite*) তাকে বলা হয় *সসীম অনুক্রম (finite sequence)*। যে অনুক্রমটি সসীম অনুক্রম নয় তাকে বলা হয় *অসীম অনুক্রম (infinite sequence)*।
- ধরো $a_1, a_2, a_3, \ldots$ একটি অনুক্রম, তাহলে $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ দিয়ে প্রকাশিত যোগফলকে *শ্রেণি (series)* বলে। একটি শ্রেণিকে *সসীম শ্রেণি (finite series)* বলা হয় যদি তার পদ সংখ্যা সসীম হয়।
- একটি সমান্তর প্রগতি (An arithmetic progression [A.P.]) হল একটি অনুক্রম যার পদগুলো একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবকে ক্রমান্বয়ে বাড়তে বা কমতে থাকে। এই ধ্রুবকটিকে বলা হয় সমান্তর প্রগতির *সাধারণ অন্তরণ (common difference)*। সাধারণভাবে আমরা সমান্তর প্রগতির প্রথম পদকে $a$ দিয়ে, সাধারণ অন্তরকে $d$ দিয়ে এবং শেষ পদকে $l$ দিয়ে প্রকাশ করি। সমান্তর প্রগতির *সাধারণ পদ (general term)* বা $n$ -তম পদটি হল $a_n = a + (n - 1)\, d$ । একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n$ হল

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right] = \frac{n}{2}(a+l) \text{ ।}$$

- $a$ এবং $b$ সংখ্যা দুটির সমান্তরীয় মধ্যক A হল $\frac{a+b}{2}$ অর্থাৎ অনুক্রম $a$, A, $b$ একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে।

◆ একটি অনুক্রমকে *গুণোত্তর প্রগতি (geometric progression)* বা G.P. বলা হবে যদি সবগুলো পদের ক্ষেত্রেই, একটি পদ এবং তার পূর্ববর্তী পদের অনুপাত একই হয়। এই ধ্রুবক অনুপাতটিকে বলা হয় *সাধারণ অনুপাত (common ratio)*। সাধারণভাবে আমরা গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদকে $a$ দিয়ে এবং সাধারণ অনুপাতকে $r$ দিয়ে প্রকাশ করি। গুণোত্তর প্রগতির সাধারণ পদ বা $n$ -তম পদটি হল $a_n = ar^{n-1}$ । একটি গুণোত্তর প্রগতির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n$ হল :

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ বা } \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ যেখানে } r \neq 1$$

◆ দুটি ধনাত্মক সংখ্যা $a$ এবং $b$ এর গুণোত্তরীয় মধ্যক (*geometric mean*) G হল $\sqrt{ab}$ অর্থাৎ, অনুক্রম $a$, G, $b$ একটি গুণোত্তর প্রগতি গঠন করে।

## *ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট*

এই কথাটির প্রমাণ পাওয়া গেছে, প্রায় 4000 বছর আগেই ব্যবিলনীয়রা সমান্তর এবং গুণোত্তর অনুক্রম সম্বন্ধে জানতেন। আবার Boethius (510) এর মতে প্রাচীন গ্রিক লেখকেরাই সমান্তর ও গুণোত্তর অনুক্রমের কথা জানতেন। ভারতীয় গণিতজ্ঞদের মধ্যে আর্যভট্ট (476) প্রথম স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ ও ঘন-এর যোগফল নির্ণয়ের সূত্র তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থ 'আর্যভট্টম'-এ দিয়েছেন, যা তিনি লিখেছিলেন 499 খ্রিস্টাব্দে। একটি সমান্তর অনুক্রমের $p$ -তম পদ থেকে শুরু করে $n$ সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয়ের সূত্রটিও তিনিই তৈরি করেন। আবার প্রখ্যাত ভারতীয় গণিতজ্ঞ ব্রহ্মগুপ্ত (598), মহাবীর (850) এবং ভাস্কর (1114-1185) তাঁরাও সংখ্যার বর্গ ও ঘনের সমষ্টি নির্ণয়ের ওপর নিজেদের মতামত দিয়েছেন। ইটালীয় গণিতজ্ঞ Leonardo Fibonacci (1170-1250) আবিষ্কার করেন আরেকটি অন্যতম অনুক্রম, যার নাম 'ফিবোনাচ্চি অনুক্রম' (*Fibonacci sequence*), যার গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার আমরা গণিত শাস্ত্রে পেয়ে থাকি। সপ্তদশ শতাব্দীতে শ্রেণিকে নির্দিষ্ট গঠনে বিভিন্ন ভাগ করা হয়। 1671 খ্রিস্টাব্দে James Gregory অসীম অনুক্রমের সাথে সম্পর্কীত অসীম শ্রেণি (*infinite series*) শব্দটি ব্যবহার করেন। বীজগণিত এবং সেট তত্ত্বের যথাযথ উন্নয়নের ফলেই অনুক্রম ও শ্রেণির সূত্র উপযুক্ত রূপে প্রকাশ পেয়েছে।

অধ্যায় 10

# সরল রেখা
# (STRAIGHT LINES)

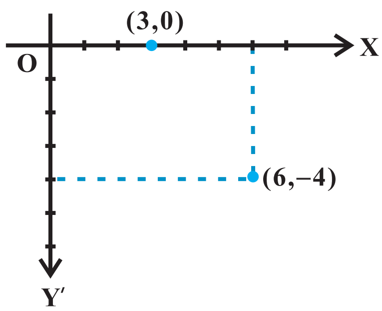
❖ *Geometry, as a logical system, is a means and even the most powerful means to make children feel the strength of the human spirit that is of their own spirit. – H. FREUDENTHAL* ❖

## 10.1 ভূমিকা

René Descartes
(1596 -1650)

পূর্ববর্তী শ্রেণি থেকেই আমরা দ্বিমাত্রিক *স্থানাঙ্ক জ্যামিতির* সাথে পরিচিত। প্রধানত, এটি *বীজগণিত* ও *জ্যামিতির* একটি সমন্বয়। বীজগণিত প্রয়োগে জ্যামিতির ধারাবাহিক অধ্যয়ন সর্বপ্রথম বিখ্যাত ফরাসি দার্শনিক ও গণিতিজ্ঞ রেণে ডেকার্তে 1637 সালে প্রকাশিত তাঁর বই 'La Geometry' তে শুরু করেন। এই বইটি জ্যামিতির অধ্যয়নে বক্রের সমীকরণের ধারণা এবং এ সম্পর্কিত বিশ্লেষণাত্মক পদ্ধতির সূচনা করে। বিশ্লেষণ এবং জ্যামিতির সম্মিলিত ফলাফল আজকাল বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতি হিসেবে পরিগণিত হয়। পূর্ববর্তী শ্রেণিতে, আমরা স্থানাঙ্ক জ্যামিতির অধ্যয়ন আরম্ভ করেছি। যেখানে আমরা স্থানাঙ্ক অক্ষ, স্থানাঙ্ক তল, সমতলে বিন্দু স্থাপন, দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব, বিভাজন সূত্র ইত্যাদি সম্পর্কে অধ্যয়ন করেছি। এই সকল ধারণাগুলোই হল স্থানাঙ্ক জ্যামিতির ভিত্তি।

চলো আমরা পূর্ববর্তী শ্রেণিতে করা স্থানাঙ্ক জ্যামিতিকে সংক্ষিপ্তভাবে স্মরণ করি। পুনরাবৃত্তি করতে, XY- সমতলে $(6, -4)$ এবং $(3, 0)$বিন্দুর অবস্থান চিত্র 10.1 তে দেখানো হল।




চিত্র 10.1

আমরা লক্ষ করি যে $(6, -4)$বিন্দুটি ধনাত্মক $x$-অক্ষ বরাবর $y$ -অক্ষ থেকে 6 একক দূরে এবং ঋণাত্মক $y$ - অক্ষ বরাবর $x$ -অক্ষ থেকে 4 একক দূরে আছে। একইভাবে, $(3, 0)$ বিন্দুটি ধনাত্মক $x$ - অক্ষ বরাবর $y$- অক্ষ থেকে 3 একক দূরে এবং $x$ -অক্ষ থেকে 0 একক দূরে অবস্থিত।

আমরা নিম্নলিখিত গুরুত্বপূর্ণ সূত্রগুলোও অধ্যয়ন করেছি:

**I.** P $(x_1, y_1)$ ও Q $(x_2, y_2)$ বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

উদাহরণস্বরূপ, $(6, -4)$ ও $(3, 0)$ বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব

$$\sqrt{(3-6)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \text{ একক।}$$

**II.** $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দু দুটির সংযোগকারী রেখাংশকে $m: n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর

স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$.

উদাহরণস্বরূপ , যে বিন্দুটি A $(1, -3)$ এবং B $(-3, 9)$ বিন্দুদুটির সংযোজক রেখাংশকে $1: 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তার স্থানাঙ্ক $x = \dfrac{1.(-3)+3.1}{1+3} = 0$ এবং $y = \dfrac{1.9+3.(-3)}{1+3} = 0$.

**III.** বিশেষত, যদি $m = n$ হয়, তবে $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুদুটির সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দুর

স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

**IV.** $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ এবং $(x_3, y_3)$ শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right| .$$

উদাহরণস্বরূপ, $(4, 4)$, $(3, -2)$ ও $(-3, 16)$ শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\frac{1}{2}\left|4(-2-16)+3(16-4)+(-3)(4+2)\right| = \frac{|-54|}{2} = 27.$$

**মন্তব্য** যদি ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়,তবে, A, B এবং C বিন্দু তিনটি একই রেখায় অবস্থিত হয় অর্থাৎ, তারা সমরেখ।

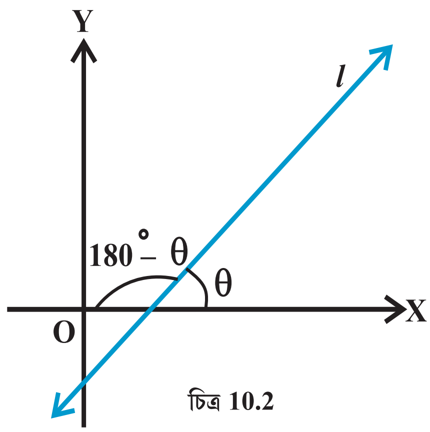
এই অধ্যায়ে আমরা স্থানাঙ্ক জ্যামিতির অধ্যয়নে সরলতম জ্যামিতিক আকৃতি *সরলরেখা* এর ধর্মাবলির অধ্যয়ন জারি রাখব। এটি সরল হওয়া সত্ত্বেও রেখা হল জ্যামিতির একটি মুখ্য ধারণা এবং আমাদের দৈনন্দিন জীবনের অভিজ্ঞতায় অত্যন্ত মজাদার এবং উপযোগী। রেখার বীজগণিতিক উপস্থাপনই মুখ্য উদ্দেশ্য, যার জন্য নতি অত্যন্ত প্রয়োজনীয়।

## 10.2 সরলরেখার নতি (Slope of a Line)

স্থানাঙ্ক তলে একটি রেখা $x$ অক্ষের সাথে যে দুটি কোণ উৎপন্ন করে, তারা পরস্পর সম্পূরক। $l$ রেখা $x$ অক্ষের

ধনাত্মক দিকের সাথে গড়ির কাঁটার বিপরীতে θ (ধরো) কোণ তৈরি করলে, একে রেখাটির আনতি (inclination) বলা হয়। স্পষ্টতই $0° \le \theta \le 180°$ (চিত্র 10.2)।

$x$-অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখা অথবা, $x$-অক্ষের সাথে সমাপতিত রেখার আনতি হয় 0°। উল্লম্ব রেখার (সমান্তরাল অথবা $y$-অক্ষের সাথে সমাপতিত) আনতি হল 90°।



চিত্র 10.2

**সংজ্ঞা I** যদি একটি সরল রেখা $l$ এর আনতি θ হয়, তবে tan θ কে $l$ রেখার আনতি অথবা প্রবণতা বলা হয়।

যে সরল রেখার আনতি 90°, সেই সরল রেখার নতি সংজ্ঞাত নয়।

একটি রেখার নতি $m$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয় তাহলে,

$m = \tan\theta,\ \theta \ne 90°$

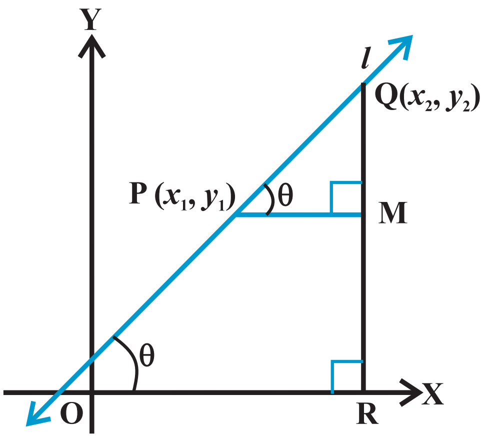
এটি লক্ষ করা যায় যে, $x$ অক্ষের নতি শূণ্য এবং $y$ অক্ষের নতি সংজ্ঞাত নয়।

### 10.2.1 সরলরেখার নতি, যখন রেখাটির উপর যে কোনো দুটি বিন্দু প্রদত্ত (Slope of a line when coordinates of any two points on the line are given)

একটি সরল রেখাকে আমরা সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করতে পারি যখন এর উপর দুটি বিন্দু দেওয়া থাকে। অতএব একটি রেখার উপর দুটি বিন্দুর সাহায্যে ঐ রেখার নতি নির্ণয়ে আমরা অগ্রসর হব।

ধরা যাক $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুটি বিন্দু উল্লম্ব নয় এমন একটি রেখা $l$ এর উপর অবস্থিত যার আনতি θ। স্বভাবতই $x_1 \ne x_2$, নতুবা রেখাটি $x$-অক্ষের উপর লম্ব হবে এবং এর নতি সংজ্ঞাত হবে না। $l$-রেখাটির আনতি সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ হতে পারে, আমরা উভয়ক্ষেত্র নিয়ে আলোচনা করব।

$x$-অক্ষের উপর QR লম্ব এবং RQ এর উপর PM লম্ব অঙ্কন করা হল, প্রদর্শিত চিত্র 10.3(i) এবং (ii) এর অনুরূপ।



চিত্র 10. 3 (i)

**ক্ষেত্র 1** যখন θ সূক্ষ্মকোণ:

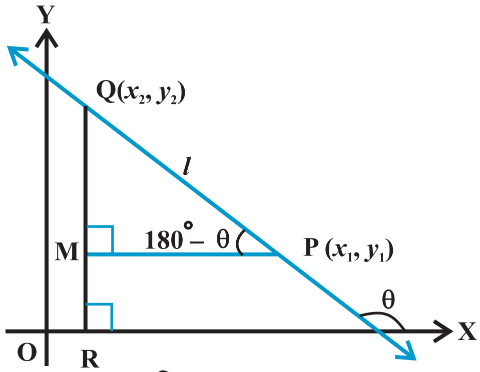
চিত্র 10.3(i) -এ, (i), ∠MPQ = θ. ... (1)

সুতরাং $l$ সরল রেখার নতি = $m$ = tan θ

কিন্তু ΔMPQ এ, আমরা জানি $$\tan\theta = \frac{MQ}{MP} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad \dots (2)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) হতে, আমরা পাই

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



চিত্র 10. 3 (ii)

ক্ষেত্র II যখন θ স্থূলকোণ :

10.3(ii) নং চিত্র থেকে, আমরা পাই

$$\angle MPQ = 180^\circ - \theta$$

সুতরাং, $\theta = 180^\circ - \angle MPQ$

এখন, $l$ সরল রেখার নতি

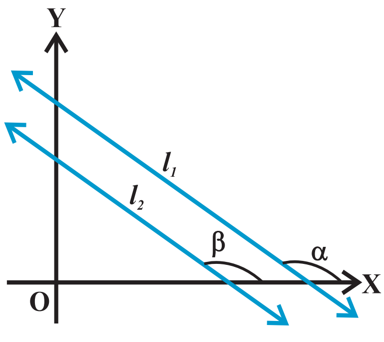
$$m = \tan\theta$$

$$= \tan(180^\circ - \angle MPQ) = -\tan \angle MPQ$$

$$= -\frac{MQ}{MP} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ফলস্বরূপ, আমরা উভয় ক্ষেত্রে দেখতে পাই, $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী রেখার নতি $m$ হলে এর মান হলে $(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

### 10.2.2 নতির সাহায্যে দুটি রেখা পরস্পর সমান্তরাল এবং লম্ব হওয়ার শর্ত (Conditions of parallelism and perpendicularity of lines in terms of their slopes)



চিত্র 10. 4

ধরা যাক, উল্লম্ব নয় দুটি রেখা $l_1$ এবং $l_2$ স্থানাঙ্ক তলে অবস্থিত এবং এদের প্রবণতা যথাক্রমে $m_1$ এবং $m_2$

ধরা যাক তাদের আনতি যথাক্রমে α এবং β

যদি $l_1$ রেখা এবং $l_2$ রেখা (চিত্র 10.4) পরস্পর সমান্তরাল হয়, তবে তাদের আনতি সমান, অর্থাৎ,

$\alpha = \beta$,, এবং তাহলে, $\tan\alpha = \tan\beta$

সুতরাং, $m_1 = m_2$ অর্থাৎ তাদের নতি সমান।

বিপরীত ভাবে, যদি দুটি রেখা $l_1$ এবং $l_2$ এর নতি সমান হয়, তবে $m_1 = m_2$

সুতরাং $\tan\alpha = \tan\beta$

tangent অপেক্ষকের ধর্ম অনুযায়ী (0° এবং 180° এর মধ্যে), $\alpha = \beta$ সুতরাং রেখাগুলো সমান্তরাল।

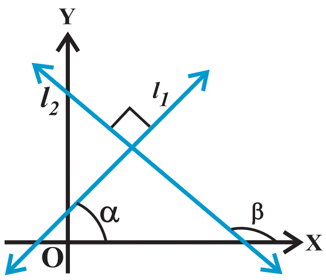
*তাহলে উল্লম্ব নয় দুটি রেখা $l_1$ এবং $l_2$ পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি কেবলমাত্র যদি তাদের নতি সমান হয়।*

***যদি $l_1$ এবং $l_2$ রেখা পরস্পর লম্ব হয়*** (চিত্র 10.5), তবে $\beta = \alpha + 90°$

*সুতরাং,* $\tan\ \beta = \tan(\alpha + 90°)$

$$= -\cot\alpha = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

অর্থাৎ, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ অথবা $m_1\ m_2 = -1$



চিত্র **10. 5**

বিপরীত ভাবে, যদি $m_1\ m_2 = -1$, অর্থাৎ, $\tan\alpha\tan\beta = -1$ হয়

তবে $\tan\alpha = -\cot\beta = \tan(\beta + 90°)$ অথবা, $\tan(\beta - 90°)$

তাহলে α এবং β এর মধ্যে পার্থক্য 90°।

অতএব, $l_1$ রেখা এবং $l_2$ রেখা পরস্পর লম্ব।

*সুতরাং, উল্লম্ব নয় এরূপ দুটি রেখা পরস্পর লম্ব হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি তাদের নতি পরস্পরের ঋণাত্মক অন্যোন্যক হয়।*

অর্থাৎ, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

বা, $m_1\ m_2 = -1$

চলো নীচের উদাহরণগুলো বিবেচনা করি—

**উদাহরণ 1** রেখাগুলোর নতি নির্ণয় করো:

(a) (3, – 2) এবং (–1, 4) বিন্দুগামী,

(b) (3, – 2) এবং (7, – 2) বিন্দুগামী,

(c) (3, – 2) এবং (3, 4) বিন্দুগামী,

(d) $x$ -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সথে আনতি 60°

**সমাধান** (a) (3, –2) এবং (–1, 4) বিন্দুগামী রেখার নতি

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

(b) (3, –2) এবং (7, –2) বিন্দুগামী রেখার নতি

$$m = \frac{-2-(-2)}{7-3} = \frac{0}{4} = 0$$

(c) (3, –2) এবং (3, 4) বিন্দুগামী রেখার নতি

$$m = \frac{4-(-2)}{3-3} = \frac{6}{0}$$, যা সংজ্ঞাত নয়।

(d) এখানে রেখার আনতি $\alpha = 60°$। সুতরাং, রেখার নতি হল $m = \tan 60° = \sqrt{3}$

### 10.2.3 দুটি রেখার মধ্যবর্তী কোণ (Angle between two lines)

যখন একটি তলে একাধিক সরল রেখা নিয়ে আমরা ভাবি তখন দেখা যায় রেখাগুলো হয় পরস্পর কে ছেদ করে অথবা পরস্পর সমান্তরাল হয়। এখানে আমরা দুটি রেখার মধ্যবর্তীকোণ নিয়ে আলোচনা করব এদের নতির সাহায্যে।

ধরা যাক, $L_1$ এবং $L_2$ রেখা দুটি উল্লম্ব নয় এবং এদের নতি যথাক্রমে $m_1$ এবং $m_2$। যদি $\alpha_1$ এবং $\alpha_2$ যথাক্রমে $L_1$ এবং $L_2$ এর আনতি হয়, তবে

$m_1 = \tan \alpha_1$ এবং $m_2 = \tan \alpha_2$

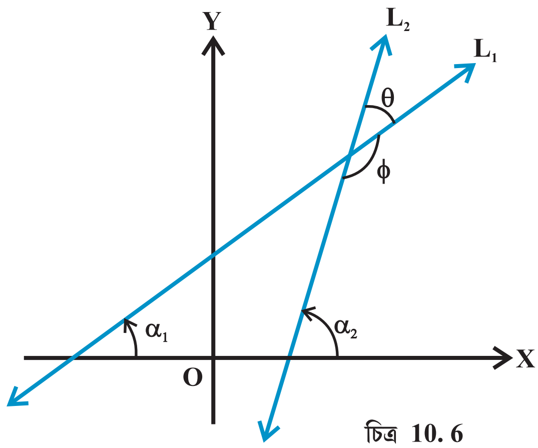
আমরা জানি যখন দুটি রেখা পরস্পরকে ছেদ করে তখন তারা দুই জোড়া বিপ্রতীপ কোণ তৈরি করে এবং এদের যেকোনো দুটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি হয় 180°। ধরা যাক $L_1$ এবং $L_2$ এর মধ্যবর্তী সন্নিহিত কোণগুলো হল $\theta$ এবং $\phi$ (চিত্র 10.6)। তাহলে $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ এবং $\alpha_1, \alpha_2 \neq 90°$

সুতরাং, $$\tan \theta = \tan (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1 \tan\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2}$$

(যেহেতু $1 + m_1 m_2 \neq 0$)

এবং $\phi = 180° - \theta$

তাহলে, $$\tan \phi = \tan (180° - \theta) = -\tan\theta = -\frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2}$$, যেহেতু $1 + m_1 m_2 \neq 0$




চিত্র 10.6

এখানে দুটি ক্ষেত্র পাওয়া যায় :

**ক্ষেত্র I** যদি $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ধনাত্মক হয়, তবে tan θ ধনাত্মক হবে এবং tan ϕ হবে ঋণাত্মক, অর্থাৎ, θ হবে সূক্ষ্মকোণ এবং ϕ হবে স্থূলকোণ।

**ক্ষেত্র II** যদি $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ঋণাত্মক হয়, তবে tan θ হবে ঋনাত্মক এবং tan ϕ হবে ধনাত্মক, অর্থাৎ, θ হবে স্থূলকোণ এবং ϕ হবে সূক্ষ্মকোণ।

তাহলে $m_1$ এবং $m_2$ নতি বিশিষ্ট রেখা $L_1$ এবং $L_2$ এর মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ (θ ধরে) হল

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|, \text{ যেহেতু } 1 + m_1 m_2 \neq 0 \qquad \dots (1)$$

$\phi = 180^0 - \theta$ প্রয়োগ করে স্থূলকোণ (ধরো ϕ) পাওয়া যায়।

**উদাহরণ 2** যদি দুটি রেখার মধ্যবর্তী কোণ $\dfrac{\pi}{4}$ হয় এবং একটি রেখার নতি $\dfrac{1}{2}$ হয় তবে অপর রেখাটির নতি নির্ণয় করো।

**সমাধান** $m_1$ এবং $m_2$ নতি বিশিষ্ট দুটি রেখার মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ θ হলে আমরা জানি

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \qquad \dots (1)$$

ধরা যাক, $m_1 = \dfrac{1}{2}$, $m_2 = m$, এবং $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

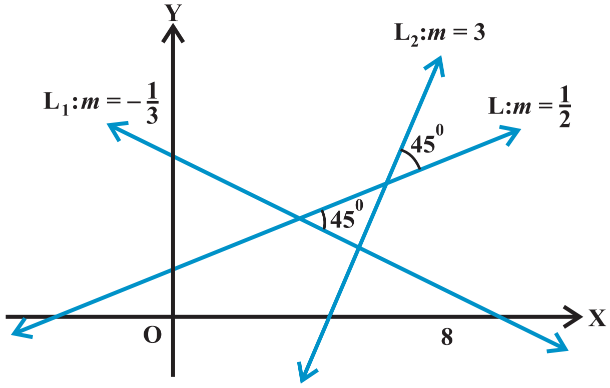
এই মানগুলো (1) এ বসিয়ে, পাওয়া যায়

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right| \quad \text{বা,} \quad 1 = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right|$$

এর থেকে পাওয়া যায় $\dfrac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\, m} = 1$ বা, $\dfrac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\, m} = -1$

সুতরাং $m = 3$ বা $m = -\dfrac{1}{3}$

তাহলে অপর রেখাটির নতি হয় 3 অথবা $-\frac{1}{3}$। 10.7 নং চিত্র থেকে দুটি উত্তরের ব্যাখ্যা পাওয়া যায়।




চিত্র 10. 7

**উদাহরণ 3** (–2, 6) এবং (4, 8) বিন্দুগামী রেখা, (8, 12) এবং ($x$, 24) বিন্দুগামী রেখার উপর লম্ব হলে $x$ এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান** (–2, 6) এবং (4, 8) বিন্দুগামী রেখার প্রবণতা হল $m_1 = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(8, 12) এবং ($x$, 24) বিন্দুগামী রেখার প্রবণ তা

$$m_2 = \frac{24-12}{x-8} = \frac{12}{x-8}$$

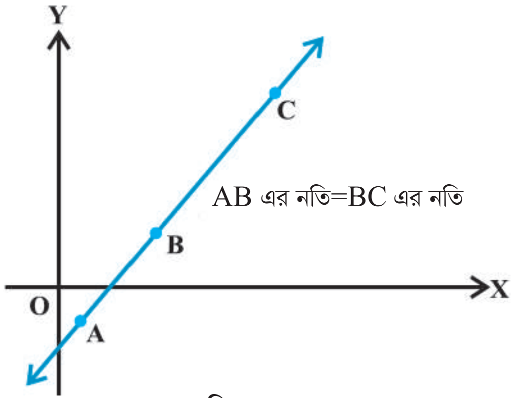
যেহেতু রেখাদুটি পরস্পর লম্ব,

$m_1\, m_2 = -1$, এর থেকে পাওয়া যায়

$\frac{1}{3} \times \frac{12}{x-8} = -1$ বা $x=4$

### *10.2.4 তিনটি বিন্দুর সমরেখতা (collinearity of three points)*

আমরা জানি দুটি সমান্তরাল রেখার নতি সমান। যদি দুটি রেখা একটি সাধারণ বিন্দুগামী এবং তাদের নতি সমান হয়, তবে রেখা দুটি সমাপতিত হবে। অতএব, যদি A, B, C বিন্দু তিনটি XY - তলে অবস্থিত হয়, তবে তারা একটি রেখায় অবস্থিত হবে অর্থাৎ তিনটি বিন্দু সমরেখ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি AB এর নতি = BC এর নতি হয়।




চিত্র 10. 8

**উদাহরণ 4** তিনটি বিন্দু P $(h, k)$, Q $(x_1, y_1)$ এবং R $(x_2, y_2)$ একটি রেখার উপর অবস্থিত। দেখাও যে

$$(h-x_1)(y_2-y_1)=(k-y_1)(x_2-x_1)$$

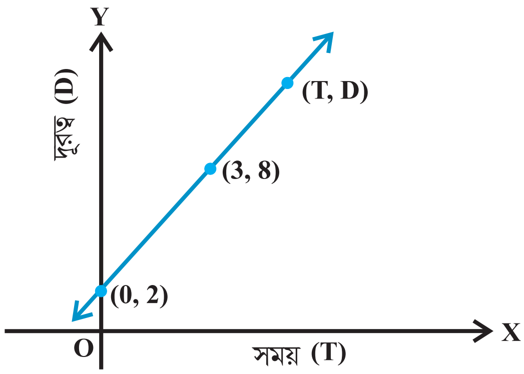
**সমাধান** যেহেতু P, Q এবং R বিন্দুগুলো সমরেখ,

অতএব, PQ এর নতি = QRএর নতি অর্থাৎ, $\dfrac{y_1-k}{x_1-h} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

বা, $\dfrac{k-y_1}{h-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

বা, $(h-x_1)(y_2-y_1) = (k-y_1)(x_2-x_1)$

**উদাহরণ 5** 10.9 চিত্রে, সময় এবং দূরত্বের রৈখিক গতির লেখচিত্র প্রদত্ত। সময় এবং দূরত্বের দুটি পরিস্থিতি, যখন T=0, D=2 এবং যখন T=3, D=8। নতির ধারণা প্রয়োগ করে, গতির সূত্র নির্ণয় করো, অর্থাৎ, দূরত্ব কীভাবে সময়ের উপর নির্ভর করে।




চিত্র **10.9**

**সমাধান** ধরাযাক, (T, D) রেখার উপর যেকোনো একটি বিন্দু, যেখানে T সময়ের দূরত্ব D নির্দেশ করে। যেহেতু (0, 2), (3, 8) এবং (T, D) বিন্দুগুলো সমরেখ, তাই

$\dfrac{8-2}{3-0} = \dfrac{D-8}{T-3}$ বা, $6(T-3) = 3(D-8)$

বা, $D = 2(T+1)$,

যা নির্ণেয় সম্পর্ক।

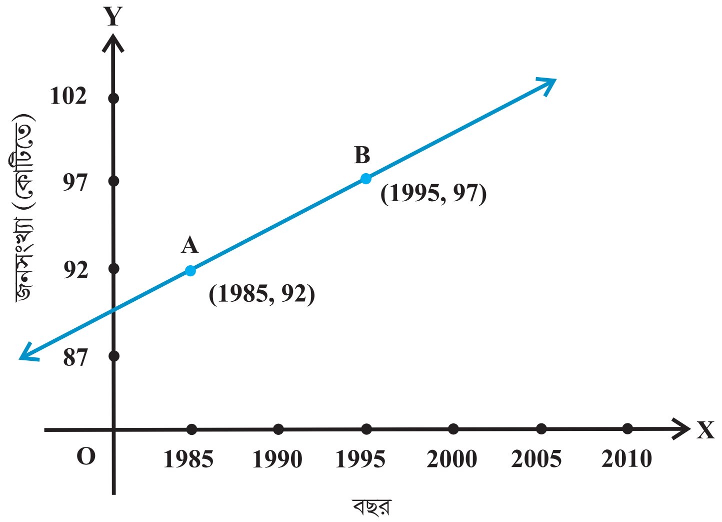
## অনুশীলনী 10.1

1. কার্তেসিয় তলে একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন করো, যার শীর্ষ বিন্দুগুলো হল $(-4, 5)$, $(0, 7)$, $(5, -5)$ এবং $(-4, -2)$ । এটির ক্ষেত্রফলও নির্ণয় করো।
2. $2a$ বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের ভূমি $y$-অক্ষ বরাবর এরূপে অবস্থিত যেন ভূমির মধ্যবিন্দু মূলবিন্দু হয়। ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।
3. P $(x_1, y_1)$ এবং Q $(x_2, y_2)$ এর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করো যখন : (i) PQ $y$ -অক্ষের সমান্তরাল হয় (ii) PQ, $x$- অক্ষের সমান্তরাল হয়।
4. $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু নির্ণয় করো, যা (7, 6) ও (3, 4) হতে সমদূরবর্তী।
5. P $(0, -4)$ এবং B $(8, 0)$ বিন্দুর সংযোগকারী রেখাংশের মধ্যবিন্দু এবং মূলবিন্দুগামী রেখার নতি নির্ণয় করো।

6. পীথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার না করে, দেখাও যে $(4, 4)$, $(3, 5)$ এবং $(-1, -1)$ সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।
7. ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে, $y$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে রেখা $30^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে, সেই রেখার নতি নির্ণয় করো।
8. $(x, -1)$, $(2, 1)$ এবং $(4, 5)$ বিন্দুগুলো সমরেখ হলে $x$-এর মান নির্ণয় করো।
9. দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র ব্যবহার না করে, দেখাও যে $(-2, -1)$ $(4, 0)$, $(3, 3)$ এবং $(-3, 2)$ বিন্দুগুলো সামন্তরিকের শীর্ষবিন্দু।
10. $(3, -1)$ এবং $(4, -2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখা এবং $x$-অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।
11. একটি রেখার নতি অপর একটি রেখার নতির দ্বিগুণ। যদি তাদের মধ্যবর্তী কোণের ট্যানজেন্ট এর মান $\frac{1}{3}$ হয় তবে রেখাগুলোর নতি নির্ণয় করো।
12. একটি রেখা $(x_1, y_1)$ এবং $(h, k)$ বিন্দুগামী। যদি রেখাটির নতি $m$ হয়, তবে দেখাও

$$k - y_1 = m\,(h - x_1)$$

13. যদি $(h, 0)$, $(a, b)$ এবং $(0, k)$ বিন্দুগুলো একটি রেখায় অবস্থিত হয়, তবে দেখাও যে $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$
14. নিম্নের জনসংখ্যা বছর সংক্রান্ত লেখচিত্রটি বিবেচনা করো (চিত্র 10.10)। AB রেখার নতি নির্ণয় করো এবং এটি ব্যবহার করে, 2010 সালে লোকসংখ্যা কত হবে নির্ণয় করো?



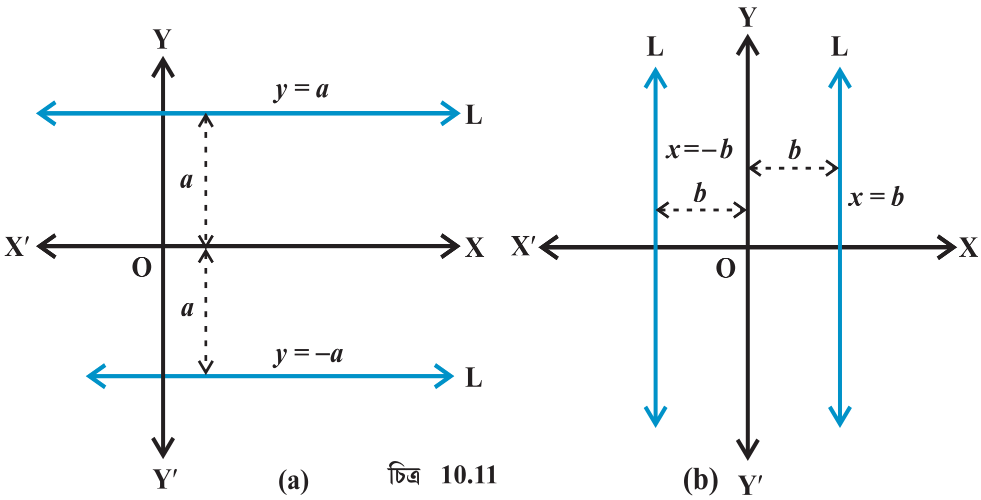

চিত্র **10.10**

## 10.3 একটি সরল রেখার সমীকরণের বিভিন্ন রূপ (Various Forms of the Equation of a line)

আমরা জানি একটি সমতলে অবস্থিত প্রতিটি রেখার উপর অসংখ্য বিন্দু বর্তমান। বিন্দু এবং রেখার মধ্যবর্তী এই সম্পর্ক, নিম্নের সমস্যার সমাধানে সাহায্য করে:

আমরা কীভাবে বলতে পারি যে একটি প্রদত্ত বিন্দু একটি প্রদত্ত রেখার উপর অবস্থিত? এর উত্তর এটি হতে পারে যে, বিন্দুগুলো রেখার উপর অবস্থিত হওয়ার নির্দিষ্ট শর্ত আমাদের জানতে হবে। ধরা যাক P $(x, y)$ একটি সদৃচ্ছ বিন্দু $xy$-তলে অবস্থিত এবং L হল প্রদত্ত রেখা। L - এর সমীকরণ নির্নয়ের ক্ষেত্রে P বিন্দুর জন্য এমন একটি বিবৃতি বা শর্ত নির্ণয় করতে হবে যা কেবলমাত্র ঐ অবস্থায় সত্য হয়, অন্যথা মিথ্যা। নিঃসন্দেহে, এই বিবৃতি হল কেবল মাত্র $x, y$ সম্মিলিত একটি বীজগণিতিক সমীকরণ, এখন আমরা বিভিন্ন অবস্থার পরিপ্রেক্ষিতে রেখার সমীকরণ আলোচনা করব।

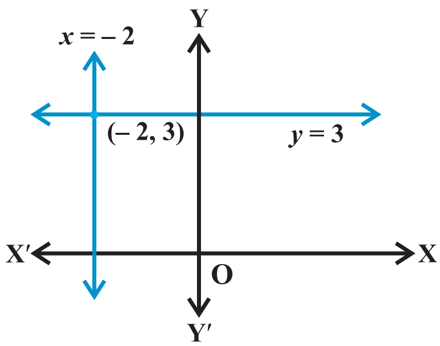
***10.3.1 অনুভূমিক এবং উল্লম্ব রেখা (Horizontal and vertical lines)*** যদি একটি অনুভূমিক রেখা L, $x$ -অক্ষ থেকে $a$ দূরত্বে অবস্থিত হয়, তবে রেখার প্রত্যেকটি বিন্দুর কোটি হয় $a$ অথবা $-a$ [চিত্র 10.11 (a)] সুতরাং L -এর সমীকরণ হয় $y = a$ অথবা $y = -a$। চিহ্ন নির্ধারণ নির্ভর করে রেখার অবস্থানের উপর অর্থাৎ রেখাটি $y$ - অক্ষের উপরে না নীচে। অনুরূপে, $x$ - অক্ষ থেকে $b$ দূরত্বে অবস্থিত উল্লম্ব রেখার সমীকরণ হয় $x = b$ অথবা $x = -b$ [চিত্র 10.11(b)]




চিত্র 10.11

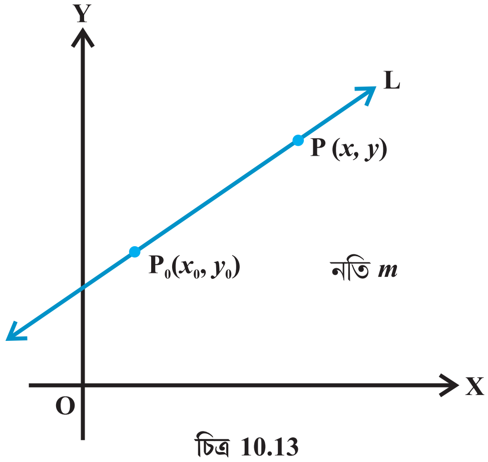
**উদাহরণ 6** অক্ষের সমান্তরাল এবং $(-2, 3)$ বিন্দুগামী রেখাগুলোর সমীকরণ নির্ণয় করো।

**সমাধান** রেখাগুলোর অবস্থান 10.12 নং চিত্রে প্রদর্শন করা হল। $x$ - অক্ষের সমান্তরাল রেখার উপর প্রতিটি বিন্দুর $y$ -স্থানাঙ্ক হল 3 । সুতরাং $(-2, 3)$ বিন্দুগামী $x$ - অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $y = 3$ । অনুরূপে $(-2, 3)$ বিন্দুগামী $y$ -অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $x = -2$ ।




চিত্র 10.12

### 10.3.2 বিন্দু-প্রবণতা আকার *(Point-slope form)*



চিত্র 10.13

ধরা যাক, তির্যক রেখা L এর উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P_0$ $(x_0, y_0)$ অবস্থিত, যার প্রবণতা $m$ আরো ধরা যাক, P $(x, y)$, L এর উপর একটি যদৃচ্ছ বিন্দু (চিত্র 10.3)।

তাহলে, সংজ্ঞানুসারে L রেখার প্রবণতা হবে

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \text{ অর্থাৎ, } y - y_0 = m(x - x_0) \quad \ldots(1)$$

যেহেতু বিন্দু $P_0$ $(x_0, y_0)$, L এর সকল বিন্দু $(x, y)$ এর সঙ্গে (1) কে সিদ্ধ করে এবং তলের অন্য কোনো বিন্দু (1) কে সিদ্ধ করে না। এজন্য বাস্তবে সমীকরণ (1) হল প্রদত্ত L রেখার সমীকরণ।

তাহলে প্রবণতা $m$ এবং নির্দিষ্ট বিন্দু $(x_0, y_0)$ গামী রেখাটির উপর $(x, y)$ অবস্থিত হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি এর স্থানাঙ্ক $y - y_0 = m\ (x - x_0)$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

**উদাহরণ 7** প্রবণতা $-4$ এবং $(-2, 3)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

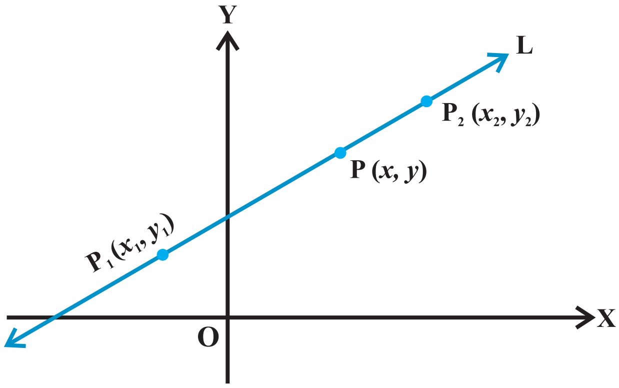
**সমাধান** এখানে $m = -4$ এবং প্রদত্ত বিন্দু $(x_0, y_0)$ হল $(-2, 3)$।

উপরিউক্ত (1), বিন্দু-প্রবণতা আকার সূত্র প্রয়োগে, প্রদত্ত রেখার সমীকরণ

$$y - 3 = -4\ (x + 2)$$

অথবা, $4x + y + 5 = 0$, এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

### 10.3.3 দুই-বিন্দু আকার (Two-point form)



চিত্র 10.14

ধরা যাক সরলরেখা L দুটি প্রদত্ত বিন্দু $P_1$ $(x_1, y_1)$ এবং $P_2$ $(x_2, y_2)$ গামী। আরো ধরা যাক P $(x, y)$, L এর উপর একটি সাধারণ বিন্দু (চিত্র 10.14)।

তিনটি বিন্দু $P_1$, $P_2$ P সমরেখ।

সুতরাং, আমরা জানি

$P_1P$ এর প্রবণতা $= P_1P_2$ এর প্রবণতা

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ অথবা, } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

তাহলে, $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \ldots (2)$$

**উদাহরণ 8** (1, –1) এবং (3, 5) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ লেখো।

**সমাধান** এখানে $x_1 = 1, y_1 = -1, x_2 = 3$ এবং $y_2 = 5$ উপরের (2), দুই-বিন্দু আকার প্রয়োগ করে, রেখার সমীকরণ, আমরা পাই

$$y - (-1) = \frac{5 - (-1)}{3 - 1}(x - 1)$$

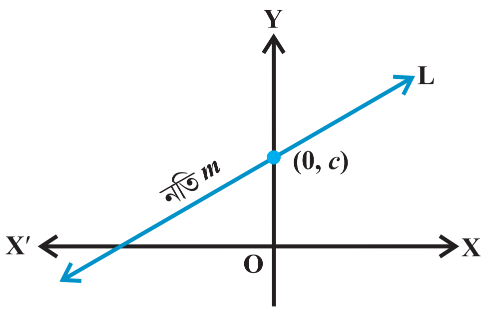
বা, $\qquad -3x + y + 4 = 0$, নির্ণেয় সমীকরণ

**10.3.4 প্রবণতা ছেদিতাংশ আকার (slope-intercept form)** কখনো কখনো একটি রেখা জ্ঞাত হয় এর প্রবণতা এবং কোনো একটি অক্ষের ছেদিতাংশের দ্বারা। এখন আমরা এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় করবো।

**ক্ষেত্র 1** ধরা যাক, $m$ প্রবণতা বিশিষ্ট একটি রেখা L, মূলবিন্দু হতে C দূরত্বে $y$ -অক্ষকে ছেদ করে। অতএব রেখাটি $y$ - অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, c)$। তাহলে L রেখাটির প্রবণতা $m$ এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু $(0, c)$ গামী। সুতরাং, বিন্দু-প্রবণতা আকার সূত্র প্রয়োগে রেখাটির সমীকরণ হয়—

$$y - c = m\ (x - 0) \quad \text{অথবা} \quad y = mx + c$$

তাহলে, $y$ -ছেদিতাংশ $c$ এবং $m$ প্রবণতা বিশিষ্ট রেখার উপর $(x, y)$ বিন্দু অবস্থিত হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি



চিত্র 10.15

$$y = mx + c \qquad \ldots(3)$$

লক্ষ করো $c$ এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হবে যদি ছেদিতাংশ যথাক্রমে $y$ -অক্ষের ধনাত্মক বাহু এবং ঋণাত্মক বাহু থেকে তৈরি হয়।

**ক্ষেত্র II** ধরা যাক, $m$ প্রবণতাবিশিষ্ট রেখা L এর $x$ -অক্ষের ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য $d$। L রেখার সমীকরণ হয়

$$y = m(x - d) \qquad \ldots (4)$$

ক্ষেত্র (1) এর আলোচনা অনুযায়ী ছাত্ররা নিজেরাই এই সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।

**উদাহরণ 9** সেই রেখাগুলোর সমীকরণ নির্ণয় করো যার $\tan \theta = \frac{1}{2}$, যেখানে $\theta$ হল রেখাটির আনতি এবং

(i) $y$- ছেদিতাংশ $-\frac{3}{2}$ (ii) $x$ - ছেদিতাংশ 4।

সমাধান (i) এখানে, রেখার প্রবণতা $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ এবং $y$ - ছেদিতাংশ $c = -\frac{3}{2}$

সুতরাং, উপরের (3) এর প্রবণতা-ছেদিতাঅংশ আকার সূত্র প্রয়োগে, রেখাটির সমীকরণ হয় —

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, \text{ বা, } 2y - x + 3 = 0$$

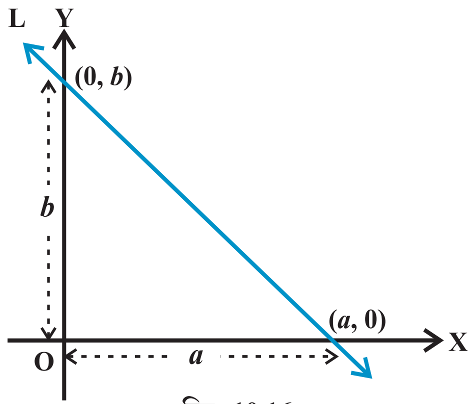
যা নির্ণেয় সমীকরণ।

(ii) এখানে $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ এবং $d$=4 সুতরাং, প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার সূত্রের প্রয়োগে উপরের (4) হতে রেখাটির সমীকরণ হয়— $y = \frac{1}{2}(x-4)$ অথবা $2y - x + 4 = 0$, যা নির্ণেয় সমীকরণ।

**10.3.5 ছেদিতাংশ-আকার (Intercept-form)** ধরা যাক, একটি রেখা L, $x$ - ছেদিতাংশ $a$ এবং $y$ -ছেদিতাংশ $b$ তৈরি করে। স্পষ্টতঃ L, $x$ অক্ষকে ছেদ করে (a, 0) বিন্দুতে এবং $y$ - অক্ষকে ছেদ করে (0, $b$) বিন্দুতে (চিত্র 10.16)। দুই-বিন্দু আকার সূত্রের সাহায্যে রেখাটির সমীকরণ হল

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a) \text{ বা, } ay = -bx + ab$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



চিত্র 10.16

তাহলে $x$ - অক্ষ এবং $y$ - অক্ষের ছেদিতাংশ যথাক্রমে $a$ এবং $b$ উৎপন্নকারী রেখার সমীকরণ হল

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \ldots (5)$$

**উদাহরণ 10** এমন একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যার $x$ - অক্ষ এবং $y$- অক্ষের ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে –3 এবং 2।

**সমাধান** এখানে $a$ = –3 এবং $b$ = 2। উপরের (5) এর ছেদিতাংশ আকারের সূত্রের প্রয়োগে রেখার সমীকরণ হয়—

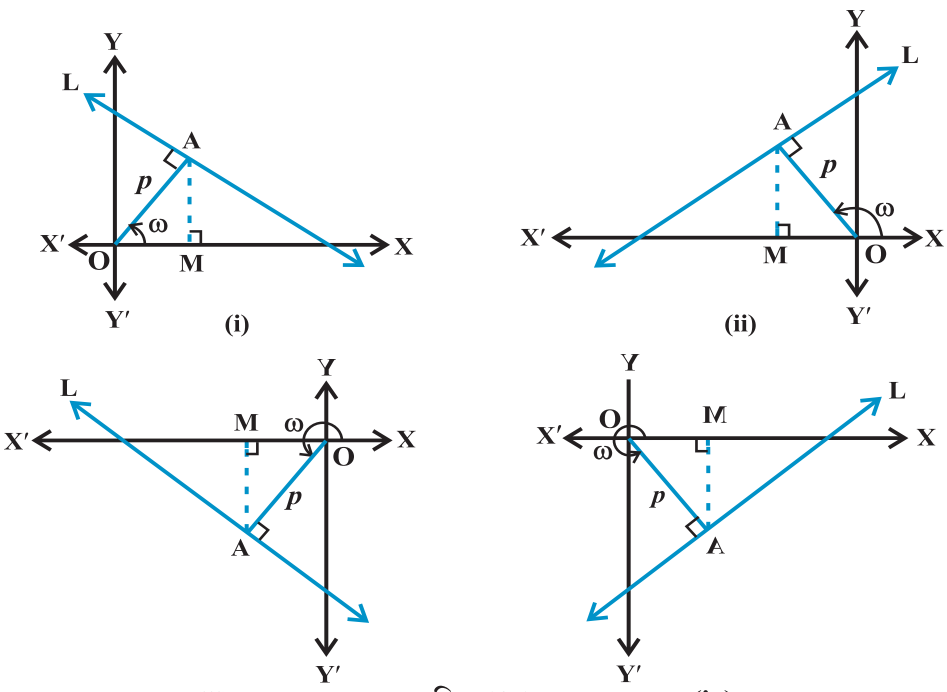
$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1 \text{ বা, } 2x - 3y + 6 = 0$$

**10.3.6 অভিলম্ব আকার (Normal form)** ধরা যাক, নিম্নলিখিত তথ্যসহ আমাদের একটি তির্যক রেখা জ্ঞাত আছে।

(i) মূলবিন্দু হতে রেখাটির উপর লম্বের দৈর্ঘ্য।

(ii) লম্ব (Normal) রেখা যা $x$ -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে।

ধরাযাক, L একটি রেখা, মূলবিন্দু O থেকে এর দূরত্ব OA=P এবং ধনাত্মক $x$ - অক্ষ এবং OA এর মধ্যবর্তী কোণ $\angle XOA = \omega$ কার্তেসীয় তলে L -রেখার সম্ভাব্য অবস্থান চিত্র 10.17 -এ দেখানো হয়েছে। এখন আমাদের লক্ষ হল L রেখার প্রবণতা এবং এর উপর একটি বিন্দু নির্ণয়। প্রতি ক্ষেত্রে $x$ - অক্ষের উপর AM লম্ব অঙ্কন করা হল।




চিত্র 10.17

প্রতি ক্ষেত্রে আমরা পাই OM = $p\cos\omega$ এবং MA = $p\sin\omega$, তাহলে A এর স্থানাঙ্ক হল $(p\cos\omega, p\sin\omega)$

অধিকন্তু, L রেখা OA এর উপর লম্ব।

সুতরাং, L রেখার প্রবণতা $-\dfrac{1}{OA \text{ এর প্রবণতা}} = -\dfrac{1}{\tan\omega} = -\dfrac{\cos\omega}{\sin\omega}$

তাহলে L রেখার প্রবণতা $-\dfrac{\cos\omega}{\sin\omega}$ এবং এর উপর অবস্থিত A এর স্থানাঙ্ক $(p\cos\omega, p\sin\omega)$।

অতএব বিন্দু প্রবণতা আকারে L রেখার সমীকরণ।

$$y - p\,sin\,\omega = -\frac{cos\,\omega}{sin\,\omega}(x - p\,cos\,\omega) \text{ বা, } x\,cos\,\omega + y\,sin\,\omega = p(\,sin^2\omega + cos^2\omega\,)$$

বা, $x \cos \omega + y \sin \omega = p.$

সুতরাং, কোনো রেখার মূলবিন্দু হতে লম্বদূরত্ব $p$ এবং $x$ -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে ঐ লম্বরেখা $\omega$ কোণ তৈরি করলে সেই রেখার সমীকরণ হয় —

$$x \cos \omega + y \sin \omega = p \qquad \text{... (6)}$$

**উদাহরণ 11** কোনো রেখার মূলবিন্দু হতে লম্বদূরত্ব 4 একক এবং $x$ -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে ঐ লম্বরেখা 15° কোণ উৎপন্ন করলে সেই রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

**সমাধান** এখানে, আমাদের আছে $p=4$ এবং $\omega = 15°$ (চিত্র 10.18)

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

এবং $$\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad (\text{কেন?})$$

উপরের (6) এর অভিলম্ব আকারে, রেখাটির সমীকরণ

$$x \cos 15^0 + y \sin 15^0 = 4 \text{ বা, } \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}y = 4$$

বা, $$\left(\sqrt{3}+1\right)x + \left(\sqrt{3}-1\right)y = 8\sqrt{2}$$

এটি নির্ণেয় সমীকরণ

**উদাহরণ 12** ফারেনহাইট তাপমাত্রা F এর পরম তাপমাত্রা K একটি রৈখিক সমীকরণকে সিদ্ধ করে। প্রদত্ত K=273 যখন F=32 এবং K=373 যখন F=212। **F** এর সাহায্যে K এর মান প্রকাশ করো এবং F এর মান নির্ণয় করো, যখন K=0.

**সমাধান** $x$ -অক্ষ বরাবর F এবং $y$ -অক্ষ বরাবর K ধরে, XY - তলে দুটি বিন্দু (32, 273) এবং (212, 373) পাই। দুই-বিন্দু আকারের যে সমীকরণ (F, K) বিন্দুকে সিদ্ধ করে তা হলে —

$$K - 273 = \frac{373-273}{212-32}(F-32) \text{ বা, } K - 273 = \frac{100}{180}(F-32)$$

বা, $$K = \frac{5}{9}(F-32) + 273 \qquad \text{... (1)}$$

এটিই নির্ণেয় সম্পর্ক।

যখন K=0, সমীকরণ (1) হতে পাওয়া যায়

$$0=\frac{5}{9}(F-32)+273 \text{ বা } F-32=-\frac{273\times 9}{5}=-\ 491.4 \text{ বা } F=-459.4$$

*বিকল্প পদ্ধতি* আমরা জানি একটি রেখার সমীকরণের সরলতম রূপ হল $y = mx + c$। আবার $x$ -অক্ষ বরাবর F এবং $y$ - অক্ষ বরাবর K ধরে, আমরা সমীকরণের রূপটি পাই,

$$K = mF + c \qquad \dots (1)$$

(32, 273) এবং (212, 373) দিয়ে সমীকরণ (1) সিদ্ধ হয়।

সুতরাং, $273 = 32m + C \qquad \dots (2)$

এবং $373 = 212m + C \qquad \dots (3)$

(2) এবং (3) সমাধান করে, আমরা পাই

$$m = \frac{5}{9} \text{ এবং } c = \frac{2297}{9}$$

$m$ এবং C এর মান (1) এ বসিয়ে, আমরা পাই

$$K=\frac{5}{9}F+\frac{2297}{9} \qquad \dots (4)$$

এটাই নির্ণেয় সম্পর্ক। যখন K=0, (4) থেকে পাওয়া যায় F= – 459.4

**দ্রষ্টব্য** : আমরা জানি, $y = mx + c$ সমীকরণে, দুটি ধ্রুবক $m$ এবং $c$ আছে। এই দুটি ধ্রুবকের মান নির্ণয়ের জন্য, আমাদের দুটি শর্ত প্রয়োজন যা রেখার সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। উপরিউক্ত সবগুলো উদাহরণে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য দুটি শর্ত দেওয়া আছে।

## অনুশীলনী 10.2

1 থেকে 8 নং প্রশ্নে প্রদত্ত শর্তের সাপেক্ষে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো :

**1.** $x$ -অক্ষ এবং $y$-অক্ষের সমীকরণ লেখো।

**2.** নতি $\frac{1}{2}$ এবং (–4, 3) বিন্দুগামী।

**3.** (0, 0) বিন্দুগামী এবং নতি $m$ বিশিষ্ট

**4.** $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ বিন্দুগামী এবং $x$ -অক্ষের সাথে 75° কোণে আনত।

**5.** মূলবিন্দুর বাঁদিকে $x$ -অক্ষকে 3 -একক দূরত্বে ছেদ করে এবং প্রবণতা – 2।

**6.** মূলবিন্দুর উপরের দিকে $y$ - অক্ষকে 2 -একক দূরত্বে ছেদ করে এবং $x$ -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে।

**7.** ( –1, 1) এবং (2, – 4) বিন্দুগামী।

**8.** মূলবিন্দু হতে লম্বদূরত্ব 5 -একক এবং ধনাত্মক $x$ -অক্ষের সাথে লম্ব $30^0$ কোণ উৎপন্ন করে।

**9.** $\Delta$ PQR এর শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক P(2, 1), Q(–2, 3) এবং R (4, 5) । শীর্ষবিন্দু R -গামী মধ্যমার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**10.** (–3, 5) বিন্দুগামী এবং (2, 5) ও ( –3, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখার উপর লম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো।

**11.** একটি সরলরেখা (1, 0) এবং (2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখার উপর লম্ব এবং রেখাটিকে $1: n$ অনুপাতে বিভক্ত করে। সরল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

**12.** একটি সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যা স্থানাঙ্ক অক্ষ হতে সমান অংশ ছিন্ন করে এবং (2, 3) বিন্দুগামী।

**13.** একটি সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যা (2, 2) বিন্দুগামী এবং অক্ষ দুটি থেকে যে দুটি অংশ ছিন্ন করে তাদের সমষ্টি 9।

**14.** (0, 2) বিন্দুগামী এবং ধনাত্মক $x$ - অক্ষের সাথে $\frac{2}{3}$ কোণ উৎপন্নকারী রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো। আবার, এর সমান্তরাল এবং মূলবিন্দুর নীচের দিকে 2 -একক দূরত্বে $y$ -অক্ষকে ছেদ করে এমন রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**15.** মূলবিন্দু হতে কোনো রেখার উপর অঙ্কিত অভিলম্ব রেখাটিতে (–2, 9) বিন্দুতে মিলিত হয়। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

**16.** L -দৈর্ঘ্যের (সেমি) একটি কপার দণ্ড, সেলসিয়াস তাপমাত্রা C এর একটি রৈখিক অপেক্ষক। একটি পরীক্ষায়, যদি L=124.942 যখন C=20 এবং L=125.134 যখন C=110 হয়, তবে L কে C দিয়ে প্রকাশ করো।

**17.** একজন দুধের দোকানের মালিক প্রতি সপ্তাহে 980 লিটার দুধ, প্রতিলিটার 14 টাকা দরে এবং 1220 লিটার দুধ প্রতি লিটার 16 টাকা দরে বিক্রি করে। বিক্রয়মূল্য এবং চাহিদার মধ্যে রৈখিক সম্পর্ক ধরে প্রতি লিটার 17 টাকা দরে প্রতি সপ্তাহে সে কত লিটার দুধ বিক্রয় করে?

**18.** অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী রেখাংশের মধ্যবিন্দু P (a, b) হলে, দেখাও যে রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$

**19.** অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী রেখাংশকে R $(h, k)$ বিন্দু 1 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

**20.** রেখার সমীকরণের ধারণা প্রয়োগ করে, প্রমাণ করো (3, 0), (–2, –2) এবং (8, 2) বিন্দু তিনটি সমরেখ।

## 10.4 রেখার সাধারণ সমীকরণ (General Equation of a line)

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে, আমরা দ্বি-চল বিশিষ্ট একঘাত সাধারণ সমীকরণ A$x$ + B$y$ + C = 0, নিয়ে অধ্যয়ন করেছি যেখানে A, B এবং C বাস্তব সংখ্যা এরূপ যে, A এবং B একসঙ্গে শূন্য নয়। A$x$ + B$y$ + C = 0 সমীকরণের লেখচিত্র সর্বদাই একটি সরলরেখা।

সুতরাং A$x$ + B$y$ + C = 0 আকারের যেকোনো সমীকরণকে (যেখানে A এবং B একসঙ্গো শূন্য নয়) সাধারণ রৈখিক সমীকরণ অথবা সরল রেখার সাধারণ সমীকরণ বলা হয়।

### *10.4.1 Ax + By + C = 0 এর বিভিন্ন আকার*

নিম্নলিখিত পদ্ধতির সাহায্যে রেখার সাধারণ সমীকরণকে বিভিন্ন রূপে পরিবর্তন করা যায়:

**(a) প্রবণতা ছেদিতাংশ আকার (Slope-intercept form)**

যদি B ≠ 0 হয়, তবে A$x$ + B$y$ + C = 0 কে লেখা যায়

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \text{বা,} \quad y = mx + c,$$

যেখানে, $m = -\frac{A}{B}$ এবং $c = -\frac{C}{B}$

আমরা জানি সমীকরণ (1) হল রেখার সমীকরণের প্রবণতা ছেদিতাংশ আকার,

যেখানে প্রবণতা হল $-\frac{A}{B}$ এবং $y$ -এর ছেদিতাংশ হল $-\frac{C}{B}$

যদি B=0 হয় তবে $x = -\frac{C}{A}$, এটি একটি উল্লম্ব রেখা যার প্রবণতা অসংজ্ঞাত এবং $x$ -ছেদিতাংশ $-\frac{C}{A}$

**(b) ছেদিতাংশ আকার (Intercept form)** যদি C ≠ 0, তবে A$x$ + B$y$ + C = 0 কে লেখা যায়

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \quad \text{বা} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \ldots (2)$$

যেখানে $a = -\frac{C}{A}$ এবং $b = -\frac{C}{B}$

আমরা জানি সমীকরণ (2), রেখার সমীকরণের ছেদিতাংশ আকার যার $x$ -ছেদিতাংশ $-\frac{C}{A}$ এবং $y$ -ছেদিতাংশ হল $-\frac{C}{B}$

যদি C=0 হয়, তবে A$x$ + B$y$ + C = 0 কে লেখা যায় A$x$ + B$y$ = 0, যা মূলবিন্দুগামী রেখা এবং উভয় অক্ষ হতে ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য শূণ্য।

**(c) অভিলম্ব আকার (Normal form)** ধরা যাক সমীকরণ A$x$ + B$y$ + C = 0 বা A$x$ + B$y$ = – C দিয়ে নির্দেশিত সরল রেখার অভিলম্ব আকার $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ তাহলে উভয় সমীকরণ অভিন্ন।

সুতরাং, $\frac{A}{\cos\omega} = \frac{B}{\sin\omega} = -\frac{C}{p}$

$$\cos\ \omega = -\frac{Ap}{C} \text{ এবং } \sin\ \omega = -\frac{Bp}{C}$$

এখন, $$\sin^2\omega + \cos^2\omega = \left(-\frac{Ap}{C}\right)^2 + \left(-\frac{Bp}{C}\right)^2 = 1$$

বা $$p^2 = \frac{C^2}{A^2+B^2} \text{ বা } p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

সুতরাং, $$\cos\omega = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ এবং } \sin\omega = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

তাহলে, $Ax + By + C = 0$ সমীকরণের অভিলম্ব আকার হল $x \cos \omega + y \sin \omega = p$,

যেখানে, $$\cos\ \omega = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\ \omega = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

এবং $$p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

চিহ্নের সঠিক নির্ধারণ এরূপ করা হয় যেন p ধনাত্মক হয়।

**উদাহরণ 13** একটি রেখার সমীকরণ $3x - 4y + 10 = 0$, এর (i) প্রবণতা, (ii) $x$ এবং $y$ ছেদিতাংশ নির্ণয় করো।

**সমাধান** (i) প্রদত্ত সমীকরণ $3x - 4y + 10 = 0$ কে লেখা যায়

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \qquad \text{... (1)}$$

(i) কে $y = mx + c$ এর সঙ্গে তুলনা করে, প্রদত্ত রেখার প্রবণতা পাওয়া যায় $m = \frac{3}{4}$

(ii) সমীকরণ $3x - 4y + 10 = 0$ কে লেখা যায়

$$3x - 4y = -10 \text{ বা, } \frac{x}{-\frac{10}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1 \qquad \text{... (2)}$$

(2) কে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে, আমরা পাই $x$ এর ছেদিতাংশ $a = -\frac{10}{3}$ এবং $y$ এর ছেদিতাংশ $b = \frac{5}{2}$

**উদাহরণ 14** $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ সমীকরণকে অভিলম্ব আকারে প্রকাশ করো। p এবং ω এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান** প্রদত্ত সমীকরণটি হল

$$\sqrt{3}x + y - 8 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

(1) কে $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$ দিয়ে ভাগ করে পাই

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 4 \text{ বা, } x\cos 30° + y\sin 30° = 4 \qquad \text{... (2)}$$

(2) কে $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই p=4 এবং $\omega = 30°$

**উদাহরণ 15** $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ এবং $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

**সমাধান** প্রদত্ত রেখাগুলো হল

$$y - \sqrt{3}x - 5 = 0 \text{ বা, } y = \sqrt{3}x + 5 \qquad \text{... (1)}$$

$$\text{এবং } \sqrt{3}y - x + 6 = 0 \text{ বা, } y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3} \qquad \text{... (2)}$$

রেখা (1) এর প্রবণতা $m_1 = \sqrt{3}$ এবং রেখা (2) এর প্রবণতা $m_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

রেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণ সূক্ষ্মকোণ (ধরো) θ হলে

আমরা পাই,
$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \qquad \text{... (3)}$$

$m_1$ এবং $m_2$ এর মান (3) এ বসিয়ে পাই

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}}\right| = \left|\frac{1-3}{2\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

এর থেকে পাওয়া যায় $\theta = 30°$। সুতরাং দুটি রেখার মধ্যবর্তী কোণ হল 30° বা 180° – 30° = 150°।

**উদাহরণ 16** দেখাও যে, দুটি রেখা $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$,
যেখানে $b_1, b_2 \neq 0$

i) পরস্পর সমান্তরাল হয় যদি $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, এবং ii) পরস্পর লম্ব হয়, যদি $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

**সমাধান** প্রদত্ত রেখাগুলোকে লেখা যায়

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \quad \ldots (1)$$

এবং $$y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} \quad \ldots (2)$$

(1) এবং (2) এর প্রবণতা যথাক্রমে $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ এবং $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$

i) রেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে, যদি $m_1 = m_2$ হয়

অর্থাৎ $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ অথবা, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

ii) রেখাদুটি পরস্পর লম্ব হবে, যদি $m_1.m_2 = -1$ হয়

অর্থাৎ $\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = -1$ বা, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

**উদাহরণ 17** একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যা $x - 2y + 3 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং $(1, -2)$ বিন্দুগামী।

**সমাধান** প্রদত্ত রেখা $x - 2y + 3 = 0$ কে লেখা যায়

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \ldots(1)$$

রেখা (1) এর প্রবণতা, $m_1 = \frac{1}{2}$

সুতরাং রেখা (1) এর উপর লম্ব রেখার প্রবণতা

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -2$$

প্রবণতা –2 এবং $(1, -2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$y - (-2) = -2(x-1)$ বা, $y = -2x$

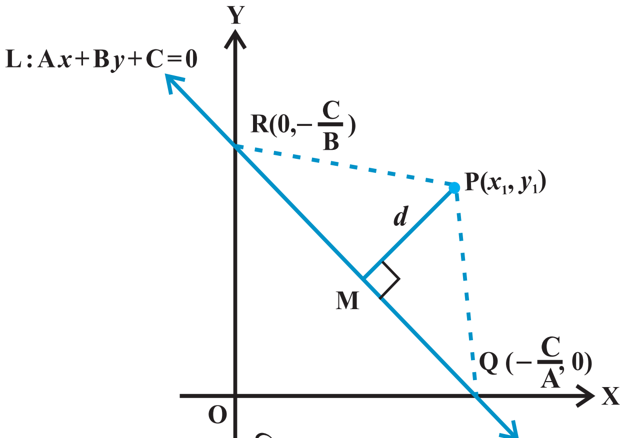
এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

Δ



## 10.5 একটি রেখা হতে একটি বিন্দুর দূরত্ব (Distance of a point from a line)

একটি রেখা হতে একটি বিন্দুর দূরত্ব বলতে, বিন্দুটি হতে রেখাটির লম্ব দৈর্ঘ্যকে বোঝায়। ধরা যাক $L : Ax + By + C = 0$ এখটি রেখা, যার দূরত্ব $P(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $d$ । P বিন্দু হতে L রেখার উপর লম্ব PM অঙ্কন করা হল (চিত্র 10.19)। যদি রেখাটি $x$ -অক্ষ এবং $y$ - অক্ষকে যথাক্রমে Q এবং R বিন্দুতে ছেদ




চিত্র 10.19

করে, তবে বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক হয় $Q\left(-\frac{C}{A},\ 0\right)$ এবং $R\left(0,\ -\frac{C}{B}\right)$। তাহলে, PQR ত্রিভুজের

ক্ষেত্রফল হল— (Δ PQR) এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ PM.QR

এর থেকে পাওয়া যায়, $PM = \dfrac{2\times \text{ক্ষেত্রফল}(\Delta PQR)}{QR}$ ... (1)

আবার, Δ PQR এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\left| x_1\left(0+\dfrac{C}{B}\right)+\left(-\dfrac{C}{A}\right)\left(-\dfrac{C}{B}-y_1\right)+0\left(y_1-0\right)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left| x_1\frac{C}{B} + y_1\frac{C}{A} + \frac{C^2}{AB}\right|$$

বা, 2 x (Δ PQR) এর ক্ষেত্রফল $= \left|\dfrac{C}{AB}\right| . \ \left|Ax_1 + By_1 + C\right|$, এবং

$$QR = \sqrt{\left(0+\frac{C}{A}\right)^2 + \left(\frac{C}{B} - 0\right)^2} = \left|\frac{C}{AB}\right| \sqrt{A^2+B^2}$$

(Δ PQR) এর ক্ষেত্রফলের এবং QR এর মান (1) এ বসিয়ে, আমরা পাই,

$$\text{PM} = \frac{|\text{A}x_1 + \text{B}y_1 + \text{C}|}{\sqrt{\text{A}^2 + \text{B}^2}}$$

বা, $$d = \frac{|\text{A}x_1 + \text{B}y_1 + \text{C}|}{\sqrt{\text{A}^2 + \text{B}^2}}$$

তাহলে, $(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $\text{A}x + \text{B}y + \text{C} = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব (d) হলে, আমরা পাই

$$d = \frac{|\text{A}x_1 + \text{B}y_1 + \text{C}|}{\sqrt{\text{A}^2 + \text{B}^2}}$$

**10.5.1 দুটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two parallel lines)** আমরা জানি দুটি সমান্তরাল সরলরেখার প্রবণতা সমান।

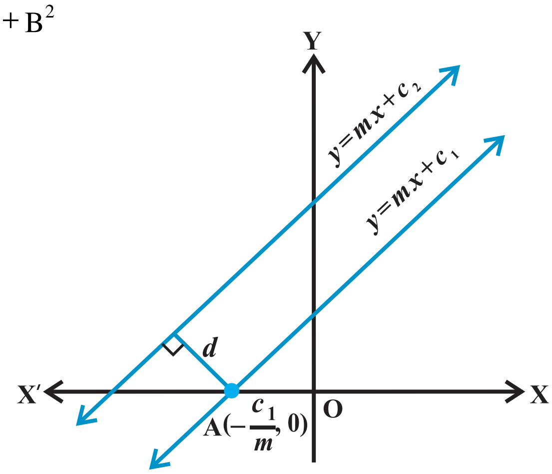
সুতরাং, দুটি সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায়—

$$y = mx + c_1 \qquad \ldots (1)$$

এবং $$y = mx + c_2 \qquad \ldots (2)$$

রেখা (1) $x$ - অক্ষকে ছেদ করবে

$\text{A}\left(-\frac{c_1}{m},\ 0\right)$ বিন্দুতে, যা 10.20 চিত্রে প্রদর্শিত।




চিত্র 10.20

A বিন্দু হতে রেখা (2) এর লম্ব দূরত্বই হল, রেখা দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব। সুতরাং, রেখা (1) এবং রেখা (2) এর মধ্যবর্তী দূরত্ব হল

$$\frac{\left|(-m)\left(-\frac{c_1}{m}\right) + (-c_2)\right|}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{বা,} \quad d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1+m^2}}$$

সুতরাং, দুটি সমান্তরাল রেখা $y = mx + c_1$ এবং $y = mx + c_2$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব d হলে, আমরা পাই

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1+m^2}}$$

যদি রেখাগুলোর সাধারণ সমীকরণ আকার $\text{A}x + \text{B}y + \text{C}_1 = 0$ এবং $\text{A}x + \text{B}y + \text{C}_2 = 0$ হয়, তবে

উপরিউক্ত সূত্রের আকার হবে, $$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

বিদ্যার্থীরা নিজেরাই এটি নির্ণয় করতে পারবে।

**উদাহরণ 18** $3x - 4y - 26 = 0$ রেখা হতে $(3, -5)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করো।

**সমাধান** প্রদত্ত রেখাটি হল $3x - 4y - 26 = 0$ ... (1)

রেখার সাধারণ সমীকরণ $Ax + By + C = 0$ এর সাথে (1) এর তুলনা করে পাই

$A = 3, B = -4$ এবং $C = -26$

প্রদত্ত বিন্দুটি হল $(x_1, y_1) = (3, -5)$। প্রদত্ত রেখা হতে প্রদত্ত বিন্দুর দূরত্ব

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3.3 + (-4)(-5) - 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

**উদাহরণ 19** $3x - 4y + 7 = 0$ এবং $3x - 4y + 5 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো।

**সমাধান** এখানে $A=3, B=-4, C=7$ এবং $C_2=5$

সুতরাং, নির্ণেয় দূরত্ব হল, $$d = \frac{|7-5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5}$$

## অনুশীলনী 10.3

**1.** নিম্নের সমীকরণগুলোকে প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকারে প্রকাশ করো এবং তাদের প্রবণতা ও $y$ - ছেদিতাংশ নির্ণয় করো।

(i) $x + 7y = 0$ (ii) $6x + 3y - 5 = 0$ (iii) $y = 0$

**2.** নিম্নের সমীকরণগুলোকে ছেদিতাংশ-আকারে পরিণত করো এবং তাদের অক্ষের ছেদিতাংশ নির্ণয় করো।

(i) $3x + 2y - 12 = 0$ (ii) $4x - 3y = 6$ (iii) $3y + 2 = 0$

**3.** নীচের সমীকরণগুলোকে অভিলম্ব-আকারে রূপান্তরিত করো। মূলবিন্দু হতে তাদের লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করো এবং ধনাত্মক $x$ -অক্ষ ও লম্বের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো।

(i) $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x - y = 4$

**4.** $12(x + 6) = 5(y - 2)$ রেখা হতে $(-1, 1)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করো।

**5.** $x$ -অক্ষের উপর একটি বিন্দু নির্ণয় করো যা, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ রেখা হতে 4 একক দূরত্বে অবস্থিত।

**6.** সমান্তরাল রেখাগুলোর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করো—

(i) $15x + 8y - 34 = 0$ এবং $15x + 8y + 31 = 0$ (ii) $l(x + y) + p = 0$ এবং $l(x + y) - r = 0$

**7.** $3x - 4y + 2 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং $(-2, 3)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**8.** যে রেখা $x - 7y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং $x$ - অক্ষের উপর ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য 3 একক, সেই রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**9.** $\sqrt{3}x + y = 1$ এবং $x + \sqrt{3}y = 1$ রেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

**10.** $(h, 3)$ এবং $(4, 1)$ বিন্দুগামী রেখা, $7x - 9y - 19 = 0$ রেখাকে সমকোণে ছেদ করে। $h$ এর মান নির্ণয় করো।

**11.** প্রমাণ করো $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং $(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$$\mathrm{A}\,(x - x_1) + \mathrm{B}\,(y - y_1) = 0$$

**12.** $(2, 3)$ বিন্দুতে দুটি সরলরেখা পরস্পরকে $60^\circ$ কোণে ছেদ করে। যদি একটি রেখার প্রবণতা 2 হয়, তবে অপর রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

**13.** $(3, 4)$ এবং $(-1, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

**14.** $(-1, 3)$ বিন্দু হতে $3x - 4y - 16 = 0$ রেখার উপর লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

**15.** মূলবিন্দু হতে অঙ্কিত লম্ব, $y = mx + c$ রেখার সাথে $(-1, 2)$ বিন্দুতে মিলিত হয়। $m$ এবং $c$ এর মান নির্ণয় করো।

**16.** মূলবিন্দু হতে $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$ এবং $x\sec\theta + y\,\mathrm{cosec}\,\theta = k$, রেখার লম্বদূরত্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $p$ এবং $q$ হলে প্রমাণ করো $p^2 + 4q^2 = k^2$ ।

**17.** ABC ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দু A (2, 3), B(4, –1) এবং C(1, 2) হলে, শীর্ষবিন্দু A হতে অঙ্কিত উচ্চতার দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয় করো।

**18.** মূলবিন্দু হতে কোনো রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং অক্ষদ্বয় হতে রেখার ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য $a$ এবং $b$ হলে, দেখাও যে $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$

## বিবিধ উদাহরণমালা

**উদাহরণ 20** যদি $2x + y - 3 = 0$, $5x + ky - 3 = 0$ এবং $3x - y - 2 = 0$ রেখাসমূহ সমবিন্দু হয়। তবে $k$ এর মান নির্ণয় করো।

**সমাধান** রেখা তিনটি সমবিন্দু হবে, যদি তারা একটি সাধারণ বিন্দুগামী হয়। অর্থাৎ যে কোনো দুটি রেখার ছেদবিন্দু যদি তৃতীয় রেখাটির উপর অবস্থিত হয়। এখানে প্রদত্ত রেখাগুলো হল

$$2x + y - 3 = 0 \qquad \dots (1)$$

$$5x + ky - 3 = 0 \qquad \dots (2)$$

$$3x - y - 2 = 0 \qquad \text{... (3)}$$

(1) এবং (2) কে বজ্র-গুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে আমরা পাই,

$$\frac{x}{-2-3} = \frac{y}{-9+4} = \frac{1}{-2-3} \quad \text{বা, } x = 1, \; y = 1$$

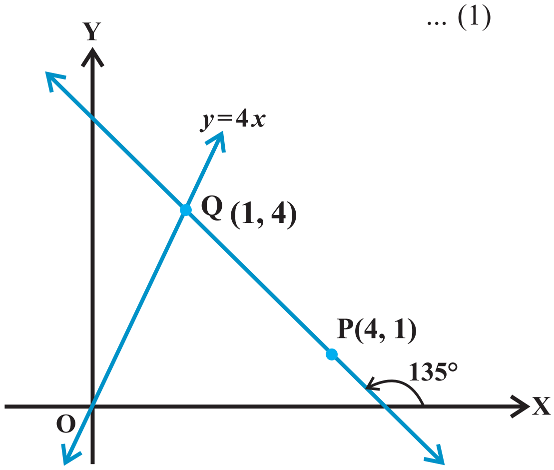
সুতরাং, দুটি রেখার ছেদবিন্দু হল (1, 1)। যেহেতু, উপরিউক্ত তিনটি রেখা সমবিন্দু, তাই (1, 1) বিন্দু (2) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

সুতরাং, $5.1 + K.1 - 3 = 0$ বা, $k = -2$

**উদাহরণ 21** P(4, 1) বিন্দু থেকে $x$ -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 135° কোণে নত সরলরেখা বরাবর $4x - y = 0$ রেখার দূরত্ব নির্ণয় করো।

**সমাধান** প্রদত্ত রেখাটি হল $4x - y = 0$ ... (1)

P (4, 1) বিন্দু থেকে অপর একটি রেখা বরাবর, (1) নং রেখার দূরত্ব নির্ণয়ের জন্য, উভয় রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। এক্ষেত্রে, প্রথমে আমাদের দ্বিতীয় রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে (চিত্র 10.21)। দ্বিতীয় রেখাটির প্রবণতা হল $\tan 135° = -1$। প্রবণতা $-1$ এবং P(4, 1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ



চিত্র 10.21

$$y - 1 = -1\,(x - 4) \text{ বা } x + y - 5 = 0 \qquad \text{... (2)}$$

(1) এবং (2) সমাধান করে আমরা পাই $x$=1 এবং $y$=4, সুতরাং রেখা দুটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক Q (1, 4)।

(2) নং রেখা বরাবর P(4, 1) বিন্দু হতে রেখা (1) এর দূরত্ব

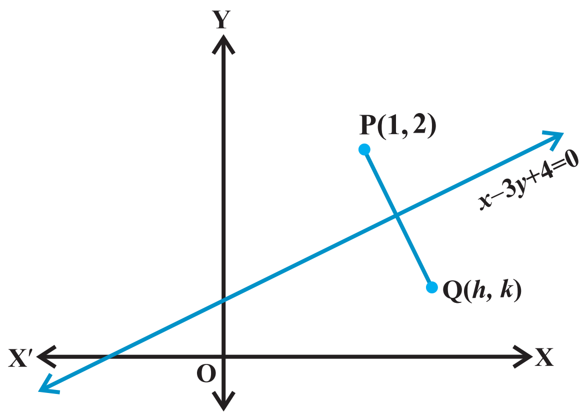
= P (4, 1) এবং Q (1, 4) এর মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$= \sqrt{(1-4)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2} \text{ একক}$$

**উদাহরণ 22** সরলরেখা, একটি বিন্দুর জন্য সমতল দর্পন হিসেবে কাজ করে, এরূপ ধরে $x - 3y + 4 = 0$ রেখার সাপেক্ষে (1, 2) বিন্দুর প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

**সমাধান** ধরা যাক $x - 3y + 4 = 0$ ... (1)

রেখার সাপেক্ষে P (1, 2) বিন্দুর প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক Q $(h, k)$ ।



চিত্র 10.22

সুতরাং, রেখা (1) হল, PQ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র 10.22)।

তাহলে PQ রেখার প্রবণতা $= \dfrac{-1}{x-3y+4=0 \text{ রেখার প্রবণতা}}$

সুতরাং, $\dfrac{k-2}{h-1} = \dfrac{-1}{\frac{1}{3}}$ বা, $3h + k = 5$ ... (2)

PQ এর মধ্যবিন্দু, অর্থাৎ $\left(\dfrac{h+1}{2}, \dfrac{k+2}{2}\right)$ সমীকরণ (1) কে সিদ্ধ করবে।

$\dfrac{h+1}{2} - 3\left(\dfrac{k+2}{2}\right) + 4 = 0$ বা, $h - 3k = -3$ ... (3)

(2) এবং (3) সমাধান করে, আমরা পাই $h = \dfrac{6}{5}$ এবং $k = \dfrac{7}{5}$

সুতরাং (1, 2) বিন্দুর প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক (1) এর সাপেক্ষে হল $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$

**উদাহরণ 23** দেখাও যে $y = m_1 x + c_1$, $y = m_2 x + c_2$ এবং $x = 0$ রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\dfrac{(c_1 - c_2)^2}{2|m_1 - m_2|}$ ।

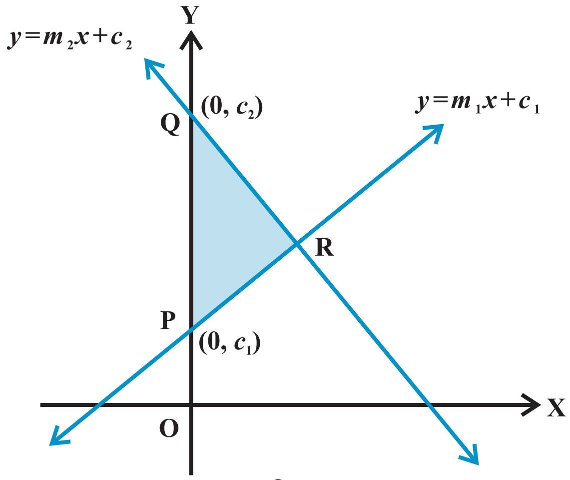
**সমাধান** প্রদত্ত রেখাগুলো হল

$y = m_1 x + c_1$ ... (1)

$y = m_2 x + c_2$ ... (2)

$x = 0$ ... (3)

আমরা জানি $y = mx + c$ রেখা, $x=0$ ($y$ -অক্ষ) রেখাকে $(0, c)$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে (1), (2) এবং (3) রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের দুটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক হল P $(0, c_1)$ এবং Q $(0, c_2)$ (চিত্র 10.23)। (1) এবং (2) সমাধান করে তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটি পাওয়া যায়।




চিত্র 10.23

(1) এবং (2) সমাধান করে, আমরা পাই

$$x = \frac{(c_2 - c_1)}{(m_1 - m_2)} \quad \text{এবং} \quad y = \frac{(m_1c_2 - m_2c_1)}{(m_1 - m_2)}$$

সুতরাং, ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটি হল R$\left(\frac{(c_2 - c_1)}{(m_1 - m_2)}, \frac{(m_1c_2 - m_2c_1)}{(m_1 - m_2)}\right)$

এখন, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হল

$$= \frac{1}{2}\left| 0 \left(\frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2} - c_2\right) + \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}(c_2 - c_1) + 0 \left(c_1 - \frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2}\right)\right| = \frac{(c_2 - c_1)^2}{2|m_1 - m_2|}$$

**উদাহরণ 24** $5x - y + 4 = 0$ এবং $3x + 4y - 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী যে রেখার খণ্ডিতাংশ $(1, 5)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**সমাধান** প্রদত্ত রেখাগুলো হল

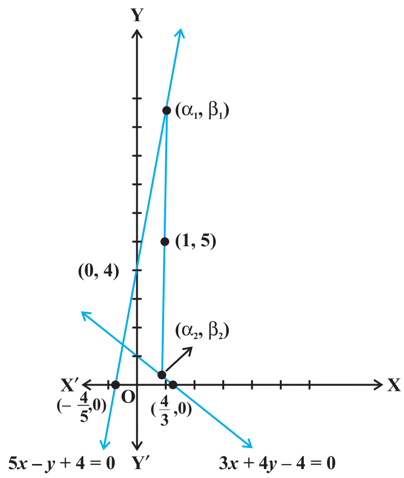
$5x - y + 4 = 0$ ...(1)

$3x + 4y - 4 = 0$ ...(2)

ধরা যাক নির্ণেয় রেখাটি (1) এবং (2) নং রেখাকে যথাক্রমে $(\alpha_1, \beta_1)$ এবং $(\alpha_2, \beta_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে (10.24)।

সুতরাং, $5\alpha_1 - \beta_1 + 4 = 0$ এবং

$3\alpha_2 + 4\beta_2 - 4 = 0$




চিত্র 10.24

বা, $\beta_1 = 5\alpha_1 + 4$ এবং $\beta_2 = \dfrac{4 - 3\alpha_2}{4}$

নির্ণেয় রেখাটির উপর $(\alpha_1, \beta_1)$ এবং $(\alpha_2, \beta_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক হল $(1, 5)$। সুতরাং,

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 1 \text{ এবং } \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = 5$$

অথবা, $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$ এবং $\dfrac{5\alpha_1 + 4 + \dfrac{4 - 3\alpha_2}{4}}{2} = 5,$

বা, $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$ এবং $20\alpha_1 - 3\alpha_2 = 20$ ... (3)

$\alpha_1$ এবং $\alpha_2$ এর জন্য (3) এর সমীকরণগুলোকে সমাধান করে আমরা পাই,

$$\alpha_1 = \frac{26}{23} \text{ এবং } \alpha_2 = \frac{20}{23} \text{ তাহলে } \beta_1 = 5.\frac{26}{23} + 4 = \frac{222}{23}$$

$(1, 5)$ এবং $(\alpha_1, \beta_1)$ বিন্দুদ্বয়গামী রেখার নির্ণেয় সমীকরণ হল

$$y - 5 = \frac{\beta_1 - 5}{\alpha_1 - 1}(x - 1) \text{ বা, } y - 5 = \frac{\dfrac{222}{23} - 5}{\dfrac{26}{23} - 1}(x - 1)$$

বা, $107x - 3y - 92 = 0,$

এটিই নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

**উদাহরণ 25** দেখাও যে, $3x - 2y = 5$ এবং $3x + 2y = 5$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী গতিশীল বিন্দুর পথ একটি সরলরেখা।

**সমাধান** প্রদত্ত রেখাগুলো হল

$3x - 2y = 5$ … (1)

এবং $3x + 2y = 5$ … (2)

ধরা যাক $(h, k)$ যেকোনো একটি বিন্দু, যা (1) এবং (2) হতে সমদূরবর্তী।

সুতরাং, $\dfrac{|3h - 2k - 5|}{\sqrt{9+4}} = \dfrac{|3h + 2k - 5|}{\sqrt{9+4}}$ বা, $|3h - 2k - 5| = |3h + 2k - 5|$

এর থেকে পাওয়া যায় $3h - 2k - 5 = 3h + 2k - 5$ বা, $-(3h - 2k - 5) = 3h + 2k - 5$

এ দুটি সম্পর্ককে সমাধান করে আমরা পাই K=0 বা $h = \frac{5}{3}$

তাহলে, বিন্দু $(h, k)$, $y = 0$ বা $x = \frac{5}{3}$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, যা সরলরেখাকে প্রকাশ করে। সুতরাং, (1) এবং (2) হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর গতিপথ একটি সরলরেখা।

## *অধ্যায় 10-এর বিবিধ অনুশীলনী*

**1.** k এর মান নির্ণয় করো যখন রেখা $(K\text{-}3)\, x - (4-k^2)\, y + k^2 - 7k + 6 = 0$

(a) $x$ -অক্ষের সমান্তরাল

(b) $y$ -অক্ষের সমান্তরাল।

(c) মূলবিন্দুগামী।

**2.** $\theta$ এবং P এর মান নির্ণয় করো, যদি $x \cos\theta + y \sin\theta = p$, $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ রেখার অভিলম্ব-আকার হয়।

**3.** যে রেখার অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি এবং গুণফল যথাক্রমে 1 এবং –6, সেই রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় করো।

**4.** $y$ -অক্ষের উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহ নির্ণয় করো যা $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ রেখা থেকে 4 একক দূরত্বে অবস্থিত।

**5.** মূলবিন্দু হতে $(\cos\theta, \sin\theta)$ এবং $(\cos\phi, \sin\phi)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করো।

**6.** $x - 7y + 5 = 0$ এবং $3x + y = 0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী এবং $y$ -অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**7.** $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ সরলরেখাটি $y$-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দু দিয়ে প্রদত্ত রেখার লম্বরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**8.** $y - x = 0, x + y = 0$ এবং $x - k = 0$ রেখাসমূহ দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

**9.** তিনটি রেখা $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$ এবং $2x - y - 3 = 0$ একটি বিন্দুতে ছেদ করলে $p$ এর মান নির্ণয় করো।

**10.** যদি তিনটি রেখা, যাদের সমীকরণ $y = m_1 x + c_1$, $y = m_2 x + c_2$ এবং $y = m_3 x + c_3$ সমবিন্দু হয়, তবে দেখাও যে $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$

**11.** (3, 2) বিন্দুগামী এমন একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যা $x - 2y = 3$ রেখার সহিত $45^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে।

**12.** $4x + 7y - 3 = 0$ এবং $2x - 3y + 1 = 0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যা অক্ষ হতে সমান অংশ ছিন্ন করে।

**13.** দেখাও যে, মূলবিন্দুগামী এবং $y = mx + c$ রেখার সাথে θ কোণ উৎপন্নকারী রেখার সমীকরণ

$$\frac{y}{x} = \frac{m \pm tan\theta}{1 \mp m tan\theta}$$

**14.** (–1, 1) এবং (5, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখা $x + y = 4$ রেখা দিয়ে কী অনুপাতে বিভক্ত হয়?

**15.** $2x - y = 0$ রেখা বরাবর অবস্থিত (1, 2) বিন্দু হতে $4x + 7y + 5 = 0$ রেখার দূরত্ব নির্ণয় করো।

**16.** (–1, 2) বিন্দুগামী রেখা, $x + y = 4$ রেখাকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দু হতে প্রদত্ত বিন্দুর দূরত্ব 3 একক হলে সেই রেখার দিক নির্ণয় করো।

**17.** একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 3) এবং (–4, 1)। ত্রিভুজটির সমকোণের ধারক বাহু দুটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

**18.** রেখাকে একটি সমতল দর্পণ ধরে, $x + 3y = 7$ রেখার সাপেক্ষে (3, 8) বিন্দুর প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

**19.** যদি $y = 3x + 1$ এবং $2y = x + 3$ রেখাদ্বয় $y = mx + 4$ রেখার সহিত সমান কোণে আনত থাকে, তবে $m$ এর মান নির্ণয় করো।

**20.** যদি একটি পরিবর্তনশীল বিন্দু P $(x, y)$ হতে $x + y - 5 = 0$ এবং $3x - 2y + 7 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্বের সমষ্টি 10 একক হয়, তবে দেখাও যে P অবশ্যই একটি রেখায় গতিশীল হবে।

**21.** $9x + 6y - 7 = 0$ এবং $3x + 2y + 6 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**22.** (1, 2) বিন্দুগামী একটি আলোক রশ্মি $x$- অক্ষের উপর অবস্থিত A বিন্দুতে প্রতিফলিত হয় এবং প্রতিফলিত রশ্মি (5, 3) বিন্দু দিয়ে যায়। A বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

**23.** প্রমাণ করো, $\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ এবং $\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ বিন্দু হতে $\frac{x}{a}cos\theta + \frac{y}{b}sin\theta = 1$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বদূরত্বের গুণফল $b^2$।

**24.** একজন ব্যক্তি $2x - 3y + 4 = 0$ এবং $3x + 4y - 5 = 0$ সমীকরণ দিয়ে প্রকাশিত সরলপথের সন্ধিস্থলে দাঁড়িয়ে আছেন এবং সমীকরণ $6x - 7y + 8 = 0$ দিয়ে প্রকাশিত পথে সর্বাপেক্ষা কম সময়ে পৌঁছতে চান। উনি যে পথে যাবেন সেই পথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

*সারসংক্ষেপ*

- উল্লম্ব নয় এমন রেখা যা $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী, সেই রেখার প্রবণতা ($m$) হলে, আমরা লিখতে পারি $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2$
- যদি একটি রেখা $x$- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে, তবে রেখাটির প্রবণতা হবে $m = \tan\alpha, \alpha \neq 90°$।
- অনুভূমিক রেখার প্রবণতা শূণ্য এবং উল্লম্ব রেখার প্রবণতা অসংজ্ঞাত।

◆ $m_1$ এবং $m_2$ প্রবণতা বিশিষ্ট রেখা $L_1$ এবং $L_2$ এর মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ ($\theta$ ধরো) হবে

$$\tan\theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|, 1 + m_1 m_2 \neq 0$$

◆ দুটি রেখা *সমান্তরাল* হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি তাদের প্রবণতা সমান হয়।

◆ দুটি রেখা পরস্পর *লম্ব* হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি তাদের প্রবণতার গুণফল –1 হয়।

◆ তিনটি বিন্দু A, B এবং C সমরেখ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি AB এর প্রবণতা = BC এর প্রবণতা হয়।

◆ $x$ -অক্ষ হতে $a$ দূরত্বে অবস্থিত অনুভূমিক রেখার সমীকরণ হয় $y=a$ বা $y = -a$ ।

◆ $y$ - অক্ষ হতে $b$ দূরত্বে অবস্থিত উল্লম্বরেখার সমীকরণ হয় $x=b$ বা $x = -b$ ।

◆ যে রেখার প্রবণতা $m$ এবং নির্দিষ্ট বিন্দু $(x_o, y_o)$ গামী সেই রেখার উপর $(x, y)$ বিন্দু অবস্থিত হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি এই স্থানাঙ্ক $y - y_o = m(x - x_o)$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

◆ $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ হল $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

◆ $m$ প্রবণতা বিশিষ্ট রেখার উপর, বিন্দু $(x, y)$ অবস্থিত এবং $y$ - অক্ষের ছেদিতাংশ $c$ রেখাটির উপর অবস্থিত হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $y = mx + c$ হয়।

◆ $m$ প্রবণতা বিশিষ্ট রেখার $x$ - ছেদিতাংশ $d$ হলে, রেখাটির সমীকরণ হবে $y = m(x - d)$ ।

◆ যে রেখার $x$ -অক্ষ এবং $y$ -অক্ষের ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a$ এবং $b$, সেই রেখার সমীকরণ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

◆ মূলবিন্দু হতে কোনো রেখার লম্বদূরত্ব p এবং লম্ব ও ধনাত্মক $x$ -অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ $\omega$ হলে রেখাটির সমীকরণ হবে $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ ।

◆ $Ax + By + C = 0$, যেখানে A এবং B শূন্য নয়, এই আকারের কোণো সমীকরণকে বলা হয় *সাধারণ রৈখিক সমীকরণ* বা *একটি রেখার সাধারণ সমীকরণ* ।

◆ $(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $Ax + By + C = 0$ রেখার লম্বদূরত্ব $d$ হলে আমরা জানি

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$ ।

◆ $Ax + By + C_1 = 0$ এবং $Ax + By + C_2 = 0$ সমান্তরাল রেখা দুটির মধ্যে দূরত্ব $d$ হলে,

আমরা পাই $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

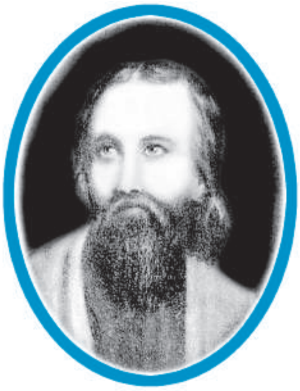
অধ্যায় 11

# শঙ্কুচ্ছেদ
# Conic Sections

❖ *Let the relation of knowledge to real life be very visible to your pupils and let them understand how by knowledge the world could be transformed. – BERTRAND RUSSELL* ❖

## 11.1 ভূমিকা

আগের অধ্যায় 10-এ আমরা একটি সরলরেখার সমীকরণের বিভিন্ন রূপ নিয়ে অধ্যয়ন করেছি। এ অধ্যায়ে আমরা কিছু অন্য বক্ররেখা নিয়ে অধ্যয়ন করব যেগুলো হল বৃত্ত (circles), অধিবৃত্ত (ellipses), উপবৃত্ত (parabolas ), এবং পরাবৃত্ত (hyperbolas), অধিবৃত্ত এবং পরাবৃত্ত এ দুটি নামকরণ Apollonius করেছিলেন। বাস্তবে এই বক্রগুলোকে *শঙ্কুচ্ছেদ* বা আরও সাধারণভাবে *কণিক* (*conics*) বলা হয় কারণ এগুলো একটি লম্ববৃত্তীয় দ্বিশঙ্কু (double napped right circular cone) ও একটি সমতলের ছেদের ফলে উৎপন্ন হয়। এই বক্রগুলোর ব্যবহার দৈনন্দিন ক্ষেত্রে ব্যাপকভাবে হয়ে থাকে যেমন, গ্রহের ঘূর্ণন পথ, দূরবীক্ষণের নক্সায়, অ্যান্টেনা তৈরিতে, টর্চলাইট ও যানবাহনের হেড লাইটের প্রতিফলক নির্মাণে ইত্যাদি। এখন আমরা পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলোতে দেখব কী করে একটি লম্ব বৃত্তীয় দ্বিশঙ্কু এবং একটি সমতলের ছেদ, বিভিন্ন প্রকার বক্র তৈরি করে।

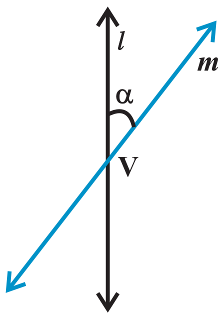


**অ্যাপোলোনিয়াস (Apollonius)**
**(262 খ্রিঃ পূর্ব -190 খ্রিঃ পূর্ব)**

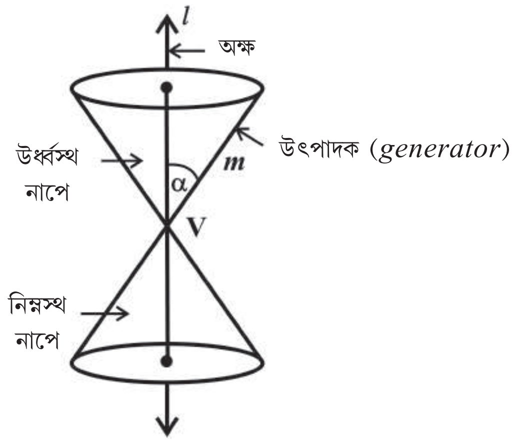
## 11.2 একটি শঙ্কুর ছেদ (Sections of a Cone)

ধরে নাও, $l$ একটি স্থির উল্লম্ব রেখা এবং $m$ হল অপর একটি রেখা যা $l$ কে একটি স্থির বিন্দু V -তে ছেদ করে এবং তার সাথে $\alpha$ কোণে নত (চিত্র11.1).

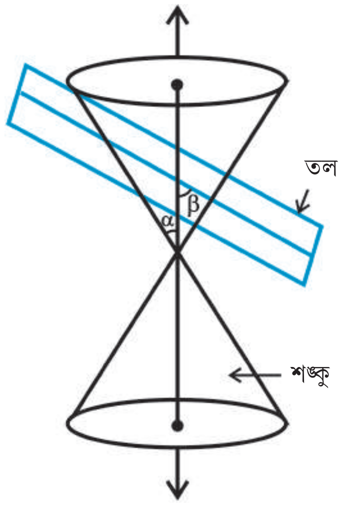
ধরো, $\alpha$ কোণটিকে স্থির রেখে $l$ এর চারদিকে $m$ রেখাটিকে ঘোরানো হল, তাতে একটি ফাঁপা লম্ব বৃত্তাকার দ্বিশঙ্কু আকৃতির তল উৎপন্ন হবে, যাকে পরবর্তীতে শঙ্কু বলা হবে এবং এটি উভয়দিকে অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় (চিত্র11.2) দেখো।




চিত্র **11. 1**




চিত্র **11. 2**




চিত্র **11. 3**

V বিন্দুটিকে বলা হয় *শঙ্কুর* শীর্ষ *(vertex)* এবং $l$ কে বলা হয় শঙ্কুর *অক্ষ (axis)*। ঘূর্ণায়মান রেখা $m$ কে বলা শঙ্কুর উৎ*পাদক* (generator)। শীর্ষ, শঙ্কুটিকে দুটি অংশে ভাগ করে যাদের *নাপে (nappes)* বলা হয়।

যদি আমরা একটি সমতল এবং একটি শঙ্কুর ছেদ নিই, তবে প্রাপ্ত প্রস্থচ্ছেদটিকে বলা হয় *শঙ্কুচ্ছেদ* (conic section)। সুতরাং শঙ্কুচ্ছেদ হল সেইসব বক্র যেগুলো একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু এবং একটি সমতলের প্রস্থচ্ছেদ।

শঙ্কুর উল্লম্ব অক্ষ ও প্রস্থচ্ছেদী সমতলের মধ্যবর্তী কোণ এবং প্রস্থচ্ছেদী সমতলের বিভিন্ন অবস্থানের জন্য আমরা বিভিন্ন প্রকারের শঙ্কুচ্ছেদ পাই। ধরে নাও প্রস্থচ্ছেদী সমতল, শঙ্কুর উল্লম্ব অক্ষের সাথে $\beta$ কোণ উৎপন্ন করে (চিত্র 11.3)।

শঙ্কুর সাথে সমতলের ছেদ নেওয়া যেতে পারে, হয় শঙ্কুর শীর্ষে নতুবা নাপে (nappe) এর অন্য কোনো ভাগে, শীর্ষের নীচে বা শীর্ষের উপরে হতে পারে।

### 11.2.1 *বৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত এবং পরাবৃত্ত (Circle, ellipse, parabola and hyperbola)*

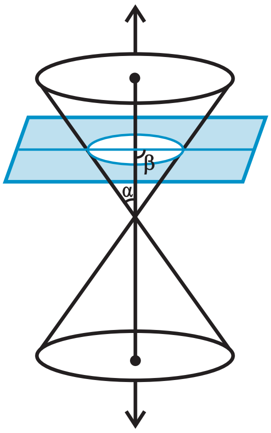
যখন একটি সমতল একটি শঙ্কুর নাপেকে ছেদ করবে (শীর্ষবিন্দু ছাড়া), আমরা নিম্নলিখিত অবস্থানগুলো পাব :

**(a)** যখন $\beta = 90^o$, তখন প্রস্থচ্ছেদ একটি *বৃত্ত (circle)* হবে (চিত্র11.4)।

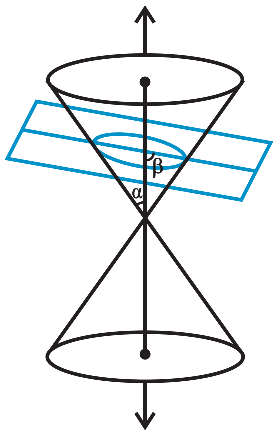
**(b)** যখন $\alpha < \beta < 90^o$, তখন প্রস্থচ্ছেদ একটি *উপবৃত্ত (ellipse)* হবে (চিত্র 11.5)।

**(c)** যখন $\beta = \alpha$; তখন প্রস্থচ্ছেদ একটি *অধিবৃত্ত (parabola)* হবে (চিত্র 11.6)।
(উপরের তিনটি ক্ষেত্রেই সমতলটি শঙ্কুর একটি নাপেকে সম্পূর্ণ ভাবে ছেদ করে)।

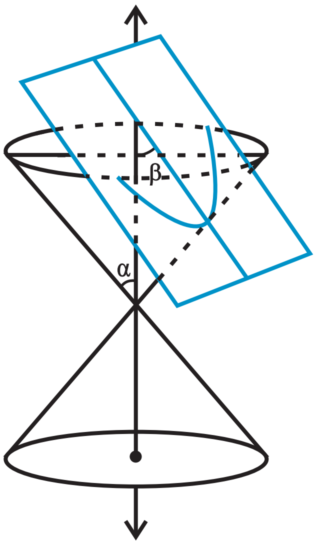
**(d)** যখন $0 \leq \beta < \alpha$, তখন সমতলটি দুটি নাপেকেই ছেদ করে এবং ছেদিত বক্রটি হল একটি *পরাবৃত্ত (hyperbola)* (চিত্র11.7)।



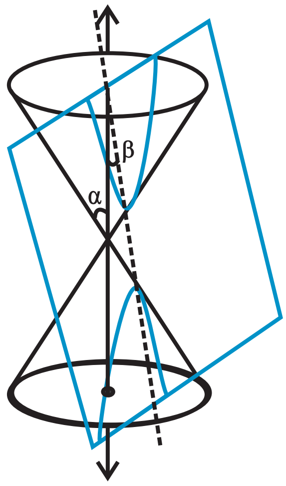

চিত্র **11. 4**




চিত্র **11. 5**




চিত্র **11. 6**




চিত্র **11. 7**

### 11.2.2 *অপকৃষ্ট শঙ্কুচ্ছেদ (Degenerated conic sections)*

যখন সমতলটি শীর্ষবিন্দু দিয়ে শঙ্কুটিকে ছেদ করে তখন আমরা প্রদত্ত বিভিন্ন ক্ষেত্রগুলো পাই :

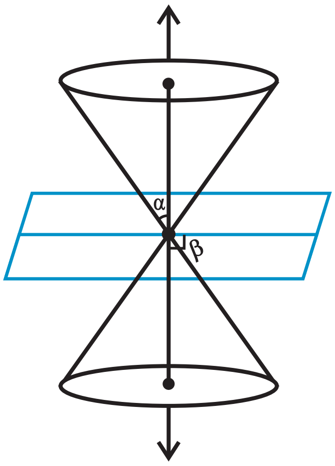
**(a)** যখন $\alpha < \beta \leq 90^o$, তখন প্রস্থচ্ছেদটি একটি বিন্দু (point) হয় (চিত্র11.8) ।

**(b)** যখন $\beta = \alpha$, তখন সমতলটির উপর শঙ্কুর উৎপাদক (generator) রেখাটি অবস্থিত হয় এবং প্রস্থচ্ছেদটি একটি সরলরেখা (straight line) হয় (চিত্র11.9) ।

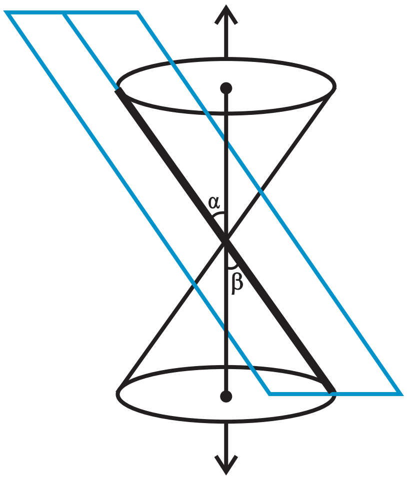
এটি হল অধিবৃত্তের অপকৃষ্ট ক্ষেত্র।

**(c)** যখন $0 \leq \beta < \alpha$, এখানে প্রস্থচ্ছেদটি হল এক জোড়া পরস্পর ছেদি সরলরেখা (চিত্র11.10) ।এটি হল পরাবৃত্তের অপকৃষ্ট ক্ষেত্র।

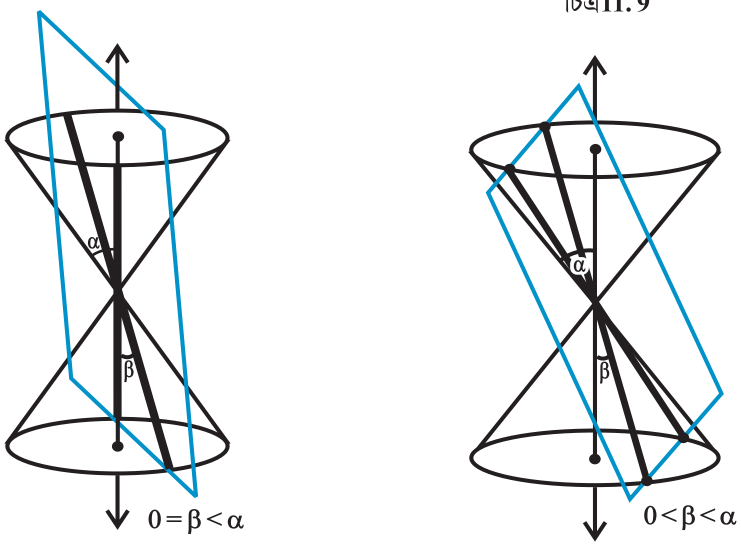
পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা এই শঙ্কুচ্ছেদের জ্যামিতিক বৈশিষ্টের উপর ভিত্তি করে প্রত্যেকটি ক্ষেত্রের সংজ্ঞা নিরূপণ করবো।




চিত্র **11. 8**




চিত্র**11. 9**

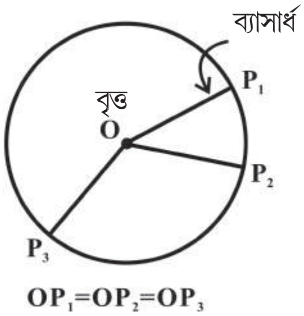



**(a)** চিত্র **11. 10** **(b)**

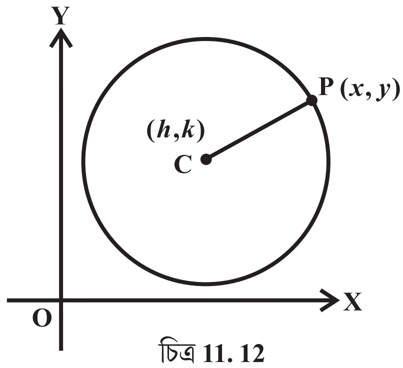
## 11.3 বৃত্ত (Circle)

**সংজ্ঞা 1** একটি বৃত্ত হল একটি সমতলের উপর অবস্থিত সেইসব বিন্দুর সেট্ যেগুলো ঐ সমতলের একটি স্থির বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

স্থির বিন্দুটিকে বলা হয় *বৃত্তের কেন্দ্র* এবং কেন্দ্র থেকে বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুর দূরত্বকে বলা হয় *বৃত্তটির ব্যাসার্ধ* (*radius*) (চিত্র 11.11)।




চিত্র **11. 11**




চিত্র **11. 12**

যদি বৃত্তের কেন্দ্র (centre) মূল বিন্দু হয় তবে বৃত্তের সমীকরণটি সরলতম হয়। যাই হোক, আমরা নিম্নরূপে একটি বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ প্রদত্ত হলে তার সমীকরণ নির্ণয় করবো (চিত্র 11.12)।

বৃত্তের কেন্দ্র C $(h, k)$ এবং ব্যাসার্ধ $r$ প্রদত্ত। ধরো, বৃত্তের উপর P$(x, y)$ যে কোনো একটি বিন্দু (চিত্র11.12)। সুতরাং, সংজ্ঞানুযায়ী $|\,\mathrm{CP}\,| = r$ । দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্রানুযায়ী আমরা পাই,

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

অর্থাৎ $$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

এটি হল নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র $(h,k)$ এবং ব্যাসার্ধ $r$ ।

**উদাহরণ 1** বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যার কেন্দ্র (0,0) তে এবং ব্যাসার্ধ $r$ ।

**সমাধান :** এখানে, $h = k = 0$ । সুতরাং, বৃত্তের সমীকরণ হল $x^2 + y^2 = r^2$।

**উদাহরণ 2** বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যার কেন্দ্র (–3, 2) এবং ব্যাসার্ধ 4 ।

**সমাধান :** এখানে $h = -3$, $k = 2$ এবং $r = 4$ । সুতরাং, বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

**উদাহরণ 3** বৃত্ত $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ এর কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** প্রদত্ত সমীকরণটি হল,

$$(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) = 8$$

এখন, বন্ধনীর রাশিমালাকে পূর্ণবর্গে পরিণত করে, আমরা পাই

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 8 + 16 + 25$$

অর্থাৎ $$(x+4)^2 + (y+5)^2 = 49$$

অর্থাৎ $$\{x-(-4)\}^2 + \{y-(-5)\}^2 = 7^2$$

সুতরাং, প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (– 4, –5) এবং ব্যাসার্ধ 7 ।

**উদাহরণ 4** যে বৃত্তটি $(2, -2)$, এবং $(3,4)$ বিন্দুগামী এবং যার কেন্দ্র $x + y = 2$ সরলরেখার উপর অবস্থিত, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** ধরো, বৃত্তের সমীকরণটি হল $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ।

যেহেতু বৃত্তটি $(2, -2)$ এবং $(3,4)$ বিন্দুগামী, তাই আমরা পাই

$$(2 - h)^2 + (-2 - k)^2 = r^2 \qquad \ldots (1)$$

এবং $$(3 - h)^2 + (4 - k)^2 = r^2 \qquad \ldots (2)$$

আবার, যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্রটি $x + y = 2$ সরলরেখার উপর অবস্থিত, আমরা পাই

$$h + k = 2 \qquad \ldots (3)$$

(1), (2) এবং (3) সমীকরণগুলো সমাধান করে, আমরা পাই

$$h = 0.7, \quad k = 1.3 \text{ এবং } r^2 = 12.58$$

অতএব বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ হল

$$(x - 0.7)^2 + (y - 1.3)^2 = 12.58.$$

## অনুশীলনী 11.1

অনুশীলনীতে নিম্নলিখিত 1 নং প্রশ্ন থেকে 5 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রতি ক্ষেত্রে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো:

**1.** কেন্দ্র $(0,2)$ এবং ব্যাসার্ধ 2

**2.** কেন্দ্র $(-2,3)$ এবং ব্যাসার্ধ 4

**3.** কেন্দ্র $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\frac{1}{12}$

**4.** কেন্দ্র $(1,1)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{2}$

**5.** কেন্দ্র $(-a, -b)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{a^2 - b^2}$ ।

অনুশীলনীতে নিম্নলিখিত 6 নং প্রশ্ন থেকে 9 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রতি ক্ষেত্রে বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো:

**6.** $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$

**7.** $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$

**8.** $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

**9.** $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

**10.** $(4,1)$ এবং $(6,5)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যার কেন্দ্র $4x + y = 16$ সরলরেখার উপর অবস্থিত।

**11.** $(2,3)$ এবং $(-1,1)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যার কেন্দ্র $x - 3y - 11 = 0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত।

**12.** $(2,3)$ বিন্দুগামী এবং 5 একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যার কেন্দ্র $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত।

**13.** $(0,0)$ বিন্দুগামী যে বৃত্ত স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ে $a$ এবং $b$ ছেদিতাংশ উৎপন্ন করে তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

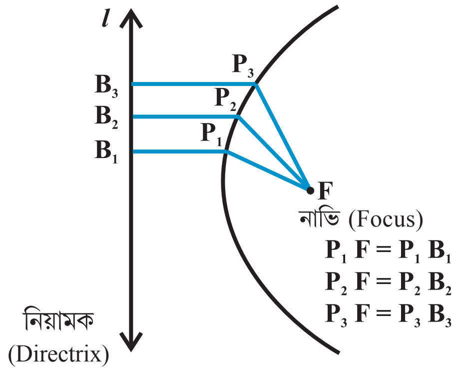
**14.** $(2,2)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট এবং $(4,5)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো।

**15.** $(-2.5, 3.5)$ বিন্দুটি কী $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের ভেতরে, বাইরে না উপরে অবস্থিত?

## 11.4 অধিবৃত্ত (Parabola)

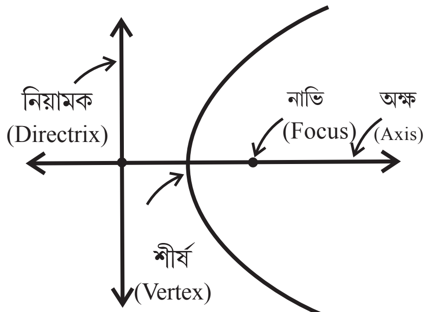
**সংজ্ঞা 2** একটি অধিবৃত্ত হল কোনো একটি সমতলের উপর অবস্থিত সেইসব বিন্দুর সেট যেগুলো ঐ সমতলে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং একটি স্থির বিন্দু (ঐ সরলরেখার উপর অবস্থিত নয়) থেকে সমদূরবর্তী।

নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে বলা হয় অধিবৃত্তের *নিয়ামক (directrix)* এবং স্থির বিন্দু F-কে বলা হয় *নাভি (focus)* (চিত্র 11.13). ('Para' এর অর্থ 'জন্য' এবং 'bola' এর অর্থ নিক্ষেপ করা, অর্থাৎ একটি বলকে শূন্যে নিক্ষেপ করার জন্য উৎপন্ন পথ)।




চিত্র **11. 13**

> **দ্রষ্টব্য** যদি সমতলে স্থির বিন্দুটি, নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত হয় তবে যে বিন্দুগুলোর সেট স্থির বিন্দু ও নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে সমদূরবর্তী, যেগুলো একটি সরলরেখা হয় যা স্থির বিন্দুগামী এবং নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়। আমরা এই সরলরেখাটিকে বলব অধিবৃত্তের অপকৃষ্ট ক্ষেত্র *(degenerate case)*।

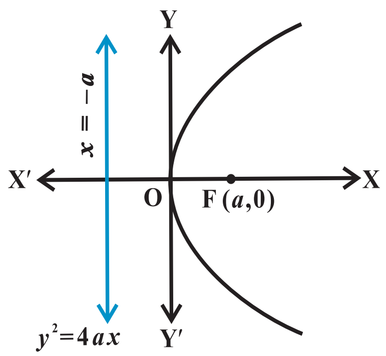



চিত্র **11.14**

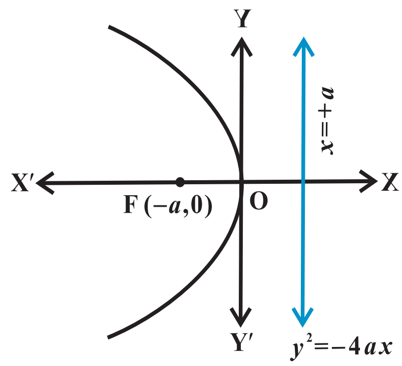
অধিবৃত্তের নাভিগামী এবং *নিয়ামকের* উপর লম্ব সরলরেখাকে অধিবৃত্তের *অক্ষ* বলা হয়। অধিবৃত্ত ও এর অক্ষের ছেদ বিন্দুকে বলা হয় অধিবৃত্তের *শীর্ষ* (চিত্র11.14)।

### 11.4.1 অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (*Standard equations of parabola*)

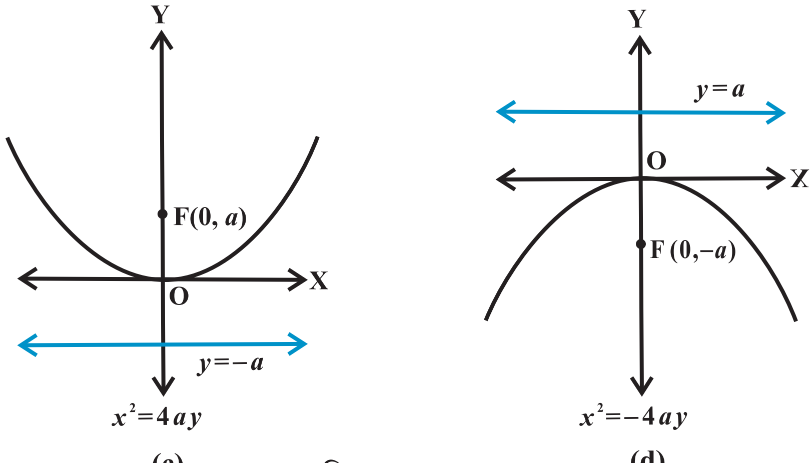
অধিবৃত্তের সমীকরণ সরলতম হবে যদি তার শীর্ষ মূল বিন্দুতে হয় এবং তার প্রতিসাম্য অক্ষটি $x$-অক্ষ বা $y$-অক্ষ বরাবর হয়। অধিবৃত্তের এই চারটি দিকে সম্ভাব্য আকার চিত্র 11.15 (a) থেকে (d) তে নীচে দেখানো হল :




**(a)**



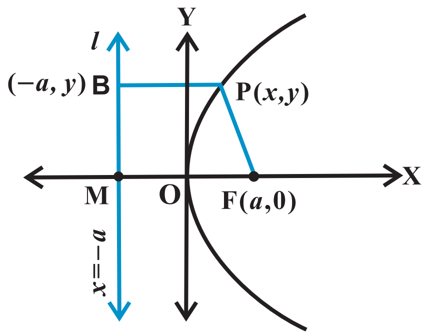

**(b)**




চিত্র **11.15 (a) to (d)**

এবার আমরা চিত্র 11.15 (a) তে প্রদর্শিত অধিবৃত্তের সমীকরণ নিম্নরূপে নির্ণয় করবো যার নাভি $(a, 0)$ $a > 0$; এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x = -a$ :

ধরো, F হল নাভি এবং *নিয়ামক* $l$ । আরও ধরো, নিয়ামকের উপর লম্ব FM এবং O বিন্দুতে FM সমদ্বিখণ্ডিত হয়। MO -কে X পর্যন্ত বর্ধিত করো। অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুযায়ী মধ্যবিন্দু O কে বলা হয় অধিবৃত্তের শীর্ষ। O কে মূলবিন্দু এবং OX কে $x$- অক্ষ ধরো। এবং তার উপর লম্ব OY কে $y$- অক্ষ ধরো। নিয়ামক থেকে নাভি পর্যন্ত দূরত্বকে $2a$ ধরো। অতএব, নাভির স্থানাঙ্ক হল $(a, 0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ হবে $x + a = 0$ , চিত্র11.16 এর অনুরূপ।




চিত্র **11.16**

ধরে নাও, অধিবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোনো একটি বিন্দু এমন যে

$$PF = PB, \qquad \ldots (1)$$

যেখানে PB রেখংশটি $l$ এর উপর লম্ব। B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-a, y)$ । দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র থেকে আমরা পাই

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \text{ এবং } PB = \sqrt{(x+a)^2}$$

যেহেতু, PF = PB, সুতরাং,

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

অর্থাৎ, $(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2$

বা, $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$

বা, $y^2 = 4ax$ ( $a > 0$).

অতএব, অধিবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দু সমীকরণ

$y^2 = 4ax$ কে সিদ্ধ করে। ... (2)

বিপরীতক্রমে, ধরো সমীকরণ (2) কে বিন্দু P($x$, $y$) সিদ্ধ করে।

$$\text{PF} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + 4ax}$$

$$= \sqrt{(x+a)^2} = \text{PB} \qquad \dots (3)$$

এবং এজন্য P($x$,$y$) বিন্দুটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত।

অতএব, (2) ও (3) সমীকরণের সাহায্যে আমরা প্রমাণ করলাম যে একটি অধিবৃত্ত যার শীর্ষ মূলবিন্দু, নাভি ($a$,0) এবং নিয়ামক $x = -a$ তার সমীকরণ হয় $y^2 = 4ax$ ।

**আলোচনা** সমীকরণ (2) -এ, যেহেতু $a > 0$, তাই $x$ -এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হতে পারে, কিন্তু ঋণাত্মক নয় এবং বক্রটি প্রথম ও চতুর্থ পাদে অনির্দিষ্ট ভাবে বাড়তে থাকবে এবং অধিবৃত্তটির অক্ষ হবে ধনাত্মক $x$- অক্ষ।

অনুরূপ ভাবে আমরা অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারি :

চিত্র 11.15 (b) তে $y^2 = -4ax$,

চিত্র 11.15 (c) তে $x^2 = 4ay$,

চিত্র 11.15 (d) তে $x^2 = -4ay$,

এই চারটি সমীকরণকে বলা হয় *অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ* ।

> **☛ দ্রষ্টব্য** অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণে নাভি থাকে যে কোনো স্থানাঙ্ক অক্ষের উপর, শীর্ষ হয় মূলবিন্দু এবং নিয়ামক অন্য স্থানাঙ্ক অক্ষের সমান্তরাল হয়। যাই হোক, যে অধিবৃত্তের নাভি যে কোনো বিন্দু এবং নিয়ামক যে কোনো সরলরেখা হয় সে বিষয়ে আলোচনার সুযোগ নেই।

অধিবৃত্তের আদর্শে সমীকরণ (চিত্র 11.15) থেকে আমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো পর্যবেক্ষণ করতে পারি :

**1.** অধিবৃত্ত তার অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম (symmetry) । যদি সমীকরণটির একটি পদ $y^2$ হয়, তবে তার প্রতিসম অক্ষ হয় $x$-অক্ষ বরাবর এবং যদি সমীকরণটির একটি পদ $x^2$ হয়, তবে প্রতিসম অক্ষ হয় $y$- অক্ষ বরাবর।

**2.** যদি প্রতিসম অক্ষ $x$- অক্ষ বরাবর হয় এবং

(a) $x$ এর সহগ ধনাত্মক হয় তবে অধিবৃত্তটি ডানদিকে খোলা হয়।

(b) $x$ এর সহগ ঋণাত্মক হয় তবে অধিবৃত্তটি বাঁ-দিকে খোলা হয়।

**3.** যদি প্রতিসম অক্ষ $y$- অক্ষ বরাবর হয় এবং

(c) $y$ এর সহগ ধনাত্মক হয় তখন অধিবৃত্তটি উপর দিকে খোলা হয়।

(d) $y$ এর সহগ ঋণাত্মক হয় তখন অধিবৃত্তটি নীচের দিকে খোলা হয়।

### 11.4.2 নাভিলম্ব (Latus rectum)

**সংজ্ঞা 3** অধিবৃত্তের নাভিগামী, অক্ষের উপর লম্ব, যে রেখাংশের প্রান্তবিন্দু দুটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত, তাকে অধিবৃত্তের নাভিলম্ব (Latus rectum) বলে (চিত্র11.17)।

**অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় (চিত্র 11.18)।**

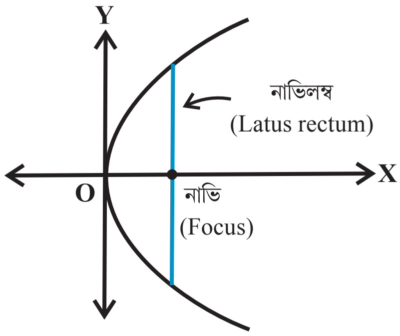
অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুযায়ী, AF = AC।

কিন্তু, AC = FM = $2a$

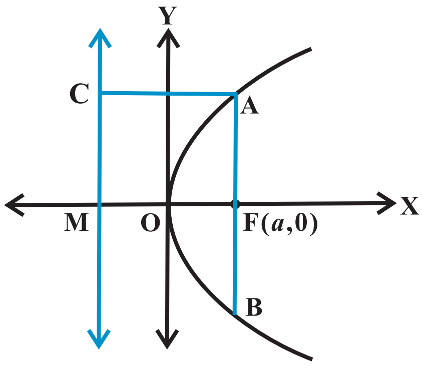
অতএব, AF = $2a$.

এবং যেহেতু অধিবৃত্তটি $x$- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম তাই AF = FB এবং সুতরাং,

AB = নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = $4a$।




চিত্র **11.17**



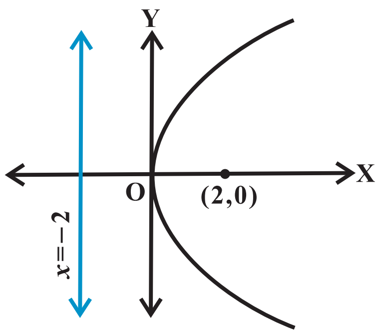

চিত্র **11.18**

**উদাহরণ 5** $y^2 = 8x$ অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক, নিয়ামকের সমীকরণ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

**সমাধান :** প্রদত্ত সমীকরণে $y^2$ আছে। সুতরাং, প্রতিসম অক্ষ হল $x$- অক্ষ। এখানে, $x$ এর সহগ ধনাত্মক তাই অধিবৃত্তটি ডানদিকে খোলা। $y^2 = 4ax$ সমীকরণের সাথে প্রদত্ত সমীকরণটি তুলনা করে পাই $a = 2$।

অতএব, অধিবৃত্তের নাভি (2, 0) এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x = -2$ (চিত্র 11.19)।

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a = 4 \times 2 = 8$.




চিত্র **11.19**

**উদাহরণ 6** যে অধিবৃত্তের নাভি (2,0) নিয়ামক $x = -2$, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** যেহেতু নাভি (2,0), $x$- অক্ষের উপর অবস্থিত। তাই $x$-অক্ষই অধিবৃত্তের অক্ষ। সুতরাং, অধিবৃত্তের সমীকরণটির আকার হবে $y^2 = 4ax$ বা $y^2 = -4ax$, যেহেতু নিয়ামকের সমীকরণ $x = -2$ এবং নাভি (2,0) বিন্দু, তাই অধিবৃত্তের সমীকরণের আকার হবে $y^2 = 4ax$ যেখানে $a = 2$ । সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণটি হবে—

$$y^2 = 4(2)x = 8x$$

**উদাহরণ 7** একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যার শীর্ষ (0, 0) বিন্দু এবং নাভি (0, 2) বিন্দু।

**সমাধান :** যেহেতু শীর্ষ (0,0) বিন্দুতে অবস্থিত এবং নাভি (0,2) বিন্দু $y$- অক্ষের উপর অবস্থিত তাই অধিবৃত্তটির অক্ষ $y$- অক্ষ। সুতরাং, অধিবৃত্তের সমীকরণের আকার হবে $x^2 = 4ay$, অতএব আমরা পাই

$$x^2 = 4(2)y, \text{ অর্থাৎ, } x^2 = 8y.$$

**উদাহরণ 8** যে অধিবৃত্তটি $y$- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম এবং (2,–3) বিন্দুগামী তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** যেহেতু, অধিবৃত্তটি $y$- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম এবং এটির শীর্ষ মূলবিন্দু, তাই সমীকরণটির আকার হবে $x^2 = 4ay$ অথবা $x^2 = -4ay$, যেখানে চিহ্ন নির্ভর করবে অধিবৃত্তটি উপরের দিকে না কি নীচের দিকে খোলা তার উপর। কিন্তু অধিবৃত্তটি (2,–3) বিন্দুগামী, যা চতুর্থ পাদে অবস্থিত। তাই অধিবৃত্তটি অবশ্যই নীচের দিকে খোলা হবে। অতএব, অধিবৃত্তের সমীকরণের আকার হবে $x^2 = -4ay$ ।

যেহেতু, অধিবৃত্তটি ( 2,–3) বিন্দুগামী তাই আমরা পাই

$$2^2 = -4a(-3), \text{ অর্থাৎ, } a = \frac{1}{3}$$

সুতরাং, অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে

$$x^2 = -4\left(\frac{1}{3}\right)y, \text{ অর্থাৎ, } 3x^2 = -4y.$$

## অনুশীলনী 11.2

নিম্নে প্রদত্ত প্রশ্ন 1 থেকে 6 পর্যন্ত প্রতিটি অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক, নিয়ামকের সমীকরণ, অধিবৃত্তের অক্ষ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো :

**1.** $y^2 = 12x$  **2.** $x^2 = 6y$  **3.** $y^2 = -8x$

**4.** $x^2 = -16y$  **5.** $y^2 = 10x$  **6.** $x^2 = -9y$

নিম্নলিখিত প্রশ্নে 7 থেকে 12 পর্যন্ত প্রতি ক্ষেত্রে প্রদত্ত শর্তানুযায়ী অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো :

7. নাভি (6,0); নিয়ামক $x = -6$

8. নাভি (0,–3); নিয়ামক $y = 3$

9. শীর্ষ (0,0); নাভি (3,0)

10. শীর্ষ (0,0); নাভি (–2,0)

11. শীর্ষ (0,0) (2,3) বিন্দুগামী এবং অক্ষ $x$- অক্ষ বরাবর।

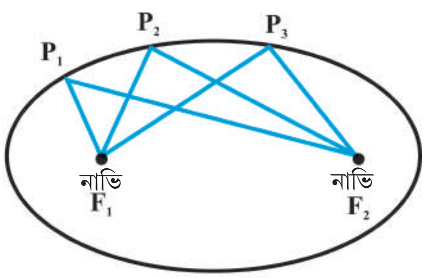
12. শীর্ষ (0,0), (5,2) বিন্দুগামী এবং $y$- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

## 11. 5 উপবৃত্ত (Ellipse)

**সংজ্ঞা 4** একটি *উপবৃত্ত* হল একই সমতলে অবস্থিত সেইসব বিন্দুর সেট্ যেগুলো নির্দিষ্ট দুটি বিন্দু থেকে দূরত্বের সমষ্টি একটি ধ্রুবক হয়।

এই দুটি স্থির বিন্দুকে বলা হয় উপবৃত্তের নাভি (*foci*) (চিত্র 11.20)।

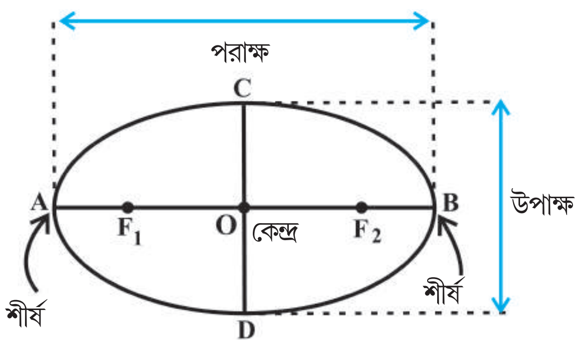
> দ্রষ্টব্য উপবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দু থেকে নাভিদ্বয়ের দূরত্বের সমষ্টি ধ্রুবক, যা সবসময় নাভিদ্বয়ের দূরত্ব থেকে বেশি হয়।



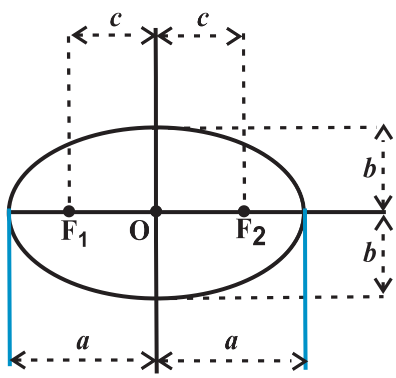

$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = P_3F_1 + P_3F_2$

চিত্র **11.20**

নাভিদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দুকে বলা হয় উপবৃত্তের কেন্দ্র (*centre*)। উপবৃত্তের নাভিদ্বয়গামী রেখাংকে বলা হয় পরাক্ষ (*major axis*) এবং কেন্দ্রগামী এবং পরাক্ষের উপর লম্বরেখাকে বলা হয় উপাক্ষ (*minor axis*)। পরাক্ষের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়কে বলা হয় উপবৃত্তের শীর্ষ (চিত্র 11.21)।



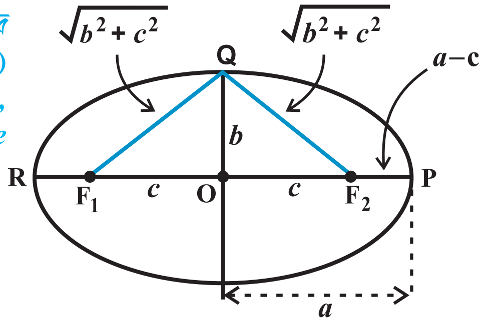

চিত্র **11.21**




চিত্র **11.22**

আমরা, পরোক্ষের দৈর্ঘ্যকে $2a$ , উপাক্ষের দৈর্ঘ্যকে $2b$ এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্বকে $2c$ দিয়ে প্রকাশ করি। অতএব, অর্ধ-পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $a$ এবং অর্ধ-উপাক্ষের দৈর্ঘ্য হয় $b$ (চিত্র 11.22)।

### 11.5.1 অর্ধ-পরাক্ষ, অর্ধ-উপাক্ষ এবং উপবৃত্তের কেন্দ্র থেকে নাভির দূরত্বের মধ্যে সম্পর্ক (চিত্র 11.23) *(Relationship between semi-major axis, semi-minor axis and the distance of the focus from the centre of the ellipse.)*



চিত্র 11.23

পরাক্ষের এক প্রান্তে একটি বিন্দু P ধরো।

নাভিদ্বয় থেকে P বিন্দুর দূরত্বের যোগফল

$$F_1P + F_2P = F_1O + OP + F_2P$$

(যেহেতু , $F_1P = F_1O + OP$)

$$= c + a + a - c = 2a$$

উপাক্ষের এক প্রান্তে একটি বিন্দু Q ধরো। নাভিদ্বয় থেকে Q বিন্দুর দূরত্বের সমষ্টি।

$$F_1Q + F_2Q = \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2} = 2\sqrt{b^2+c^2}$$

যেহেতু, P ও Q উভয় বিন্দুই উপবৃত্তের উপর অবস্থিত। তাই উপবৃত্তের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই—

$$2\sqrt{b^2+c^2} = 2a, \text{ অর্থাৎ, } a = \sqrt{b^2+c^2}$$

বা, $$a^2 = b^2 + c^2, \text{ অর্থাৎ, } c = \sqrt{a^2-b^2}.$$

**11.5.2 একটি উপবৃত্তের বিশেষ ক্ষেত্র *(Special cases of an ellipse)*** উপরোক্ত সমীকরণ $c^2 = a^2 - b^2$ তে যদি আমরা $a$ এর মান স্থির রাখি এবং $c$ এর মান 0 থেকে $a$ তে পরিবর্তিত করা হয় তবে প্রাপ্ত উপবৃত্তটি নিম্নরূপে পরিবর্তিত হবে।

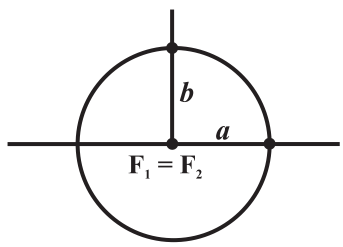


Fig 11.24

**ক্ষেত্র (i)** যখন $c = 0$ হয়, তখন উপবৃত্তের উভয় নাভি কেন্দ্রে মিলিত হবে এবং $a^2 = b^2$ হবে, অর্থাৎ, $a = b$ হবে, এবং সুতরাং, উপবৃত্তটি একটি বৃত্তে পরিণত হবে (চিত্র11.24)। অতএব বৃত্ত হল উপবৃত্তের একটি বিশেষ ক্ষেত্র যা অনুচ্ছেদ 11.3 তে বর্ণনা করা হয়েছে।

**ক্ষেত্র (ii)** যখন $c = a$, তখন $b = 0$ হবে এবং উপবৃত্তটি একটি নাভিদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ $F_1F_2$ তে পরিণত হবে (চিত্র 11.25)।

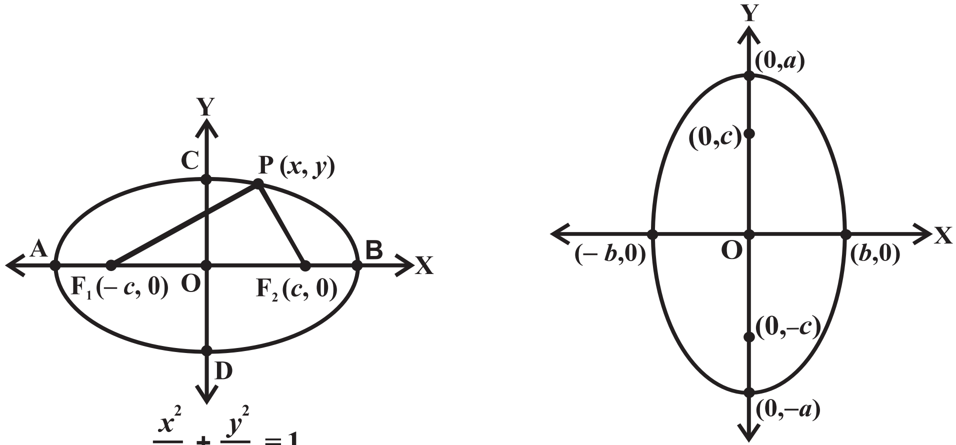
চিত্র 11.25

### 11.5.3 উৎকেন্দ্রতা *(Eccentricity)*

**সংজ্ঞা 5** উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা হল উপবৃত্তের কেন্দ্র থেকে নাভি এবং কেন্দ্র থেকে শীর্ষের দূরত্বের অনুপাত (উৎকেন্দ্রতাকে $e$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়) অর্থাৎ, $e = \dfrac{c}{a}$ ।

যেহেতু, নাভি থেকে কেন্দ্রের দূরত্ব $c$ হয়, তাই উৎকেন্দ্রতার মাধ্যমে কেন্দ্র থেকে নাভির দূরত্ব হয় $ae$।

**11.5.4** ***একটি উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (Standard equation of an ellipse)*** একটি উপবৃত্তের সমীকরণ সরলতম হয় যখন উপবৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দু হয় এবং নাভিদ্বয় $x$-অক্ষ বা $y$-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়। এখানে দুটি সম্ভাব্য দিক বিন্যাস চিত্র 11.26 তে দেখানো হয়েছে।




$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(a)

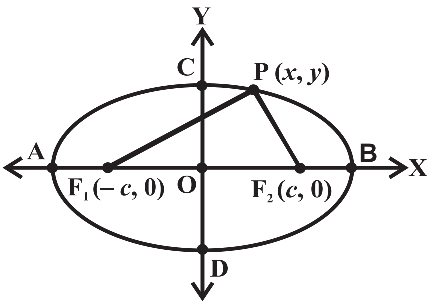
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

(b)

চিত্র **11.26**

এখন, আমরা চিত্র 11.26 (a) তে দেখানো উপবৃত্ত যার নাভি $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত তার সমীকরণ নির্ণয় করব।

ধরো, নাভিদ্বয় $F_1$ ও $F_2$ এবং $F_1F_2$ রেখাংশের মধ্যবিন্দু O। মনে করো, O হল মূলবিন্দু এবং O থেকে $F_2$ দিকে ধনাত্মক $x$ অক্ষ ও $F_1$ এর দিকে ঋণাত্মক $x$ অক্ষ। ধরো O বিন্দুগামী $x$ অক্ষের উপর লম্ব সরলরেখাটি $y$ অক্ষ। মনে করো, $F_1$ এর স্থানাঙ্ক $(-c, 0)$ এবং $F_2$ এর $(c, 0)$ স্থানাঙ্ক (চিত্র 11.27)।




$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

চিত্র **11.27**

ধরো, উপবৃত্তের উপর $P(x, y)$ এমন একটি বিন্দু যে P থেকে নাভিদ্বয়ের দূরত্বের সমষ্টি $2a$ অর্থাৎ,

$$PF_1 + PF_2 = 2a. \qquad \ldots (1)$$

দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র থেকে আমরা পাই—

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

অর্থাৎ, $$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

উভয়পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই–

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

এটিকে সরল করে পাওয়া যায়–

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

আবার বর্গ করে এবং সরল করে আমরা পাই–

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

অর্থাৎ, $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ (যেহেতু $c^2 = a^2 - b^2$)

সুতরাং, উপবৃত্তের উপর কোনো বিন্দু সমীকরণ

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ কে সিদ্ধ করে। ... (2)

বিপরীতক্রমে, ধরো, P $(x, y)$ বিন্দু সমীকরণ (2) কে সিদ্ধ করে যেখানে $0 < c < a$ । সুতরাং,

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

অতএব, 
$$\begin{aligned} PF_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)} \\ &= \sqrt{(x+c)^2 + (a^2 - c^2)\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)} \quad (\text{যেহেতু } b^2 = a^2 - c^2) \\ &= \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = a + \frac{c}{a}x \end{aligned}$$

অনুরূপে, $$PF_2 = a - \frac{c}{a}x$$

সুতরাং, $$PF_1 + PF_2 = a+\frac{c}{a}x + a-\frac{c}{a}x = 2a \qquad \dots (3)$$

অতএব, কোনো বিন্দু যেটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ কে সিদ্ধ করে, যেটি জ্যামিতিক শর্ত মানে এবং এইজন্য $P(x, y)$ বিন্দুটি উপবৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

অতএব (2) ও (3) থেকে আমরা প্রমাণ করলাম যে, উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং পরাক্ষ $x$-অক্ষ বরাবর, তার সমীকরণ হল—

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

**আলোচনা** উপরে প্রাপ্ত উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে এটি বলা যায় যে, উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে কোনো বিন্দু $P(x, y)$ এরজন্য আমরা পাই—

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \le 1, \text{ অর্থাৎ } x^2 \le a^2, \text{ সুতরাং, } -a \le x \le a \text{ ।}$$

অতএব, উপবৃত্তটি $x = -a$ এবং $x = a$ রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত এবং রেখাদ্বয়কে স্পর্শ করে।

অনুরূপে, উপবৃত্তটি $y = -b$ এবং $y = b$ রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত এবং রেখাদ্বয়কে স্পর্শ করে।

অনুরূপভাবে, আমরা চিত্র 11.26 (b) থেকে উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ পেতে পারি।

এই দুটি সকরণকে বলা হয় উপবৃত্তের *আদর্শ সমীকরণ* (*standard equations*)।

> **দ্রষ্টব্য** উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণে কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং পরাক্ষ ও উপাক্ষ হল স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়। যদিও উপবৃত্ত অধ্যয়নে যে উপবৃত্তের কেন্দ্র যে কোনো অন্য বিন্দু এবং কেন্দ্রগামী পরস্পর লম্ব অক্ষদ্বয় যে কোনো সরলরেখা যারা পরাক্ষ ও উপাক্ষ, তা নিয়ে এখানে আলোচনার সুযোগ নেই।

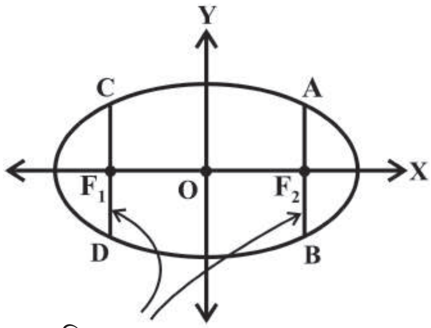
উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (চিত্র 11.26) থেকে আমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো পর্যবেক্ষণ করতে পারি:

1. উপবৃত্ত, উভয় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে প্রতিসম, তাই যদি $(x, y)$ উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু হয় তবে $(-x, y)$, $(x, -y)$ এবং $(-x, -y)$ বিন্দুগুলোও উপবৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

2. নাভিদ্বয় সর্বদা পরাক্ষের উপর অবস্থিত হয়। পরাক্ষ নির্ণয় করা যেতে পারে প্রতিসাম্য অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ নির্ণয়ের মাধ্যমে, অর্থাৎ পরাক্ষ $x$-অক্ষ বরাবর হবে যদি $x^2$ এর সহগ বৃহত্তর হর যুক্ত হয় এবং এটি $y$-অক্ষ বরাবর হবে যদি $y^2$ এর সহগ বৃহত্তর হর যুক্ত হয়।

## 11.5.5 নাভিলম্ব *(Latus rectum)*

**সংজ্ঞা 6** পরাক্ষের উপর লম্ব যে কোনো নাভিগামী রেখাংশ, যার প্রান্তবিন্দুদ্বয় উপবৃত্তের উপর অবস্থিত তাকে উপবৃত্তের নাভিলম্ব বলে (চিত্র 11.28).




চিত্র **11. 28**

**উপবৃত্ত** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ **এর নাভিলম্ব -এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় :**

ধরো, $AF_2$ এর দৈর্ঘ্য $l$.

সুতরাং, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(c, l)$, অর্থাৎ, $(ae, l)$ ।

যেহেতু A বিন্দুটি উপবৃত্ত $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ।এর উপর অবস্থিত, আমরা পাই,

$$\frac{(ae)^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow l^2 = b^2\,(1 - e^2)$$

কিন্তু, $$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$$

সুতরাং, $$l^2=\frac{b^4}{a^2}\text{, অর্থাৎ, } l=\frac{b^2}{a} \text{ ।}$$

যেহেতু, উপবৃত্তটি $y$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম (অবশ্যই উভয় স্থানাঙ্ক অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম), $AF_2 = F_2B$ এবং এই জন্য নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য হবে $\dfrac{2b^2}{a}$ ।

**উদাহরণ 9** উপবৃত্ত $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ এর নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, পরাক্ষের ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিলম্ব নির্ণয় করো।

**সমাধান :** যেহেতু, $\dfrac{x^2}{25}$ এর হর, $\dfrac{y^2}{9}$ এর হরের থেকে বৃহত্তর, তাই পরাক্ষ হবে $x$-অক্ষ বরাবর। প্রদত্ত সমীকরণকে $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ এর সাথে তুলনা করে আমরা পাই—

$$a = 5 \text{ এবং } b = 3,$$

তাহলে, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ ।

সুতরাং, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হবে $(-4, 0)$ এবং $(4, 0)$, শীর্ষদ্বয় হল $(-5, 0)$ এবং $(5, 0)$ । পরাক্ষের দৈর্ঘ্য 10 একক, উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $2b$ হল 6 একক এবং উৎকেন্দ্রতা হল $\frac{4}{5}$ এবং নাভিলম্ব হল $\frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$ ।

**উদাহরণ 10** উপবৃত্ত $9x^2 + 4y^2 = 36$ এর নাভিদ্বয় ও শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় করো।

**সমাধান :** প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণকে আদর্শ আকারে লেখা যায়

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

যেহেতু, $\frac{y^2}{9}$ এর হর, $\frac{x^2}{4}$ এর হরের থেকে বৃহত্তর তাই, পরাক্ষ হবে $y$-অক্ষ বরাবর। প্রদত্ত সমীকরণকে আদর্শে সমীকরণ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে আমরা পাই— $b = 2$ এবং $a = 3$।

তাহলে $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

এবং $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

অতএব, নাভিদ্বয় হল $(0, \sqrt{5})$ ও $(0, -\sqrt{5})$, শীর্ষদ্বয় হল $(0,3)$ ও $(0, -3)$, পরাক্ষের দৈর্ঘ্য হল 6 একক, উপাক্ষের দৈর্ঘ্য 4 একক এবং উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা হল $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ।

**উদাহরণ 11** যে উপবৃত্তের শীর্ষদ্বয় $(\pm 13, 0)$ এবং নাভিদ্বয় $(\pm 5, 0)$ তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** যেহেতু শীর্ষদ্বয় $x$- অক্ষের উপর অবস্থিত তাই সমীকরণটি আকার হবে

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ যেখানে } a \text{ হল অর্ধ-পরাক্ষ।}$$

এখানে প্রদত্ত $a = 13, c = \pm 5.$

সুতরাং, $c^2 = a^2 - b^2$ সম্পর্ক থেকে আমরা পাই—

$$25 = 169 - b^2, \text{ অর্থাৎ } b = 12$$

অতএব, উপবৃত্তের সমীকরণ হল $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ ।

**উদাহরণ 12** যে উপবৃত্তের পরাক্ষের দৈর্ঘ্য 20 এবং নাভিদ্বয় $(0, \pm 5)$ তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** যেহেতু, নাভিদ্বয় $y$- অক্ষের উপর অবস্থিত এবং পরাক্ষ $y$-অক্ষ বরাবর। সুতরাং, উপবৃত্তের সমীকরণের আকার হবে— $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ ।

এখানে প্রদত্ত,

$$a = \text{অর্ধ পরাক্ষ} = \frac{20}{2} = 10$$

এবং সম্পর্ক $c^2 = a^2 - b^2$ থেকে পাওয়া যায়

$$5^2 = 10^2 - b^2 \text{ অর্থাৎ, } b^2 = 75$$

সুতরাং, উপবৃত্তের সমীকরণ হল

$$\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$$

**উদাহরণ 13** উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যার পরাক্ষ $x$-অক্ষ বরাবর এবং যেটি (4, 3) এবং (– 1,4) বিন্দুগামী।

**সমাধান :** উপবৃত্তের আদর্শ আকার হল $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ যেহেতু, (4, 3) ও (–1, 4) বিন্দুদ্বয় উপবৃত্তের উপর অবস্থিত, তাই আমরা পাই,

$$\frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \qquad \text{... (1)}$$

এবং

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \qquad \text{....(2)}$$

(1) এবং (2) সমাধান করে আমরা পাই $a^2 = \dfrac{247}{7}$ এবং $b^2 = \dfrac{247}{15}$ ।

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণটি হল

$$\frac{x^2}{\left(\frac{247}{7}\right)}+\frac{y^2}{\frac{247}{15}}=1$$, অর্থাৎ, $7x^2 + 15y^2 = 247$ ।

## অনুশীলনী 11.3

অনুশীলনীতে 1 নং প্রশ্ন থেকে 9 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রত্যেক উপবৃত্তের নাভিদ্বয়, শীর্ষের স্থানাঙ্ক, পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

**1.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ **2.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ **3.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

**4.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$ **5.** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ **6.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{400}=1$

**7.** $36x^2 + 4y^2 = 144$ **8.** $16x^2 + y^2 = 16$ **9.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

অনুশীলনীতে নিম্নলিখিত 10 নং প্রশ্ন থেকে 20 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রদত্ত শর্তানুযায়ী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো :

**10.** শীর্ষদ্বয় $(\pm 5, 0)$, নাভিদ্বয় $(\pm 4, 0)$

**11.** শীর্ষদ্বয় $(0, \pm 13)$, নাভিদ্বয় $(0, \pm 5)$

**12.** শীর্ষদ্বয় $(\pm 6, 0)$, নাভিদ্বয় $(\pm 4, 0)$

**13.** পরাক্ষের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় $(\pm 3, 0)$, উপাক্ষের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়$(0, \pm 2)$

**14.** পরাক্ষের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় $(0, \pm\sqrt{5})$, উপাক্ষের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় $(\pm 1, 0)$

**15.** পরাক্ষের দৈর্ঘ্য 26,. নাভিদ্বয় $(\pm 5, 0)$

**16.** উপাক্ষের দৈর্ঘ্য 16, নাভিদ্বয় $(0, \pm 6)$.

**17.** নাভিদ্বয় $(\pm 3, 0)$, $a = 4$

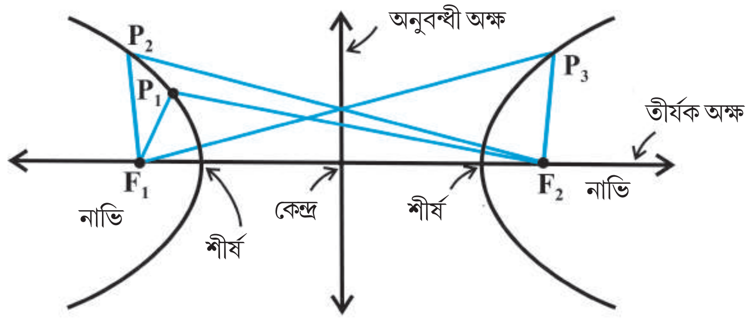
**18.** $b = 3$, $c = 4$, কেন্দ্র হল মূলবিন্দু; নাভিদ্বয় $x$ অক্ষের উপর অবস্থিত।

**19.** কেন্দ্র (0,0) বিন্দুতে, পরাক্ষ $y$-অক্ষের উপর এবং (3, 2) ও (1,6) বিন্দুগামী।

**20.** পরাক্ষ $x$-অক্ষের উপর এবং (4,3) ও (6,2) বিন্দুগামী।

## 11.6 পরাবৃত্ত (Hyperbola)

**সংজ্ঞা 7** একটি পরাবৃত্ত হল একই সমতলে অবস্থিত সব বিন্দুর সেট, যাদের দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে দূরত্বের অন্তর একটি ধ্রুবক হয়।

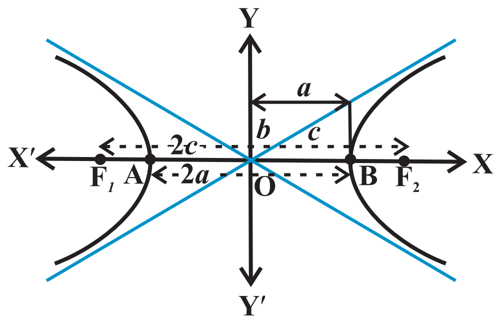



$$P_1F_2 - P_1F_1 = P_2F_2 - P_2F_1 = P_3F_1 - P_3F_2$$

চিত্র **11.29**

সংজ্ঞায় ব্যবহৃত *'অন্তর'* পদটির অর্থ হল দূরবর্তী বিন্দুর দূরত্ব বিয়োগ নিকটবর্তী বিন্দুর দূরত্ব। দুটি স্থির বিন্দুকে বলা হয় পরাবৃত্তের নাভি (foci ) । নাভিদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দুকে বলা হয় পরাবৃত্তের কেন্দ্র (*centre of the hyperbola*)। নাভিদ্বয়গামী সরলরেখাকে বলা তির্যক অক্ষ (*transverse axis*) এবং কেন্দ্রগামী তির্যক অক্ষের উপর লম্ব সরলরেখাকে বলা হয় অনুবন্ধী অক্ষ (*conjugate axis*)। যে দুটি বিন্দুতে পরাবৃত্তটি তির্যক অক্ষকে ছেদ করে তাদের বলা হয় *পরাবৃত্তের শীর্ষ* (চিত্র 11.29)।

নাভিদ্বয়ের দূরত্বকে আমরা প্রকাশ করি $2c$ দিয়ে, শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের দূরত্বকে (তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য) প্রকাশ করি $2a$ এবং $b$ রাশিকে আমরা সংজ্ঞায়িত করি $b = \sqrt{c^2 \quad a^2}$ রূপে। তাহলে $2b$ হল অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য (চিত্র 11.30)।




চিত্র **11.30**

**ধ্রুবক রাশি ($P_1F_2 - P_1F_1$) এর মান নির্ণয় :**

P বিন্দুতে A ও B তে ধরে চিত্র 11.30, আমরা পাই

$BF_1 - BF_2 = AF_2 - AF_1$ (পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুযায়ী)

$BA + AF_1 - BF_2 = AB + BF_2 - AF_1$

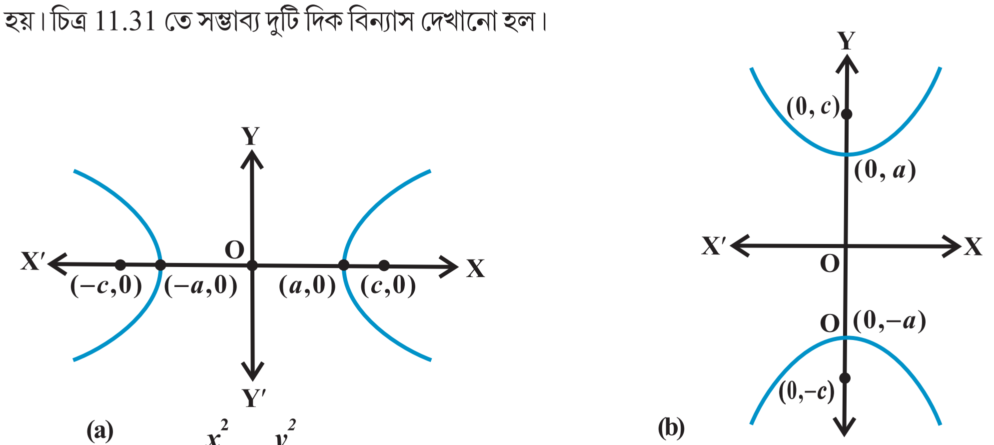
অর্থাৎ, $AF_1 = BF_2$

তাহলে, $BF_1 - BF_2 = BA + AF_1 - BF_2 = BA = 2a$

### 11.6.1 উৎকেন্দ্রতা (*Eccentricity*)

**সংজ্ঞা 8** উপবৃত্তের মতোই অনুপাত $e = \dfrac{c}{a}$ কে বলা হয় *পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা* (*eccentricity of the hyperbola*)। যেহেতু $c \geq a$, তাই উৎকেন্দ্রতা কখনোই 1 থেকে ছোটো হবে না। উৎকেন্দ্রতার সাহায্যে কেন্দ্র থেকে নাভিদ্বয়ের দূরত্ব হল $ae$ ।

**11.6.2 পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (*Standard equation of Hyperbola*)** একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ সরলতম হয় যখন পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দুতে এবং নাভিদ্বয় $x$-অক্ষ বা $y$-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়। চিত্র 11.31 তে সম্ভাব্য দুটি দিক বিন্যাস দেখানো হল।




(a) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

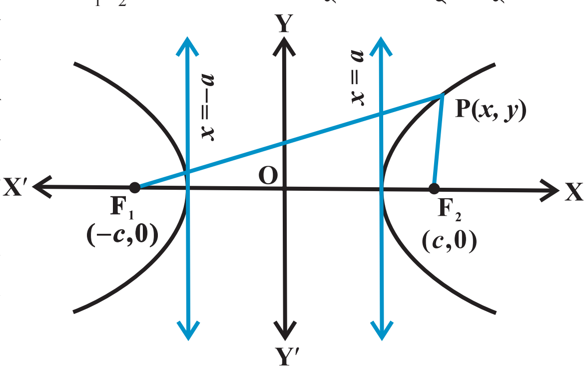
(b) $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

চিত্র **11.31**

আমরা এখন চিত্র 11.31(a) তে প্রদর্শিত পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করব, যার *নাভিদ্বয়* $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত।

ধরো, $F_1$ ও $F_2$ হল নাভিদ্বয় এবং O হল $F_1F_2$ রেখাংশের মধ্যবিন্দু। ধরো, মূলবিন্দু O এবং O বিন্দুগামী $F_2$ এর দিকে রেখাটি ধনাত্মক $x$-অক্ষ এবং $F_1$ এর দিকে রেখাটি ঋণাত্মক $x$-অক্ষ। O বিন্দুগামী $x$- অক্ষের উপর লম্ব রেখাটি $y$-অক্ষ। ধরো $F_1$ এর স্থানাঙ্ক $(-c,0)$ এবং $F_2$ এর স্থানাঙ্ক $(c,0)$ (চিত্র 11.32).

ধরো, পরাবৃত্তের উপর $P(x, y)$ এমন একটি বিন্দু যে, P থেকে দূরবর্তী নাভির দূরত্ব ও নিকটবর্তী নাভির দূরত্বের অন্তর $2a$.




চিত্র **11.32**

তাহলে, $PF_1 - PF_2 = 2a$

দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র ব্যবহার করে আমরা পাই—

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

অর্থাৎ,
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

উভয় দিকে বর্গ করে পাই—

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

এবং সরল করে আমরা পাই,

$$\frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

পুনরায় বর্গ করে এবং আরও সরল করে আমরা পাই—

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

অর্থাৎ
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(যেহেতু } c^2 - a^2 = b^2\text{)}$$

সুতরাং, পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে কোনো কিছু $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ কে সিদ্ধ করবে।

বিপরীতক্রমে, ধরো $P(x, y)$ উপরের সমীকরণকে সিদ্ধ করে যেখানে $0 < a < c$ । তাহলে,

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)$$

অতএব,
$$PF_1 = + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$= + \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)} = a + \frac{c}{a}x$$

অনুরূপে,
$$PF_2 = a - \frac{a}{c}x$$

পরাবৃত্তে $c > a$; এবং যেহেতু P বিন্দুটি $x = a$ সরলরেখার ডানদিকে আছে তাহলে, $x > a$, $\frac{c}{a}x > a$।

সুতরাং, $a - \frac{c}{a}x$ ঋণাত্মক হবে। সুতরাং, $PF_2 = \frac{c}{a}x - a$ ।

অতএব, $\quad PF_1 - PF_2 = a + \frac{c}{a}x - \frac{cx}{a} + a = 2a$

আরও লক্ষ করো, যদি P বিন্দুটি $x = -a$ সরলেখার বাঁদিকে থাকে তবে,

$$PF_1 = \left(a + \frac{c}{a}x\right), \quad PF_2 = a - \frac{c}{a}x \text{ ।}$$

এক্ষেত্রে $PF_2 - PF_1 = 2a$ । সুতরাং, যে কোনো বিন্দু যেটি $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ কে সিদ্ধ করে সেটি পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত হবে। সুতরাং, আমরা প্রমাণ করলাম, যে পরাবৃত্তের কেন্দ্র $(0,0)$ এবং তির্যক অক্ষ $x$-অক্ষ বরাবর হলে তার সমীকরণ হয় $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ।

> দ্রষ্টব্য একটি পরাবৃত্ত, যার $a = b$ হয় তাকে *সমপরাবৃত্ত* (*equilateral hyperbola*) বলা হয়।

**আলোচনা** পরাবৃত্তের সমীকরণ থেকে আমরা পেতে পারি পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দু $(x, y)$ এর জন্য, $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$ ।

অর্থাৎ, $\left|\frac{x}{a}\right| \geq 1$, অর্থাৎ, $x \leq -a$ বা, $x \geq a$ । সুতরাং, বক্রের কোনো অংশে সরলরেখা $x = +a$ এবং $x = -a$ এর মধ্যে অবস্থিত হয় না (অর্থাৎ, অনুবন্ধী অক্ষে কোনো বাস্তব ছিন্নাংশ নেই)।

অনুরূপভাবে, চিত্র 11.31 (b) থেকে আমরা পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ নির্ণয় করতে পারি।

এই দুটি সমীকরণকে বলা হয় *পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ* (*standard equations* of *hyperbolas*.)

> দ্রষ্টব্য পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণে তির্যক ও অনুবন্ধী অক্ষদ্বয় হল স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় এবং কেন্দ্র হল মূলবিন্দু। যদিও, এমন পরাবৃত্ত যার তির্যক ও অনুবন্ধী অক্ষ হল যে কোনো দুটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা। কিন্তু এই রূপ ক্ষেত্রের অধ্যয়ন তোমরা পরবর্তী শ্রেণিতে পাবে।

পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (চিত্র 11.29) থেকে আমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো পর্যবেক্ষণ করতে পারি :

1. পরাবৃত্ত তার দুটি অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম, তাই যদি $(x, y)$ পরাবৃত্তের উপর কোনো বিন্দু হয়, তবে $(-x, y)$, $(x, -y)$ এবং $(-x, -y)$ বিন্দুগুলোও পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

2. নাভিদ্বয় সর্বদা তির্যক অক্ষের উপর অবস্থিত হয়। এটি হল ধনাত্মক পদ যার হর তির্যক অক্ষ হয়।

উদাহরণস্বরূপ, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ এর তির্যক অক্ষ, $x$-অক্ষ বরাবর যার দৈর্ঘ্য 6,

আবার, $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$

এর তির্যক অক্ষ, y-অক্ষ বরাবর যার দৈর্ঘ্য 10 ।

### 11.6.3 *নাভিলম্ব (Latus rectum)*

**সংজ্ঞা 9** এ পরাবৃত্তের যে কোনো নাভিগামী এবং তির্যক অক্ষের উপর লম্ব রেখাংশ যার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত, তাকে পরাবৃত্তের নাভিলম্ব বলে।

উপবৃত্তের মতই এটি দেখানো সহজ যে, পরাবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য হল $\frac{2b^2}{a}$ ।

**উদাহরণ 14** নিম্নলিখিত পরাবৃত্তগুলোর নাভি ও শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো:

(i) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, (ii) $y^2 - 16x^2 = 16$

**সমাধান : (i) প্রদত্ত সমীকরণ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ কে আদর্শ সমীকরণ**

**$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সাথে তুলনা করে পাই—**

এখানে, $a = 3, b = 4$ এবং $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16} = 5$

সুতরাং, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হল $(\pm 5, 0)$ এবং শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হল $(\pm 3, 0)$ । সুতরাং,

উৎকেন্দ্রতা $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ । নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{32}{3}$

(ii) প্রদত্ত সমীকরণের উভয়পক্ষকে 16 দিয়ে ভাগ করে আমরা পাই $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{1}=1$

এই সমীকরণটিকে আদর্শ সমীকরণ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ এর সাথে তুলনা করে আমরা পাই—

$a = 4,\ b = 1$ এবং $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$ ।

সুতরাং, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm\sqrt{17})$ এবং শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 4)$ । আরও,

উৎকেন্দ্রতা $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{17}}{4}$ । নাভিলম্ব $= \frac{2b^2}{a} = \frac{1}{2}$ ।

**উদাহরণ 15** পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যার নাভিদ্বয় $(0, \pm 3)$ এবং শীর্ষদ্বয় $\left(0, \pm \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ ।

**সমাধান :** যেহেতু, নাভিদ্বয় y-অক্ষের উপর অবস্থিত, তাই পরাবৃত্তের সমীকরণের আকার হবে $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ।

যেহেতু, শীর্ষদ্বয় $\left(0, \pm \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ অতএব, $a = \frac{\sqrt{11}}{2}$

আবার, যেহেতু নাভিদ্বয় $(0, \pm 3)$; তাই $c = 3$ এবং $b^2 = c^2 - a^2 = \frac{25}{4}$

সুতরাং, পরাবৃত্তের সমীকরণ হল

$$\frac{y^2}{\left(\frac{11}{4}\right)} - \frac{x^2}{\left(\frac{25}{4}\right)} = 1, \text{ অর্থাৎ, } 100y^2 - 44x^2 = 275 \text{ ।}$$

**উদাহরণ 16** পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যেখানে নাভিদ্বয় $(0, \pm 12)$ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 36 ।

**সমাধান :** যেহেতু, নাভিদ্বয় $(0, \pm 12)$ এজন্য $c = 12$ ।

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = 36$ বা $b^2 = 18a$

সুতরাং, $c^2 = a^2 + b^2$; থেকে পাওয়া যায়

$144 = a^2 + 18a$

অর্থাৎ, $a^2 + 18a - 144 = 0$,

সুতরাং, $a = -24, 6$.

যেহেতু, $a$ ঋণাত্মক হতে পারে না, আমরা ধরবো $a = 6$ এবং তাই $b^2 = 108$

অতএব, নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ হল $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{108} = 1$ অর্থাৎ, $3y^2 - x^2 = 108$ ।

## অনুশীলনী 11.4

অনুশীলনীতে 1 নং প্রশ্ন থেকে 6 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রত্যেকটি পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় ও শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

**1.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ **2.** $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$ **3.** $9y^2-4x^2=36$

**4.** $16x^2-9y^2=576$ **5.** $5y^2-9x^2=36$ **6.** $49y^2-16x^2=784.$

অনুশীলনীতে 7 নং প্রশ্ন থেকে 15 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রদত্ত শর্তানুযায়ী পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো:

**7.** শীর্ষদ্বয় $(\pm 2, 0)$, নাভিদ্বয় $(\pm 3, 0)$ ।

**8.** শীর্ষদ্বয় $(0, \pm 5)$, নাভিদ্বয় $(0, \pm 8)$।

**9.** শীর্ষদ্বয় $(0, \pm 3)$, নাভিদ্বয় $(0, \pm 5)$।

**10.** নাভিদ্বয় $(\pm 5, 0)$, তীর্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য 8।

**11.** নাভিদ্বয় $(0, \pm 13)$, অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24।

**12.** নাভিদ্বয় $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 8।

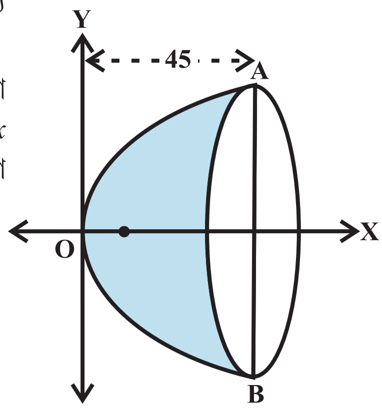
**13.** নাভিদ্বয় $(\pm 4, 0)$, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 12।

**14.** শীর্ষদ্বয় $(\pm 7,0)$, $e=\frac{4}{3}$ ।

**15.** নাভিদ্বয় $(0, \pm\sqrt{10})$, (2,3) বিন্দুগামী।

## *বিবিধ উদাহরণমালা (Miscellaneous Examples)*

**উদাহরণ 17** একটি অধিবৃত্তাকার দপর্ণের নাভি, তার শীর্ষবিন্দু থেকে 5 সেমি দূরে অবস্থিত, যা চিত্র 11.33 তে দেখানো হয়েছে। যদি দপর্ণটির 45 গভীর হয় তবে AB এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো (চিত্র 11.33)



চিত্র **11.33**

**সমাধান :** যেহেতু, শীর্ষ থেকে নাভির দূরত্ব 5 সেমি, তাই আমরা পাই $a = 5$। যদি দপর্ণটির শীর্ষটি মূল বিন্দুতে এবং এর অক্ষকে $x$ অক্ষের ধনাত্মক দিকে ধরা হয়, তবে অধিবৃত্তাকার অংশের সমীকরণ হবে—

$$y^2 = 4\,(5)\,x = 20\,x$$

মনে করো, $x = 45$ । তাই

$$y^2 = 900$$

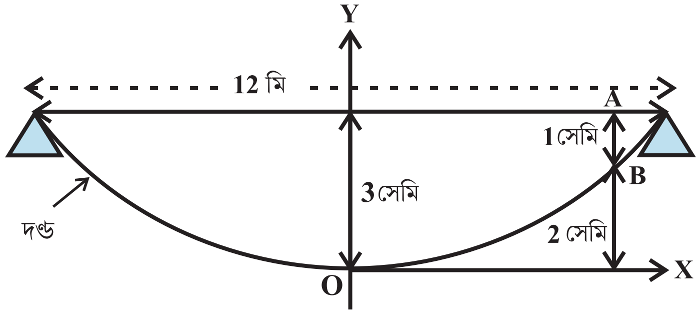
সুতরাং, $y = \pm 30$

অতএব, $AB = 2y = 2 \times 30 = 60$ সেমি

**উদাহরণ 18** একটি দণ্ডের (beam) প্রান্তদ্বয় 12 মিটার দূরবর্তী

আলম্বের উপর আছে। যেহেতু দণ্ডের ভার কেন্দ্রের দিকে কেন্দ্রীভূত হয়, তাই দণ্ডটির কেন্দ্র 3 সেমি ঝুঁকে আছে এবং পরিবর্তিত দণ্ডটির আকার হয় একটি অধিবৃত্ত। কেন্দ্র থেকে কতদূরে দণ্ডটি 1 সেমি ঝুঁকে আছে?

**সমাধান :** ধরো, শীর্ষ হল নিম্নতম বিন্দু এবং অক্ষ হল উলম্ব। ধরে নাও স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় হল চিত্র 11.34




চিত্র **11.34**

এর অনুরূপ—

অধিবৃত্তের সমীকরণের আকার হল $x^2 = 4ay$ । যেহেতু এটি $\left(6, \frac{3}{100}\right)$ বিন্দুগামী, তাই আমরা পাই $(6)^2 = 4a\left(\frac{3}{100}\right)$ অর্থাৎ, $a = \frac{36 \times 100}{12} = 300$ মি।

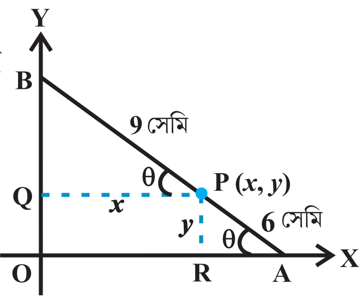
ধরো, AB হল দণ্ডটির ঝোঁক, যেটি হল $\frac{1}{100}$ মি এবং B এর স্থানাঙ্ক হল $\left(x, \frac{2}{100}\right)$ ।

সুতরাং, $$x^2 = 4 \times 300 \times \frac{2}{100} = 24$$

অর্থাৎ, $$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ মি।}$$

**উদাহরণ 19** 15 সেমি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট AB একটি দণ্ড (rod), স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের মধ্যে এরূপে অবস্থিত যে তার এটি প্রান্তবিন্দু A, $x$ অক্ষের উপর এবং অপর একটি প্রান্ত বিন্দু B, $y$ -অক্ষের উপর অবস্থিত। দণ্ডের উপর $P(x, y)$ এমন একটি বিন্দু যে AP = 6 সেমি। দেখাও যে, P বিন্দুর সঞ্চার পথ একটি উপবৃত্ত।

**সমাধান :** ধরো, AB দণ্ডটি OX এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করেছে, যা চিত্র 11.35 তে দেখানো হয়েছে এবং এটির উপর $P(x, y)$ এমন একটি বিন্দু যে, AP = 6 সেমি




চিত্র **11.35**

যেহেতু, AB = 15 সেমি, সুতরাং আমরা পাই

PB = 9 সেমি।

P থেকে $y$-অক্ষ ও $x$-অক্ষের উপর যথাক্রমে PQ এবং PR লম্ব।

$\Delta$ PBQ, থেকে পাওয়া যায়, $\cos\theta = \frac{x}{9}$

$\Delta$ PRA, থেকে পাওয়া যায়, $\sin\theta = \frac{y}{6}$

যেহেতু $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$$

বা, $$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$$

অতএব, P এর সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত।

### *অধ্যায় 11 এর বিবিধ অনুশীলনী (Miscellaneous Exercise on Chapter 11)*

**1.** যদি একটি অধিবৃত্তাকার প্রতিফলকের ব্যাস 20 সেমি এবং গভীরতা 5 সেমি হয়, তবে নাভি নির্ণয় করো।

**2.** উল্লম্ব অক্ষ বিশিষ্ট একটি চাপ অধিবৃত্তাকার। চাপটি 10 মি উচ্চতা বিশিষ্ট এবং ভিতের উপর 5 মি প্রশস্ত। শীর্ষ থেকে 2 মি দূরত্বে অধিবৃত্তটি কতটুকু প্রশস্ত হবে?

**3.** একটি সর্বসম ভারি ঝুলন্ত সেতুর কাছি (cable) অধিবৃত্তাকারভাবে ঝোলানো আছে। যানবাহন চলাচলের পথটি অনুভূমিক এবং 100 মি লম্বা, যেটি কতগুলো উলম্ব তারের (wires) সাহায্যে কাছির সাথে সংযুক্ত। এখানে দীর্ঘতম তারটি 30 মি এবং ক্ষুদ্রতম তারটি 6 মি। মধ্যবিন্দু থেকে 18 মি. পথটির সাথে যুক্ত সাহায্যকারী উল্লম্ব তারের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

**4.** একটি ধনুক অর্ধ-উপবৃত্তাকার। এটি কেন্দ্র 8 মি প্রশস্ত এবং 2 মি উঁচু। এক প্রান্ত থেকে 1.5 মি দূরবর্তী বিন্দুতে ধনুকের উচ্চতা নির্ণয় করো।

**5.** 12 সেমি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি দণ্ড (rod) এরূপে গতিশীল যে তার প্রান্তদ্বয় সর্বদা স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করে। $x$-অক্ষের স্পর্শ বিন্দু থেকে 3 সেমি দূরবর্তী, দণ্ডের উপর অবস্থিত P বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

**6.** অধিবৃত্ত $x^2 = 12y$ এর শীর্ষ এবং নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

**7.** একজন ব্যক্তি একটি দৌড়পথে দৌড়ানোর সময় লক্ষ করলেন যে দুটি নির্দিষ্ট পতাকাদণ্ড থেকে তাঁর যে কোনো অবস্থানের দূরত্বের সমষ্টি 10 মি এবং পতাকাদণ্ড দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 মি। ঐ ব্যক্তির দৌড়পথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

**8.** অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর অন্তর্লিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার একটি শীর্ষ অধিবৃত্তের শীর্ষে অবস্থিত। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

## সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে নিম্নলিখিত ধারণা এবং সিদ্ধান্তগুলো অধ্যয়ন করেছি।

- একটি বৃত্ত হল একটি সমতলের উপর অবস্থিত সেই সব বিন্দুর সেট যেগুলো ঐ সমতলের একটি স্থির বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।
- একটি বৃত্তের সমীকরণ, যার কেন্দ্র $(h, k)$ এবং ব্যাসার্ধ $r$ হল
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 ।$$
- একটি অধিবৃত্ত হল একই সমতলের উপর অবস্থিত সেইসব বিন্দুর সেট্ যেগুলো ঐ সমতলে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট রেখা এবং একটি স্থির বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।
- যে অধিবৃত্তের নাভি $(a, 0)$ $a > 0$ এবং নিয়ামক $x = -a$ তার সমীকরণ হল
$$y^2 = 4ax.$$
- অধিবৃত্তের নাভিলম্ব হল অধিবৃত্তের নাভিগামী, অক্ষের উপর লম্ব, রেখাংশ যার প্রান্তবিন্দু দুটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত।
- অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$ ।
- একটি *উপবৃত্ত* হল একই সমতলে অবস্থিত সেইসব বিন্দুর সেট, যেগুলো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে দূরত্বের সমষ্টি একটি ধ্রুবক হয়।
- যে উপবৃত্তের নাভিদ্বয় $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত তার সমীকরণ হল $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ।
- উপবৃত্তের নাভিলম্ব হল যে কোনো নাভিগামী, পরাক্ষের উপর লম্ব রেখাংশ যার প্রান্তবিন্দুদ্বয় উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।
- উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a}$ ।
- উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা হল উপবৃত্তের কেন্দ্র থেকে যে কোনো একটি নাভির দূরত্ব এবং কেন্দ্র থেকে যে কেনো শীর্ষের দূরত্বের অনুপাত।
- একটি পরাবৃত্ত হল একই সমতলে অবস্থিত সব বিন্দুর সেট, যাদের দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে দূরত্বের অন্তর একটি ধ্রুবক হয়।
- পরাবৃত্তের সমীকরণ, যার নাভিদ্বয় $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত তা হল : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- পরাবৃত্তের যে কোনো নাভিগামী এবং তীর্যক অক্ষের উপর লম্ব রেখাংশ যার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত সেই রেখাংশকে পরাবৃত্তের নাভিলম্ব বলে।

- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের নাভিলম্ব দৈর্ঘ্য হল $\dfrac{2b^2}{a}$ ।

- পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা হল তার কেন্দ্র থেকে যে কোনো নাভির দূরত্ব এবং কেন্দ্র থেকে যে কোনো একটি শীর্ষের দূরত্বের অনুপাত।

## *ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট*

জ্যামিতি হল গণিতের সবচেয়ে প্রাচীন শাখাগুলোর মধ্যে একটি। গ্রিক জ্যামিতিবিদেরা অনেক বক্রের বৈশিষ্টের অনুসন্ধান করেছিলেন যাদের তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক গুরুত্ব রয়েছে। ইউক্লিড প্রায় 300 খ্রিঃ পূর্বাব্দে জ্যামিতির উপর তাঁর বক্তব্য লিপিবদ্ধ করেন। তিনিই হলেন প্রথম ব্যক্তি যিনি বাস্তব অভিজ্ঞতার ভিত্তিতে প্রাপ্ত স্বতঃসিদ্ধের উপর ভিত্তি করে জ্যামিতিক চিত্রকে সংগঠিত করেন। প্রাচীন ভারতীয় ও গ্রিকরাই জ্যামিতির প্রাথমিক চর্চা শুরু করেন। যাদের ঐ সময় বীজগণিতের নিয়মের প্রয়োগের প্রয়োজন হয় নি। জ্যামিতি বিষয়ে সমন্বয়ী পদ্ধতির সর্বপ্রথম প্রয়োগ করেন ইউক্লিড যা *সুল্বসূত্র* (*Sulbasutra*) ইত্যাদিতে পাওয়া যায় এবং প্রায় 1300 বছর এটি চলতে থাকে। 200 খ্রিঃ পূর্বাব্দে Apollonius একটি গ্রন্থ লেখেন যার নাম '*The Conic*', সেটি হল শুধুমাত্র শঙ্কুচ্ছেদের উপর অনেক উল্লেখযোগ্য আবিষ্কারের সংকলন যা অষ্টাদশ শতাব্দী পর্যন্ত অপ্রতিদ্বন্দ্বী থাকে।

Rene Descartes (1596-1650) এর নামে আধুনিক বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতিকে '*কার্তেজিয়*' (*Cartesian*) বলা হয় যার সার্থকতা 'La Geometrie' নামে 1637 খ্রিঃ প্রকাশিত হয়েছিল। কিন্তু বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির মূল নীতি ও পদ্ধতি আগেই Pierre de Fermat (1601-1665) আবিষ্কার করে ফেলেছিলেন। দুর্ভাগ্যবশত, Fermat এর লেখা গ্রন্থ *Ad Locus Planos et So LIDOS Isagoge* (সমতল ও ঘন-এর সঞ্চারপথের সূচনা) তার মৃত্যুর পর 1679খ্রিঃ প্রকাশিত হয়েছিল। এই জন্যই Descartes-কে বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির অদ্বিতীয় উদ্ভাবক হিসাবে গণ্য করা হয়।

Isaac Barrow কার্তেজিয় পদ্ধতি ব্যবহারে অনিচ্ছুক ছিলেন। Newton বক্রের সমীকরণ নির্ণয় করার জন্য অজ্ঞাত সহগ পদ্ধতির প্রয়োগ করেন। তিনি ঐ সময় বিভিন্ন ধরনের স্থানাঙ্ক ব্যবহার করেন যেমন মেরু (polar) এবং দ্বিমেরু (bipolar) স্থানাঙ্ক । Leibnitz প্রথম ব্যবহার করেন 'ভূজ' (*abscissa*), 'কোটি' (ordinate) এবং 'স্থানাঙ্ক' (coordinate) এই পদগুলো। L' Hospital (প্রায় 1700) বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির উপর একটি গুরুত্বপূর্ণ পাঠ্যপুস্তক লিখেছিলেন।

Clairaut (1729) সর্বপ্রথম দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র দিয়েছিলেন যা ছিল এলোমোলো আকারে। তিনি রৈখিক সমীকরণের ছেদিতাংশ রূপও দিয়েছিলেন। Cramer (1750), দুটি অক্ষের সাধারণ

ব্যবহার করেন নিম্নরূপে বৃত্তের সমীকরণটি গঠন করেন।

$$(y-a)^2 + (b-x)^2 = r$$

তিনি ঐ সময়কালে বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির সর্বোত্তম উদ্ভাবক ছিলেন। Monge (1781) আধুনিক 'বিন্দু-প্রবণতা' আকারে সরলরেখার সমীকরণ নিম্নরূপে দিয়েছিলেন—

$$y - y' = a\,(x - x')$$

এবং দুটি সরলরেখার লম্ব হওয়ার শর্ত দিয়েছিলেন $aa' + 1 = 0$ ।

S.F. Lacroix (1765–1843) ছিলেন একজন প্রসিদ্ধ পাঠ্য পুস্তক লেখক, বিন্দু বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতিতে তার অবদান বিক্ষিপ্ত ভাবে দেখা যায়। তিনি নিম্নরূপে সরলরেখা সমীকরণ 'দুই-বিন্দু' (two-point) আকার উদ্ভাবন করেন—

$$y-\beta = \frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)$$

এবং $(\alpha, \beta)$ থেকে $y = ax + b$ এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $\dfrac{(\beta - a\alpha - b)}{\sqrt{1+a^2}}$ হবে তা বলেছেন। দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয়ের তাঁর সূত্রটি ছিল $\tan\theta = \left(\dfrac{a'-a}{1+aa'}\right)$। এটি অবশ্যই আশ্চর্যজনক বিষয় যে বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির আবিষ্কারের পর একজনকে 150 বছর অপেক্ষা করতে হয়েছিল। প্রয়োজনীয় প্রাথমিক সূত্রগুলো আবিষ্কারের জন্য। 1818 খ্রিস্টাব্দে C. Lame যিনি একজন নির্মাণ প্রকৌশলী বলেন যে, দুটি বিন্দুপথ $E = 0$ এবং $E' = 0$ এর ছেদবিন্দুগামী বক্র হল $mE + m'E' = 0$।

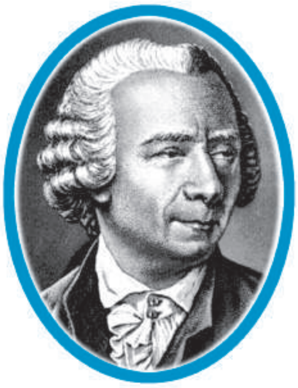
বিজ্ঞান এবং গণিত উভয়েরই অনেক গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কার শঙ্কুচ্ছেদের সাথে সম্পর্কযুক্ত। গ্রিকরা, বিশেষ ভাবে Archimedes (287–212 খ্রিঃ পূর্ব) এবং Apollonius ( 200 খ্রিঃ পূর্ব) শঙ্কুচ্ছেদ নিয়ে গবেষণা করেন তাদের নিজেদের মতো করে। বর্তমানে এই বক্রগুলো বহির্বিশ্বের অনুসন্ধানে এবং পারমাণবিক কণাগুলোর বৈশিষ্ট্যগত গবেষণায় গুরুত্বপূর্ণ হাতিয়ার হিসাবে কাজ করে।

অধ্যায় 12

# ত্রিমাত্রিক জ্যামিতির পরিচয়
# INTRODUCTION TO THREE DIMENSIONAL GEOMETRY

❖*Mathematics is both the queen and the hand-maiden of all sciences – E.T. BELL*❖

## 12.1. ভূমিকা ঃ



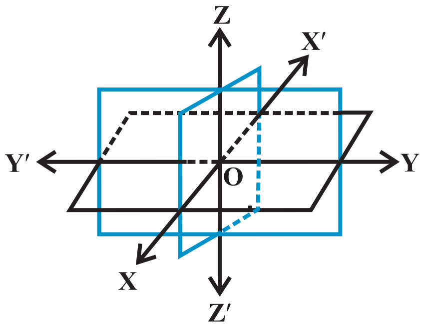
**Leonhard Euler**
**(1707-1783)**

তোমরা মনে করে দেখো যে-কোনো তলে একটি বিন্দুর অবস্থান নির্দেশের জন্য ওই তলে পরস্পর লম্বাভাবে ছেদ করে এমন দুটি রেখার প্রয়োজন হয়। এই রেখাগুলোকে বলা হয় *স্থানাঙ্ক অক্ষ* এবং দুটি সংখ্যাকে বলা হয় *অক্ষের সাপেক্ষে বিন্দুর স্থানাঙ্ক*। বাস্তব জীবনে, শুধুমাত্র একটি তলে অবস্থিত বিন্দুর অবস্থান নিয়ে আমরা আলোচনা করি না। উদাহরণস্বরূপ ধরা ধাক ত্রিমাত্রিক দেশে একটি বলকে নিক্ষেপ করা হলে বিভিন্ন সময়ে অবস্থান অথবা একস্থান থেকে অন্য স্থানে একটি বিমানে চলাকালীন এর অবস্থান বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন হয়।

একইভাবে, যদি আমরা একটি ঘরের ছাদ থেকে ঝুলন্ত একটি বৈদ্যুতিক বাল্বের সর্বনিম্ন অবস্থান অথবা ছাদ থেকে ঝোলানো পাখার অবস্থান নির্ণয় করার জন্য পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দেওয়াল থেকে এদের দূরত্বই যথেষ্ট নয়, এরা ভূমি থেকে কতটুকু উচ্চতায় আছে সেটা জানাও প্রয়োজন। সুতরাং আমাদের কেবলমাত্র দুটি নয়, পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত তিনটি তল থেকে লম্বদূরত্বের সাংখ্যমান দরকার সেই তিনটি তল হল ঘরের মেঝে এবং ঘরটির দুটি সন্নিহিত দেওয়াল। তিনটি সাংখ্যমান তিনটি দূরত্বকে প্রকাশ করেছে। যাদের *তিনটি স্থানাঙ্ক তলের সাপেক্ষে ঐ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক* বলা হয়। সুতরাং ত্রিমাত্রিক দেশে একটি বিন্দুর তিনটি স্থানাঙ্ক আছে। এই অধ্যায়ে আমরা ত্রিমাত্রিক দেশে জ্যামিতির মৌলিক ধারণা নিয়ে আলোচনা করব। *

* ত্রিমাত্রিক জ্যামিতির বিভিন্ন প্রকারের কার্যকারিতা সম্পর্কে জানার জন্য ***" A hand book for designing Mathematics Laboratory in School",*** NCERRT, 2005 পুস্তকটি পড়ার জন্য সুপারিশ করা হচ্ছে।

## 12.2 ত্রিমাত্রিক দেশে স্থানাঙ্ক অক্ষ এবং স্থানাঙ্কতল : (Co-rodinate Axes and Co-ordinate Planes in three dimensional space)

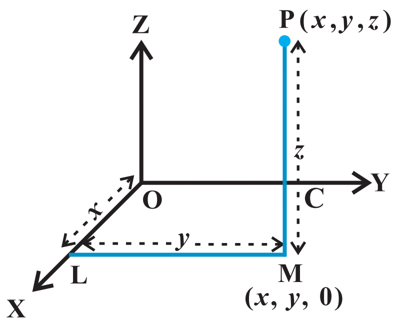


চিত্র 12.1

ধরা যাক, 12.2 চিত্রে পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করছে। এই তিনটি সমতল X′OX, Y′OY এবং Z′OZ সরলরেখা বরাবর ছেদ করে তাদের যথাক্রমে X-অক্ষ, Y-অক্ষ ও Z-অক্ষ বলা হয়। আমরা লক্ষ করি যে এই সরলরেখাগুলো পরস্পর লম্ব। এই তিনটি সরলরেখা *লম্ব স্থানাঙ্ক তন্ত্র (recttangular Co-ordinate Systems)* গঠন করে। XOY, YOZ এবং ZOX সমতল তিনটিকে যথাক্রমে XY- তল YZ- তল এবং ZX- তল বলা হয়, তারা স্থানাঙ্ক তল হিসেবে পরিচিত। আমরা XOY সমতলে কাগজের তল হিসেবে নিতে পারি এবং Z′OZ সরলরেখাটি XOY তলের উপর লম্ব। কাগজের তল যদি অনুভূমিক (Horizontal) হয় তাহলে Z′OZ সরলরেখাটি হবে উল্লম্ব (Vertical). XY সমতল থেকে উল্লম্বভাবে উপরের দিকে, অর্থাৎ OZ′ এর অভিমুখে দূরত্ব পরিমাপকে ধনাত্মক এবং নীচের দিকে অর্থাৎ OZ অভিমুখে দূরত্ব পরিমাপকে ঋণাত্মক ধরা হবে। একইভাবে, ZX সমতলের ডানদিকে OY বরাবর দূরত্বকে ধনাত্মক ধরা হয় এবং ZX সমতলে বামদিকে OY′ বরাবর দূরত্বকে ঋণাত্মক ধরা হয়। আবার YZ সমতলের সামনের দিকে OX অভিমুখের দূরত্ব ধনাত্মক ও OX′ অভিমুখের দূরত্ব ঋণাত্মক। O বিন্দুকে স্থানাঙ্কতন্ত্রের *মূলবিন্দু (Origin)* বলে। স্থানাঙ্ক অক্ষ তিনটি দিয়ে ত্রিমাত্রিক দেশ আটটি ভাগে বিভক্ত হয়, প্রতিটি ভাগকে একটি অষ্টমাংশ বলে।

XOYZ, X′OYZ, X′OY′Z, X′OY′Z, XOY′Z, XOYZ′, X′OY′Z′ এবং XOY′Z′ এই আটটি অষ্টমাংশকে যথাক্রমে I, II, III, IV, V, VI, VII এবং VIII দিয়ে সূচিত করা হয়।

## 12.3 ত্রিমাত্রিক দেশে যে কোনো একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (Co-ordinates of a print in space)



চিত্র 12.2

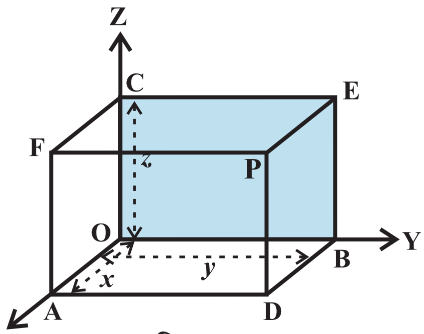
স্থানাঙ্ক অক্ষ, স্থানাঙ্ক তল এবং মূলবিন্দু দিয়ে গঠিত একটি নির্দিষ্ট স্থানাঙ্ক তন্ত্রে কীভাবে ত্রিমাত্রিক দেশে একটি বিন্দু (x, y, z) এই তিনটি স্থানাঙ্ক সহযোগে প্রকাশ করা যায় তা ব্যাখ্যা করব এবং বিপরীতক্রমে তিনটি প্রদত্ত সংখ্যাত্রয়ী (x, y, z) কে কীভাবে আমরা ত্রিমাত্রিক দেশে স্থাপন করতে পারি তা আলোচনা করব।

ত্রিমাত্রিক দেশে প্রদত্ত একটি বিন্দু P আমরা XY তলের উপর PM লম্ব টানি যেখানে M হল লম্বের পাদবিন্দু (চিত্র : 12.3) তাহলে M বিন্দু থেকে X অক্ষের উপর ML লম্ব টানা হলে এটিট L বিন্দুতে মিলিত হয়। ধরা যাক OL, LN, ML যথাক্রমে x, y, z তাহলে x, y এবং z কে বলা হবে ত্রিমাত্রিক দেশে P বিন্দুর যথাক্রমে x, y এবং z *স্থানাঙ্ক*।

চিত্র 12.3 তে আমরা লক্ষ্য করি যে P (x, y, z) বিন্দুটি XOYZ অষ্টমাংশে অবস্থিত এবং সকল x, y, z ধনাত্মক। যদি P বিন্দুটির অবস্থান অন্য অষ্টমাংশে হয় তবে x, y এবং z এর চিহ্ন অষ্টমাংশ অনুসারে

পরিবর্তিত হবে। সুতরাং ত্রিমাত্রিক দেশে ক্রমবন্ধ বাস্তবত্রয়ী (x, y, z) প্রতিটি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক সূচিত করে। বিপরীতক্রমে প্রদত্ত কোনো ত্রয়ী (x, y, z) এর ক্ষেত্রে আমরা প্রথমে x এর সাপেক্ষে x অক্ষের উপর L বিন্দুকে স্থির করি তারপর XY তলের উপর M বিন্দুর অবস্থান এরূপ যে (x, y) হল XY তলে M বিন্দুর স্থানাঙ্ক। লক্ষ্য কর যে, LM, x অক্ষের উপর লম্ব অথবা Y অক্ষের সমান্তরাল। M বিন্দুতে পৌঁছতে হলে XY তলের উপর MP লম্ব আঁকা হল এবং এটা Z এর সাপেক্ষে P বিবন্দুর অবস্থানকে নির্দেশ করে। এভাবে প্রাপ্ত P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল (x, y, z) সুতরাং ত্রিমাত্রিক দেশে বিন্দুগুলো এবং ক্রমবন্ধ বাস্তব সংখ্যাত্রয়ী (x, y, z) এর মধ্যে একটি এক-এক সম্পর্ক বিদ্যমান।

বিকল্পরূপে, ত্রিমাত্রিক দেশে P বিন্দু দিয়ে অক্ষতলের সমান্তরাল করে তিনটি তল অঙ্কন করা হল যা x অক্ষ, y অক্ষ এবং z অক্ষকে যথাক্রমে A, B এবং C বিন্দুতে মিলিত হয়। (চিত্র : 12.3)।



চিত্র 12.3

ধরা যাক, OA = x এবং OB = y তাহলে OC = z বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে x, y এবং z এবং আমরা লিখব P (x, y, z)। বিপরীত ক্রমে প্রদত্ত x, y এবং z হবে তিনটি অক্ষ স্থানাঙ্কের উপর A, B এবং C এর অবস্থান। A, B এবং C বিন্দু দিয়ে অবস্থান। A, B এবং C বিন্দু দিয়ে যথাক্রমে YZ- তল, ZX- তল, এবং XY- তল এর সমান্তরাল তল অঙ্কন করি। তিনটি তল যেমন ADPF, BDPE এবং CEPF স্পষ্টই একটি বিন্দু P তে ছেদ করে।

যেখানে ক্রমবন্ধ সংখ্যাত্রয়ী (x, y, z) P বিন্দুটিকে নির্দেশ করে। আমরা লক্ষ করি যে ত্রিমাত্রিক দেশে যদি P (x, y, z) যে কোন একটি বিন্দু হয় তাহলে x, y, z হল যথাক্রমে YZ, ZX এবং XY তলগুলো থেকে লম্ব দূরত্ব।

**দ্রষ্টব্য** O মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (o, o, o)। x অক্ষের উপর কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে (x, o, o) এবং YZ তলে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে (o, y, z).

**মন্তব্য** কোনো বিন্দু কোন্ অষ্টমাংশে অবস্থিত তার স্থানাঙ্কের চিহ্ন নির্ধারণ করব। আটটি অষ্টমাংশ স্থানাঙ্কের চিহ্ন নিচের সারণিতে দেওয়া হল :

| অষ্টমাংশ / স্থানাঙ্ক | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | + | – | – | + | + | – | – | + |
| $y$ | + | + | – | – | + | + | – | – |
| $z$ | + | + | + | + | – | – | – | – |

**উদাহরণ 1** : চিত্র 12.1 -তে যদি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 4, 5) হয়, তবে, F বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

**সমাধান** : F বিন্দুর জন্য OY অক্ষ বরাবর দূরত্বের পরিমাপ শূন্য। সুতরাং F বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 0, 5)

**উদাহরণ 2** : (-3, 1, 2) এবং (-3, 1, 2) বিন্দুদ্বয় কোন্ অষ্টমাংশে অবস্থিত নির্ণয় করো।

**সমাধান** : 12.1 সারণি থেকে (-3, 1, 2) বিন্দুটি II নং অষ্টমাংশে অবস্থিত এবং (-3, 1, 2) বিন্দুটি VI নং অষ্টমাংশে অবস্থিত।

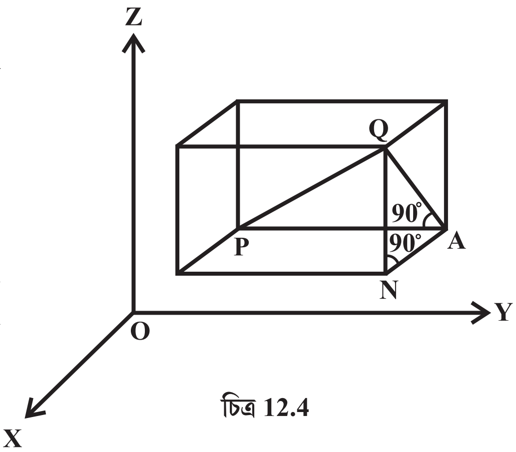
## অনুশীলনী — 12.1

1. x -অক্ষের উপর অবস্থিত যে-কোনো বিন্দুর y- স্থানাঙ্ক এবং z- স্থানাঙ্ক কত?
2. XZ সমতলের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুর Y- স্থানাঙ্ক সম্পর্কে তুমি কী বলতে পার?
3. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলো কোন্ অষ্টমাংশে অবস্থিত তার নাম লেখো :
   (1, 2, 3), (4, -2, 3), (4, -2, -5), (4, 2, -5), (-4, 2, -5), (-4, 2, 5), (-3, -1, 6), (2, -4, -7)
4. শূন্যস্থান পূরণ করো :
   (i) x অক্ষ এবং y অক্ষ দুটি একত্রে একটি সমতল তৈরি করে, ঐ তলকে বলা হয় _______।
   (ii) XY সমতলে অবস্থিত যে-কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের সাধারণ আকার _______ হবে।
   (iii) স্থানাঙ্ক তল ত্রিমাত্রিক দেশকে _______ অষ্টমাংশে বিভক্ত করে।

## 12.4 দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two points)

আমরা পূর্বে দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় সম্পর্কে অধ্যয়ন করেছি। এখন আমরা এটাকে ত্রিমাত্রিক পদ্ধতিতে সম্প্রসারণ করব।

ধরা যাক, সমকৌণিক অক্ষ OX, OY এবং OZ এর সাপেক্ষে দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু P $(x_1, y_1, z_1)$ এবং Q $(x_2, y_2, z_2)$। P এবং Q বিন্দু দিয়ে স্থানাঙ্ক সমতলের সমান্তরাল তল আঁকা হলে তলগুলো একটি সমকোণী চৌপল গঠন করে যার একটি কর্ণ PQ (চিত্র : 12.4)




চিত্র 12.4

এখন যেহেতু ∠PAQ একটি সমকোণ, তাহলে PAQ, ত্রিভুজ থেকে পাই

$$PQ^2 = PA^2 + AQ^2 \qquad \dots (1)$$

আবার ANQ সমকোণী ত্রিভুজে ∠ANQ একটি সমকোণ

সুতরাং $AQ^2 = AN^2 + NQ^2$ ... (2)

(1) নং এবং (2) নং থেকে আমরা পাই

$$PQ^2 = PA^2 + AN^2 + NQ^2$$

এখন $PA = y_2 - y_1$, $AN = x_2 - x_1$ এবং $NQ = z_2 - z_1$

অতএব $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

সুতরাং $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

এটাই হচ্ছে দুটি বিন্দু $(x_1, y_1, z_1)$ এবং $(x_2, y_2, z_2)$ এর মধ্যে দূরত্ব।

বিশেষভাবে, যদি $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ অর্থাৎ P বিন্দুটি মূলবিন্দু O হলে $OQ = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$

যা থেকে যে-কোনো বিন্দু Q $(x_2, y_2, z_2)$ এবং মূলবিন্দু O এর মধ্যবর্তী দূরত্ব পাওয়া যায়।

**উদাহরণ 3 :** P(1, –3, 4) এবং Q (– 4, 1, 2). বিন্দু দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো।

**সমাধান :** P (1,–3, 4) এবং ... বিন্দু দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব Q (– 4, 1, 2) হলে

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2+(1+3)^2+(2-4)^2}$$
$$= \sqrt{25+16+4}$$
$$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ একক}$$

**উদাহরণ 4 :** দেখাও যে P (–2, 3, 5), Q (1, 2, 3) এবং R (7, 0, –1) বিন্দু তিনটি সমরেখ।

**সমাধান :** আমরা জানি যে বিন্দুগুলোকে সমরেখ বলা হয় যদি তারা একই রেখাতে অবস্থিত হয়।

এখন $PQ = \sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2}$

$$= \sqrt{9+1+4}$$
$$= \sqrt{14}$$

$$QR = \sqrt{(7-1)^2+(0-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

এবং $PR = \sqrt{(7+2)^2+(0-3)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

অতএব, $PQ + QR = PR$

সুতরাং P, Q এবং R সমরেখ।

**উদাহরণ 5 :** A (3, 6, 9), B (10, 20, 30) এবং C (25, -41, 5) বিন্দুগুলো একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হতে পারে কি?

**সমাধান :** দূরত্ব সূত্র থেকে আমরা পাই,

$$AB^2 = (10-3)^2 + (20-6)^2 + (30-9)^2$$
$$= 49 + 196 + 441 = 686$$

$$BC^2 = (25-10)^2 + (-41-20)^2 + (5-30)^2$$
$$= 225 + 3721 + 625 = 4571$$

$CA^2 \quad = (3 - 25)^2 + (6 + 41)^2 + (9 - 5)^2$

$\quad\quad = 484 + 2209 + 16 = 2709$

অতএব, $\quad CA^2 + AB^2 \neq BC^2$.

সুতরাং, ত্রিভুজ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ নয়।

**উদাহরন 6 :** P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো যদি $PA^2 + PB^2 = 2k^2$ হয়, যেখানে A এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4, 5) এবং (-1, 3, -7)

**সমাধান :** ধরা যাক, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y, z)

এখানে $\quad PA^2 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2$

$\quad PB^2 = (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 7)^2$

প্রদত্ত শর্তানুসারে $PA^2 + PB^2 = 2k^2$,

আমরা পাই, $\quad (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 + (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 7)^2 = 2k^2$

অর্থাৎ, $\quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z = 2k^2 - 109$.

## অনুশীলনী – 12.2

1. নিম্নলিখিত বিন্দুযুগলের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করো

   (i) (2, 3, 5) এবং (4, 3, 1) $\quad$ (ii) (–3, 7, 2) এবং (2, 4, –1)

   (iii) (–1, 3, – 4) এবং (1, –3, 4) $\quad$ (iv) (2, –1, 3) এবং (–2, 1, 3).

2. দেখাও যে (–2, 3, 5), (1, 2, 3) এবং (7, 0, –1) বিন্দুগুলো সমরেখ

3. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলো যাচাই করো:

   i). (0, 7, –10), (1, 6, – 6) এবং (4, 9, -6) বিন্দুগুলো একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

   ii). (0, 7, 10), (–1, 6, 6) এবং (–4, 9, 6) বিন্দুগুলো একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

   iii). (–1, 2, 1), (1, –2, 5), (4, –7, 8) এবং (2, -3, 4) বিন্দুগুলো একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

4. (1– 2– 3) এবং (3– 2– 1) বিন্দু দুটি থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

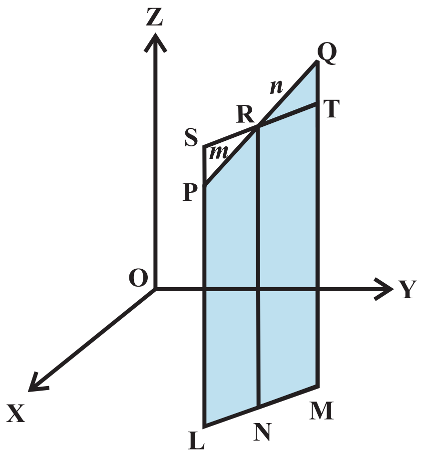
5. A (4, 0, 0) এবং B (-4, 0, 0) বিন্দু থেকে কোনও বিন্দুর দূরত্বের সমষ্টি 10 হলে, ওই বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

## 12.5 বিভাজন সূত্র (Section Fromula) :

দ্বিমাত্রিক জ্যামিতিতে আমরা শিখেছি একটি রেখাংশকে কোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে প্রদত্ত অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত করলে কীভাবে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যায়। এখন আমরা ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিতে এটির সম্প্রসারণ করব নিম্নলিখিত ভাবে :

ধরা যাক, প্রদত্ত বিন্দুগুলো হল P (x, y, z) এবং Q (x, y, z) মনে করো R (x, y, z) বিন্দুটি PQ রেখাংশকে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে। PL, QM এবং RN, XY- সমতলের উপর লম্ব আঁকো।

স্পষ্টতই PL || RN || QM এবং এদের পাদ বিন্দুগুলো XY- তলের উপর অবস্থিত। বিন্দুগুলো L, M এবং N একটি রেখার উপর অবস্থিত হবে যা, PL, RN এবং QM এর ধারকতল এবং XY- তলের ছেদ। R বিন্দু দিয়ে LM সরলরেখার সমান্তরাল করে ST সরলরেখা আঁকা হল। ST সরলরেখাটি S বিন্দুতে LP রেখাকে বহির্বিভক্ত করেছে এবং T বিন্দুতে MQ রেখাকে আর্ন্তবিভক্ত করেছে চিত্র 12.5 তে দেখানো হয়েছে।



চিত্র 12.5

আবার লক্ষ কর যে চতুর্ভুজ LNRS এবং NMTR দুটি সামান্তরিক।

PSR এবং QTR ত্রিভুজটি দুটি সদৃশ।

সুতরাং $\dfrac{m}{n} = \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{SP}{QT} = \dfrac{SL - PL}{QM - TM} = \dfrac{NR - PL}{QM - NR} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z}$

এ থেকে বোঝা যায় $z = \dfrac{mz_2 + nz_1}{m+n}$

একই ভাবে, XZ এবং XZ তলের উপর লম্ব আঁকা হলে আমরা পাই

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \quad \text{এবং} \quad x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

সুতরাং, P $(x_1, y_1, z_1)$ এবং Q$(x_2, y_2, z_2)$ দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে m : n অনুপাতে R বিন্দু অর্ন্ত বিভক্ত করলে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$$

যদি R বিন্দুটি PQ রেখাংশকে m : n অনুপাতে বর্হিবিভক্ত করে তাহলে R এর স্থানাঙ্কে n এর পরিবর্তে -n বসিয়ে পাওয়া যায় তবে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$

**ক্ষেত্র ১** মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক : এক্ষেত্রে R বিন্দুটি RQ রেখার মধ্যবিন্দু হলে m : n = 1 : 1 তাহলে

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{এবং} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

এই স্থানাঙ্কগুলো হল P $(x_1, y_1, z_1)$ এবং Q $(x_2, y_2, z_2)$ সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক।

ক্ষেত্র 2 R বিন্দুটি RQ রেখাংশকে k : 1 অনুপাতে বিভক্ত করলে $k=\dfrac{m}{n}$ বসিয়ে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় তা নিম্নে দেওয়া হল $\left(\dfrac{kx_2+x_1}{1+k},\ \dfrac{ky_2+y_1}{1+k},\ \dfrac{kz_2+z_1}{1+k}\right)$

সাধারণভাবে, এই ফলাফল ব্যবহার করে দুটি প্রদত্ত বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের উপর যে-কোনো সাধারণ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 7 : এমন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যা (1, -2, 3) এবং (3, 4, -5) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে (i) অন্তর্বিভক্ত এবং (ii) বহির্বিভক্ত করে।

সমাধান : (i) ধরা যাক, P (x, y, z) বিন্দুটি A (1, -2, 3) এবং B (3, 4, -5) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে

সুতরাং $x=\dfrac{2(3)+3(1)}{2+3}=\dfrac{9}{5},\quad y=\dfrac{2(4)+3(-2)}{2+3}=\dfrac{2}{5},\quad z=\dfrac{2(-5)+3(3)}{2+3}=\dfrac{-1}{5}$

সুতরাং নির্ণেয় বিন্দুটির বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{9}{5},\dfrac{2}{5},\dfrac{-1}{5}\right)$

(ii) মনে করো P (x, y, z) বিন্দুটি A (1, -2, 3) এবং B (3, 4, -5) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে

তাহলে $x=\dfrac{2(3)+(-3)(1)}{2+(-3)}=-3,\ y=\dfrac{2(4)+(-3)(-2)}{2+(-3)}=-14,\ z=\dfrac{2(-5)+(-3)(3)}{2+(-3)}=19$

সুতরাং নিয়ে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (-3, -14, 19)

উদাহরণ 8 : বিভাজন সূত্র প্রয়োগ করে প্রমাণ করো যে, (-4, 6, 10), (2, 4, 6) এবং (14, 0, -2) বিন্দুত্রয় সমরেখ।

সমাধান : ধরা যাক, প্রদত্ত বিন্দুগুলো A (-4, 6, 10), B (2, 4, 6) এবং C (14, 0, -2)। মনে করো P বিন্দুটি AB রেখাকে $k$ : 1 অনুপাতে বিভক্ত ককরে তবে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{2k-4}{k+1},\ \frac{4k+6}{k+1},\ \frac{6k+10}{k+1}\right)$$

চলো আমরা পরীক্ষা করে দেখি $k$ এর কোনো মানের জন্য P বিন্দুটি C এর উপর সমাপিতত হয় কিনা।

$\dfrac{2k-4}{k+1}=14$ বসিয়ে আমরা পাই $k=-\dfrac{3}{2}$

যখন $k=-\frac{3}{2}$ তখন $\frac{4k+6}{k+1}=\frac{4(-\frac{3}{2})+6}{-\frac{3}{2}+1}=0$

এবং $$\frac{6k+10}{k+1}=\frac{6(-\frac{3}{2})+10}{-\frac{3}{2}+1}=-2$$

সুতরাং C (14, 0, -2) বিন্দুটি P এর মত AB রেখাকে 3 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে। সুতরাং A, B এবং C সমরেখ।

**উদাহরণ 9 :** কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ এবং $(x_3, y_3, z_3)$, হলে এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

**সমাধান :** ধরা যাক, ABC একটি ত্রিভুজ। এর শীর্ষবিন্দুগুলো A, B, C যার স্থানাঙ্কগুলো যথাক্রমে $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ এবং $(x_3, y_3, z_3)$,। মনে করো, D বিন্দুটি BC এর মধ্যবিন্দু। সুতরাং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$

ধরা যাক, G বিন্দুটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র

সুতরাং একটি মধ্যমা AD কে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে। অতএব G বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}\right)$$

বা $$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

**উদাহরণ 10 :** (4, 8, 10) এবং (6, 10, -8) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে YZ তল যে অনুপাতে বিভক্ত করে, সেটি নির্ণয় করো।

সমাধান : ধরা যাক, YZ তল (4, 8, 10) (6, 10, -8) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে P (x, y, z) বিন্দুতে $k$ : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে। তখন P বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{4+6k}{k+1}, \frac{8+10k}{k+1}, \frac{10-8k}{k+1}\right)$$

যেহেতু P বিন্দুটি YZ তলে অবস্থিত, সুতরাং x এর স্থানাঙ্ক শূন্য হবে। অর্থাৎ $\frac{4+6k}{k+1}=0$

বা $k=-\frac{2}{3}$

সুতরাং YZ তল সংযোজক রেখাংশ AB কে 2 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

## অনুশীলনী - 13.3

**1.** এমন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যা (-2, 3, 5) এবং (1, -4, 6) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে (i) 2 : 3 অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত (ii) 2 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

**2.** দেওয়া আছে P (3, 2, -4), Q (5, 4, -6) এবং R (9, 8, -10) বিন্দুগুলো সমরেখ। Q বিন্দুটি PR রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে, সেটি নির্ণয় করো।

**3.** (-2, 4, 7) এবং (3, -5, 8) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে YZ তল যে অনুপাতে বিভক্ত করে, সেটি নির্ণয় করো।

**4.** বিভাজনসূত্র প্রয়োগ করে দেখাও যে A (2, -3, 4), B (-1, 2, 1) এবং C$\left(0,\frac{1}{3},2\right)$ বিন্দুগুলো সমরেখ।

**5.** P (4, 2, -6) এবং Q (10, -16, 6) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দুগুলো সমত্রিখণ্ডিত করে তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

## *বিবিধ উদাহরণমালা*

**উদাহরণ 11 :** দেখাও যে A (1, 2, 3), B (-1, -2, -1), C (2, 3, 2) এবং D (4, 7, 6) বিন্দুগুলো একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু কিন্তু এটি আয়তক্ষেত্র নয়।

**সমাধান :** ABCD কে সামান্তরিক প্রমাণ করতে হলে বিপরীত বাহুগুলো সমান দেখাতে হবে।

$$AB=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{4+16+16}=6$$

$$BC=\sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{9+25+9}=\sqrt{43}$$

$$CD=\sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2+(6-2)^2}=\sqrt{4+16+16}=6$$

$$DA=\sqrt{(1-4)^2+(2-7)^2+(3-6)^2}=\sqrt{9+25+9}=\sqrt{43}$$

যেহেতু AB = CD এবং BC = AD,

সুতরাং ABCD একটি সামান্তরিক।

এখন, প্রমাণ করতে হবে যে ABCD আয়তক্ষেত্র নয়। এজন্য আমরা দেখাব যে AC এবং BD কর্ণদ্বয় অসমান। আমরা জানি

$$AC = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$BD = \sqrt{(4+1)^2+(7+2)^2+(6+1)^2} = \sqrt{25+81+49} = \sqrt{155}$$

যেহেতু $AC \neq BD$, ABCD আয়তক্ষেত্র নয়।

**দ্রষ্টব্য** আমরা আরও দেখাতে পারি কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এই ধর্ম ব্যবহার করে ABCD একটি সামান্তরিক)

**উদাহরণ 12 :** A (3, 4, –5) এবং B (– 2, 1, 4) বিন্দু থেকে P বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** যদি P $(x, y, z)$ এমন একটি বিন্দু যেখানে যে PA = PB হয়

এখন $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}$

বা $(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2$

বা $10x+6y-18z-29=0.$

**উদাহরণ 13 :** ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (1, 1, 1)। যদি A এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, -5, 7) এবং (-1, 7, -6) হয় হবে C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

**সমাধান :** ধরা যাক, C বিন্দুর (x, y, z) স্থানাঙ্ক এবং ভরকেন্দ্র C এর স্থানাঙ্ক (1, 1, 1) তাহলে

$\frac{x+3-1}{3}=1$, অথবা $x = 1$; $\frac{y-5+7}{3}=1$, অথবা $y = 1$; $\frac{z+7-6}{3}=1$, অথবা $z = 2$.

সুতরাং C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 1, 2)

## অধ্যায় 12 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. একটি সামান্তরিক ABCD এর তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক A (3, -1, 2), B (1, 2, -4) এবং C (-1, 1, 2) হলে সামান্তরিকের চতুর্থ শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।
2. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো A (0, 0, 6), B (0, 4, 0) এবং C (6, 0, 0) হলে মধ্যমাগুলোর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।
3. যদি PQR ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো P (2a, 2, 6), Q (-4, 3b, -10) এবং R (8, 14, 2c) এবং ভরকেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত হলে a, b, c এর মান নির্ণয় করো।
4. P (3, -2, 5) বিন্দু থেকে Y অক্ষের উপর অবস্থিত যে-কোনো একটি বিন্দুর দূরত্ব $5\sqrt{2}$ একক হলে ঐ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

**5.** P (2, -3, 4) এবং Q (8, 0, 10) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের উপর অবস্থিত R বিন্দুতে x স্থানাঙ্কটি 4 হলে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

[**ইঙ্গিত :** ধরা যাক, R বিন্দুটি PQ রেখাংশকে $k$ : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে। তাহলে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে
$$\left(\frac{8k+2}{k+1}, \frac{-3}{k+1}, \frac{10k+4}{k+1}\right)$$]

6. যদি A এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4, 5) এবং (-1, 3, 7) হলে P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর যদি $PA^2 + PB^2 = k^2$ হয়, যেখানে $k$ একটি ধ্রুবক।

## সারসংক্ষেপ

- ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিতে, কার্তেসীয় লম্ব স্থানাঙ্ক তন্ত্রে তিনটি পরস্পর লম্বরেখাকে x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং z- অক্ষ বলা হয়।
- স্থানাঙ্কতলের অক্ষযুগল তিনটি স্থানাঙ্কতল XY, YZ এবং ZX তলকে নির্দেশ করে।
- তিনটি স্থানাঙ্ক তল ত্রিমাত্রিক দেশকে আটটি ভাগে বিভক্ত করে, প্রতিটি ভাগ অষ্টমাংশ হিসেবে পরিচিত।
- ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিতে P বিন্দুর স্থানাঙ্ককে লেখা হয় সংখ্যাত্রয়ী (x, y, z) আকারে। এখানে x, y এবং z যথাক্রমে YZ, ZX এবং XY তলগুলো থেকে দূরত্ব।
- (i) x অক্ষের উপর যে-কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের আকার (x, o, o)

  (ii) y অক্ষের উপর যে-কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের আকার (o, y, o)

  (iii) z অক্ষের উপর যে-কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের আকার (o, o, z)
- দুটি বিন্দু $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব হল
  $$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
- $P(x_1 y_1 z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে R বিন্দুতে অন্ত:বিভক্ত এবং বহির্বিভক্ত করলে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে
  $$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right) \text{ এবং } \left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$
- $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

- ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ এবং $(x_3, y_3, z_3)$, হলে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হবে $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+x_3}{3}\right)$

## *ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট*

1637 সালে বিশ্লেষণ জ্যামিতির (Analytical Geometry) জনক Rene' Descartes (1596 - 1650) প্রধানত সামতলিক জ্যামিতির ক্ষেত্রে উল্লেখযোগ্য কাজ করেছিলেন। একই কথা সহযোগী আবিস্কারক Pierre Fermat (1601 - 1665) এবং La Hire (1640 - 1718) এর ক্ষেত্রেও সত্য। যদিও ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে তাঁদের কাজের পরামর্শ ছিল কিন্তু বিস্তৃত বিবরণ ছিল না। Descartes-এর ত্রিমাত্রিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক সম্পর্কে ধারণা ছিল কিন্তু এর বিকাশ সাধন করতে পারেন নি। 1715 সালে একটি চিঠিতে J. Bernoulli (1667 - 1748) Leibnitz কে ত্রিমাত্রিক সামতলিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতির পরিচিতি সম্পর্কে উল্লেখ করেছিলেন, যা আমরা আজও প্রয়োগ করে থাকি। Antoinne Parent (1666 - 1716) সালে ফ্রান্স একাডেমিতে উপস্থাপিত একটি কাগজে সর্বপ্রথম বিশ্লেষণী ঘন জ্যামিতির ধারাবাহিক বিকাশ সাধন করেছিলেন। L. Euler (1707 - 1780) 1748 সালে তার গ্রন্থ "Introduction to Geometry" এর দ্বিতীয় খণ্ডে পরিশিষ্টের পঞ্চম অধ্যায়ে ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যাতিতির ধারাবাহিক বর্ণনা করেছিলেন। উনিশ শতকের মাঝামাঝি সময়ে জ্যামিতি শাস্ত্রে তিনটির বেশিমাত্রায় সম্প্রসারিত হয় যা আইনস্টাইনের বিখ্যাত আপেক্ষিকতা বাদের দেশকাল সম্পর্কিত তত্ত্বে প্রয়োগ হয়েছিল।

অধ্যায় 13

# সীমা এবং অন্তরকলজ
# (Limits and Derivatives)

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature – WHITEHEAD* ❖

## 13.1 ভূমিকা

এই অধ্যায় হল কলনবিদ্যার পরিচিতি। কলনবিদ্যা হল গণিতের সেই শাখা যেখানে প্রধানত, সংজ্ঞার অঞ্চলের বিভিন্ন বিন্দুর পরিবর্তনে অপেক্ষকের মানের পরিবর্তনকে অধ্যয়ন করে। প্রথমে আমরা অন্তরকলজের স্বজ্ঞাত ধারণা দেব (এর প্রকৃত সংজ্ঞা না দিয়ে)। তারপর আমরা সীমার সহজ সংজ্ঞা দেব এবং কিছু সীমার বীজগণিত নিয়ে অধ্যয়ন করবো। এরপর আমরা অন্তরকলজের সংজ্ঞায় ফিরে আসবো এবং অন্তরকলজের কিছু বীজগণিত নিয়ে অধ্যয়ন করব। আমরা কিছু আদর্শ অপেক্ষকের অন্তরকলজ পাব।

স্যার আইজ্যাক নিউটন
**(1642-1727)**

## 13.2 অন্তরকলজের স্বজ্ঞাত ধারণা (Intuitive Idea of Derivatives)

ভৌতিক পরীক্ষা হতে এটা নিশ্চিত যে, উঁচু চূড়া হতে একটি বস্তুকে ছেড়ে দিলে, $t$ সেকেন্ডে বস্তুটি $4.9t^2$ মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে অর্থাৎ বস্তু দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব $s$ (মিটার), একটি সময়ের অপেক্ষক $t$ (সেকেন্ডে) হয় তবে $s = 4.9t^2$।

পাশের 13.1 সারণি থেকে বিভিন্ন সেকেন্ডের সময় অন্তরে অতিক্রান্ত দূরত্ব মিটারে পাওয়া যায় যখন একটি বস্তুকে উঁচু চূড়া থেকে ফেলা হয়।

এই রাশিতথ্য হতে, সময় $t = 2$ সেকেন্ডে, বস্তুটির বেগ নির্ণয় করাই উদ্দেশ্য। এই সমস্যায় পৌঁছানোর একটি দিক হল, $t = 2$ সেকেন্ডে সমাপ্ত হয় এরূপ বিভিন্ন সময়ের অন্তরে গড় বেগ নির্ণয় করা এবং আশা করা যায়, এগুলো $t = 2$ সেকেন্ডে বেগ নির্ণয়ে কিছুটা আলোকপাত করবে।

$t = t_1$ এবং $t = t_2$ এর মধ্যবর্তী সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্বকে $(t_2 - t_1)$ দ্বারা ভাগ করে গড় বেগ পাওয়া যায়। তাহলে, প্রথম দুই সেকেন্ডে গড়বেগ

$$= \frac{t_2 = 2 \text{ ও } t_1 = 0 \text{ এর মধ্যে অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{(t_2 - t_1) \text{ সময় অন্তর}}$$

$$= \frac{(19.6 - 0)\text{মিটার}}{(2 - 0)\text{সেকেন্ড}} = 9.8 \text{ মিটার/সেকেন্ডে।}$$

অনুরূপে, $t = 1$ এবং $t = 2$ এর মধ্যে

$$\text{গড়বেগ} = \frac{(19.6 - 4.9)\text{মিটার}}{(2 - 1)\text{সেকেন্ড}} = 14.7 \text{ মিটার/সেকেন্ডে।}$$

এভাবে $t_1$-এর বিভিন্ন মানের জন্য, $t = t_1$ এবং $t = 2$ এর মধ্যে আমরা গড়বেগ হিসেব করতে পারি। নিম্নলিখিত সারণি 13.2 তে $t = t_1$ সেকেন্ড এবং $t = 2$ সেকেন্ডের মধ্যবর্তী গড়বেগ $v$ পাওয়া যায়।

**সারণি 13.1**

| $t$ | $s$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 4.9 |
| 1.5 | 11.025 |
| 1.8 | 15.876 |
| 1.9 | 17.689 |
| 1.95 | 18.63225 |
| 2 | 19.6 |
| 2.05 | 20.59225 |
| 2.1 | 21.609 |
| 2.2 | 23.716 |
| 2.5 | 30.625 |
| 3 | 44.1 |
| 4 | 78.4 |

**সারণি 13.2**

| $t_1$ | 0 | 1 | 1.5 | 1.8 | 1.9 | 1.95 | 1.99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 9.8 | 14.7 | 17.15 | 18.62 | 19.11 | 19.355 | 19.551 |

সারণি 13.2, লক্ষ করলে দেখা যায় গড়বেগ ধীরে ধীরে বৃদ্ধি পায়। ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সময় অন্তর নিয়ে $t = 2$ তে শেষ করলে, আমরা দেখি যে $t = 2$ তে বেগ সম্পর্কে আরো ভালো ধরণা পাওয়া যায়। আশা করা যায়, 1.99 সেকেন্ড এবং 2 সেকেন্ডের মধ্যে অপ্রত্যাশিত কিছু ঘটবে না। এর থেকে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি, $t = 2$ সেকেন্ডে গড়বেগের মান 19.551 মিটার/সেকেন্ডে থেকে একটু বেশি হবে।

এই সিদ্ধান্ত কোনো না কোনোভাবে নিম্নলিখিত গণনার সেটকে জোড়ালো করে। $t = 2$ সেকেন্ড থেকে শুরু করে বিভিন্ন সময়ের অন্তরে গড়বেগ নির্ণয় করতে হবে। পূর্বের মতো $t = 2$ সেকেন্ড এবং $t = t_2$ সেকেন্ডের মধ্যে গড়বেগ, $v$ হল —

$$= \frac{2 \text{ সেকেন্ড এবং } t_2 \text{ সেকেন্ডের মধ্যবর্তী অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব } - 2 \text{ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব } - 19.6}{t_2 - 2}$$

নিম্নলিখিত সারণি 13.3 $t = 2$ সেকেন্ড এবং $t_2$ সেকেন্ডের মধ্যে মিটার প্রতি সেকেন্ডে গড় বেগ $v$-কে দেয়।

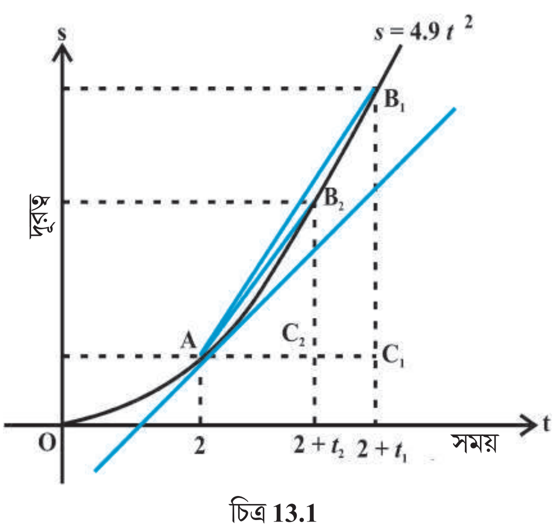
**সারণি 13.3**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

এখানে আমরা পুনরায় লক্ষ করেছি যে, $t = 2$ থেকে শুরু করে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সময়ের অন্তর নিলে $t = 2$ এ বেগ এর আরো ভালো ধারণা পাওয়া যায়।

গণনার প্রথম সেটে, $t = 2$-এ শেষ হয় এমন বর্ধিত সময়ান্তরে আমরা গড় গতিবেগ নির্ণয় করেছি এবং আশা করি $t = 2$ এর ঠিক আগে কোনো অপ্রত্যাশিত পরিবর্তন ঘটবে না। গণনার দ্বিতীয় সেটে, $t = 2$-এ শেষ হয় এমন ক্রমহ্রাসমান সময়ান্তরে আমরা গড় গতিবেগ নির্ণয় করেছি এবং আশা করি $t = 2$-এর ঠিক পরে কোনো অপ্রত্যাশিত পরিবর্তন ঘটবে না। বাস্তব ক্ষেত্রে গড়বেগের উভয় অনুক্রম একটি সীমা মানের দিকে অগ্রসর হবে। আমরা নিশ্চিতরূপে সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে $t = 2$-এ একটি বস্তুর বেগ 19.551 মিটার/সেকেন্ডে এবং 19.649 মিটার/সেকেন্ডে মধ্যবর্তী। প্রযুক্তিগতভাবে, আমরা বলতে পারি $t = 2$-এ তাৎক্ষণিক বেগ 19.551 মিটার/সেকেন্ডেএবং 19.649 মিটার/সেকেন্ডেএর মধ্যবর্তী। আমাদের ভালোভাবে জানা আছে যে, *বেগ হল সরণের পরিবর্তনের হার*। অতএব, এখন পর্যন্ত আমরা যা জেনেছি, তা নিম্নরূপ। সময়ের বিভিন্ন মুহূর্তে প্রদত্ত অতিক্রান্ত দূরত্বের তথ্যের সাহায্যে সময়ের সাপেক্ষে দূরত্বের পরিবর্তনের হার পরিমাপ করা হয়েছে। আমরা বলতে পারি যে, দূরত্বের অপেক্ষক $s = 4.9t^2$ এর $t = 2$-এ *অন্তরকলজের মান* 19.551 এবং 19.649 এর মধ্যবর্তী।

এই সীমা প্রক্রিয়াকে বিকল্পভাবে 13.1নং চিত্রে দেখানো হয়েছে। এটা অতিক্রান্ত সময় ($t$) এবং চূড়ার শীর্ষ হতে বস্তুর দূরত্বের ($s$) এর লেখচিত্র। সময় অন্তরাল $h_1$, $h_2$, ...-এর সীমা মান শূন্য এর দিকে অগ্রসর হলে, গড়বেগের অনুক্রম একই সীমা মানের দিকে অগ্রসর হয়, যেহেতু অনুক্রমের অনুপাত।




চিত্র **13.1**

$$\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, \ldots$$

যেখানে $C_1B_1 = s_1 - s_0$ হল $h_1 = AC_1$, ইত্যাদি সময়ের অন্তরে বস্তু দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব। চিত্র 13.1 হতে নিশ্চিত ভাবে সিদ্ধান্ত নেওয়া যায় যে, অক্ষর শ্রেণি A বিন্দুতে বক্রের স্পর্শকের নতির দিকে অগ্রসর হচ্ছে। অন্যভাবে, সময় $t = 2$ এ একটি বস্তুর তাৎক্ষণিক বেগ $v(t)$, $t = 2$ -এ বক্র $s = 4.9t^2$ এর স্পর্শকের নতির সমান।

## 13.3 সীমা (Limits)

উপরিউক্ত আলোচনা এই তথ্যের দিকে স্পষ্টতা নির্দেশ করে যে, সীমার প্রক্রিয়া আমাদের আরও বিস্তারিত ভাবে জানার প্রয়োজন। সীমার ধারণা সম্পর্কে পরিচিত হওয়ার জন্য আমরা কিছু দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ আলোচনা করবো।

একটি অপেক্ষক $f(x) = x^2$ বিবেচনা করো। লক্ষ করো $x$ এর মান 0 এর নিকটবর্তী হলে, $f(x)$ এর মানও 0 এর দিকে অগ্রসর হয় (অধ্যায়- 2, চিত্র 2.10 দেখো) । আমরা বলতে পারি

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

(পড়তে হবে, যেহেতু $x$, শূন্যের দিকে অগ্রসর হচ্ছে তাই $f(x)$ এর সীমা মান হবে শূন্য)। $f(x)$ এর সীমা যখন $x$ শূন্যের দিকে অগ্রসর হয়, তখন এরূপ ভাবা হয় যে $x = 0$ তে $f(x)$ এর মানকে বুঝায়।

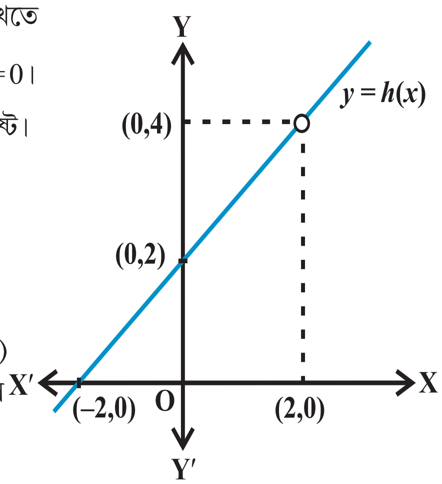
সাধারণভাবে, যখন $x \to a, f(x) \to l$, তখন $l$ কে *অপেক্ষক* $f(x)$ এর সীমা বলা হয় এবং এটিকে সাংকেতিকরূপে লেখা হয় $\lim_{x \to a} f(x) = l$ আকারে।

অপেক্ষক $g(x) = |x|, x \neq 0$ কে বিবেচনা করো। লক্ষ করো $g(0)$ সংজ্ঞাত নয়। 0 এর নিকটবর্তী $x$ এর মানের জন্য $g(x)$ এর মান হিসেব করলে, আমরা দেখতে পাই $g(0)$, 0 এর দিকে অগ্রসর হয়। তাহলে, $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$। এটা $y = |x|$ যখন $x \neq 0$ এর লেখচিত্র থেকে সজ্ঞাতরূপে স্পষ্ট। (অধ্যায় 2, চিত্র 2.13 দেখো)

নিচের অপেক্ষকটি বিবেচনা করো।

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \; x \neq 2 \text{ ।}$$

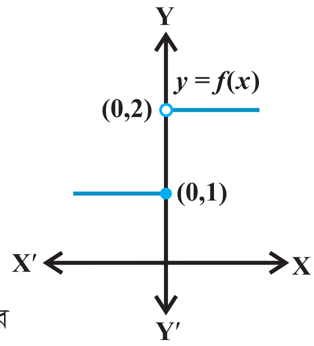
2 এর নিকটবর্তী $x$ এর মানের জন্য (কিন্তু 2 নয়) $h(x)$ এর মান হিসেব করো। স্বীকার করে নাও যে এই সকল মানগুলো 4 এর নিকটবর্তী। $y = h(x)$ অপেক্ষকের লেখচিত্র এই ধারণাকে কিছুটা হলেও মজবুত করে। যা (চিত্র 13.2) -তে আছে।




চিত্র **13.2**

এই সকল দৃষ্টান্তগুলোতে $x = a$ বিন্দুতে অপেক্ষক যে মান গ্রহণ করে তা বাস্তবে $x$, $a$-এর কোনদিকে অগ্রসর হচ্ছে তার উপর নির্ভরশীল নয়। লক্ষ করো যে, $x$ যে কোনো একটি সংখ্যা $a$ এর দিকে দুইভাবে অগ্রসর হওয়া আবশ্যক, হয় বাঁদিকে যাবে বা ডানদিকে যাবে অর্থাৎ $x$ এর নিকটবর্তী সকল মান হয় $a$ থেকে কম হবে বা $a$ থেকে বেশি হবে। এটা স্বাভাবিকভাবে দুটি সীমাকে প্রদর্শন করে *ডানপক্ষের সীমা* এবং *বামপক্ষের সীমা*। অপেক্ষক $f$ এর *ডানপক্ষের সীমা* $f(x)$ এর সেই মান হয় যা $f(x)$ এর মান দ্বারা নির্দেশিত হয় যখন $x$, $a$ এর ডানদিক থেকে অগ্রসর হয়। অনুরূপে হয় *বামপক্ষের সীমা*। এর উদাহরণস্বরূপ, নীচের অপেক্ষকটি বিবেচনা করো।

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$




চিত্র **13.3**

এই অপেক্ষকের লেখচিত্র প্রদর্শিত হল চিত্র 13.3 এ। এটি স্পষ্ট যে $f(x)$ এর মানগুলো 1-এর সমান যখন $x \le 0$, যা 0-তে $f$-এর মানও নির্দেশ করে। অর্থাৎ 0 তে $f(x)$ এর বামপক্ষের সীমাস্থ মান হল

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

অনুরূপভাবে, $f(x)$ এর মানগুলো 2-এর সমান যখন $x > 0$, যা 0 তে $f$ এর মানও নির্দেশ করে। অর্থাৎ 0 তে $f(x)$ এর ডানপক্ষের সীমাস্থ মান হল $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$ ।

এই ক্ষেত্রে ডান এবং বামদিকের সীমাস্থ মান ভিন্ন, তাই আমরা বলতে পারি যে, যেহেতু $x$ শূন্যের দিকে অগ্রসর তাই $f(x)$ এর সীমা অস্তিত্বহীন (যদিও অপেক্ষক 0 তে সংজ্ঞাত)।

**সারসংক্ষেপ**

আমরা বলতে পারি $\lim_{x \to a^-} f'(x)$, $x = a$ -তে $f(x)$ এর প্রত্যাশিত মান, যা $a$ এর বাঁদিকে $x$ এর নিকটবর্তী মানের জন্য $f(x)$ এর মান প্রদত্ত। এই মানকে $a$ তে, $f$ এর *বামপক্ষের সীমাস্থ* মান বলা হয়।

$\lim_{x \to a^+} f(x)$, $x = a$ -তে $f(x)$ এর প্রত্যাশিত মান, যা $x$ এর $a$ এর ডানদিকে নিকটবর্তী মানের জন্য $f(x)$ এর মান প্রদত্ত। এই মানকে $a$ তে, $f$ এর ডানপক্ষের সীমাস্থ মান বলা হয়।

যদি বাঁদিকের সীমাস্থ মান এবং ডান দিকে সীমাস্থ মান সমাপতিত হয় তবে এই সাধারণ মানকে $x = a$ তে $f(x)$ এর সীমা বলা হয় এবং এটিকে $\lim_{x \to a} f(x)$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

**দৃষ্টান্ত 1** $f(x) = x + 10$ অপেক্ষকটি বিবেচনা করো। আমরা এই অপেক্ষকটির সীমাস্থ মান $x = 5$ এ নির্ণয় করতে চাই। 5 এর খুব নিকটবর্তী $x$ এর মানের জন্য $f$ এর মান হিসেব করতে হবে। 5 এর অত্যন্ত নিকটে বাঁদিকে কিছু বিন্দু হল 4.9, 4.95, 4.99, 4.995. . ., ইত্যাদি। এই বিন্দুগুলোতে $f(x)$ এর মান নীচে

তালিকাবদ্ধ করা হল। অনুরূপে 5 এর অত্যন্ত নিকটবর্তী ডানদিকে বাস্তব সংখ্যাগুলো হল 5.001, 5.01, 5.1। এই বিন্দু গুলোতে অপেক্ষকের মান সারণি 13.4 এ প্রদত্ত।

| $x$ | 4.9 | 4.95 | 4.99 | 4.995 | 5.001 | 5.01 | 5.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 14.9 | 14.95 | 14.99 | 14.995 | 15.001 | 15.01 | 15.1 |

সারণি **13.4**

সারণি 13.4 থেকে আমরা ধারণা করতে পারি যে $f(x)$ এর মান 14.995 থেকে বড়ো এবং 15.001 থেকে ছোটো হবে। এটা ধরে নেওয়া হয়েছে যে $x = 4.995$ এবং 5.001 । এর মধ্যে কোনো অপ্রত্যাশিত ঘটনা ঘটবে না। এটা ধরা সংগত হবে যে 5 এর বাঁদিকে অবস্থিত সংখ্যার জন্য $x = 5$ -এ $f(x)$ এর মান হবে 15 অর্থাৎ $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 15$ ।

অনুরূপে, যখন $x$, 5 এর ডানদিকে অগ্রসর হয় তখন $f$ এর মান 15 হবে অর্থাৎ,

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = 15 \text{ ।}$$

অর্থাৎ এটা সম্ভব যে, $f$ এর বাদিকের সীমা এবং $f$ এর ডানদিকের সীমা, উভয়ের মান 15 এর সমান। তাহলে,

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5} f(x) = 15 \text{ ।}$$

অধ্যায় 2 এর 2.16 নং চিত্রে প্রদর্শিত অপেক্ষক লেখচিত্র, সীমাস্থ মান 15 এই সিদ্ধান্তকে কিছুটা মজবুত করে। এই চিত্রে আমরা লক্ষ করছি, $x$ যখন 5 এর ডানদিকে বা বাদিকে অগ্রসর হয়, তখন অপেক্ষক $f(x) = x + 10$ এর লেখচিত্র (5, 15) বিন্দুর নিকটবর্তী হয়।

আমরা লক্ষ করি $x = 5$-এও অপেক্ষকটির মান 15 এর সমান হয়।

**দৃষ্টান্ত 2** $f(x) = x^3$ অপেক্ষকটি বিবেচনা করো। $x = 1$ -এ অপেক্ষকটির মান নির্ণয় করতে হবে। পূর্বের পদ্ধতির মতো, 1 এর নিকটবর্তী $x$ এর মানের জন্য $f(x)$ এর মানের সারণিবদ্ধ করা হল। সারণি 13.5 এ এগুলো দেওয়া হল।

সারণি **13.5**

| $x$ | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.729 | 0.970299 | 0.997002999 | 1.003003001 | 1.030301 | 1.331 |

এই সারণি হতে আমরা পাই, $x = 1$-এ অপেক্ষক $f$ এর মান 0.997002999 থেকে বড়ো এবং 1.003003001 থেকে ছোটো। এটা ধরে নেওয়া হয়েছে যে $x = 0.999$ এবং 1.001এর মধ্যে কোনো

অপ্রত্যাশিত ঘটনা ঘটবে না। এটা ধরে নেওয়া সংগত যে, $x = 1$ এ $f$ এর মান 1 এর বাঁদিকে সংখ্যার উপর নির্ভর করে, অর্থাৎ,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \text{ ।}$$

অনুরূপে, $x$ যখন 1 এর ডানদিকে অগ্রসর হয়, তখন $f(x)$ এর মান হবে 1 অর্থাৎ,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \text{ ।}$$

অতএব, এটা সম্ভব যে $f(x)$ এর বাঁদিকের সীমামান এবং $f(x)$ এর ডানদিকের সীমামান উভয়েই 1 হবে। তাহলে,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1 \text{ ।}$$

অধ্যায় 2-এর চিত্র 2.11 এ প্রদর্শিত অপেক্ষরে লেখচিত্র, সীমাস্থ মান 1 এর সিদ্ধান্তকে কিছুটা মজবুত করে। এই চিত্রে আমরা লক্ষ করছি, যখন $x$ , 1 এর ডানদিকে বা বাঁদিকে অগ্রসর হয় তখন $f(x) = x^3$ অপেক্ষকের লেখচিত্র (1, 1) বিন্দুর দিকে অগ্রসর হয়।

আমরা পুনরায় লক্ষ করছি যে, $x = 1$-এ ও অপেক্ষকের মান 1 এর সমান হয়।

**দৃষ্টান্ত 3** $f(x) = 3x$ অপেক্ষকটি বিবেচনা করো। $x = 2$ -এ অপেক্ষকটির সীমামান নির্ণয় করার চেষ্টা করবো। নিচের সারণি 13.6 স্ব-ব্যাখ্যাকারী।

সারণি **13.6**

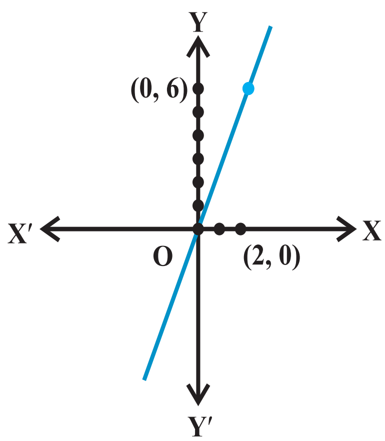
| $x$ | 1.9 | 1.95 | 1.99 | 1.999 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5.7 | 5.85 | 5.97 | 5.997 | 6.003 | 6.03 | 6.3 |

পূর্বের মতো আমরা লক্ষ করছি যে, $x$ বাঁদিকে বা ডানদিকে 2 এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে, $f(x)$ এর মান 6 এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে মনে হয়। আমরা এটিকে লিখতে পারি

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 6$$

13.4 নং চিত্রে প্রদর্শিত এর লেখচিত্র এই তথ্যকে মজবুত করে।

এখানে আমরা পুনরায় লক্ষ করছি যে, $x = 2$ -এ অপেক্ষকের মান এবং $x = 2$ -এ সীমাস্থ মান সমাপতিত হয়।



চিত্র **13.4**

**দৃষ্টান্ত 4** ধ্রুবক অপেক্ষক $f(x) = 3$ কে বিবেচনা করো। $x = 2$ -এ এর সীমাবদ্ধ মান নির্ণয় করার চেষ্টা করবো। এই অপেক্ষকটি ধ্রুবক অপেক্ষক হওয়ায় সর্বত্র একটিই (এই ক্ষেত্রে 3) মান পাওয়া

যায় অর্থাৎ 2 এর অত্যন্ত নিকটবর্তী বিন্দুগুলোর জন্য এর মান হয় 3। অতএব,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

$f(x) = 3$ এর লেখচিত্র সবসময় (0, 3) বিন্দুগামী $x$-অক্ষের সমান্তরাল রেখা যা অধ্যায় 2-এর 2.9 নং চিত্রে প্রদর্শিত হয়েছে। এটা থেকে স্পষ্ট যে নির্ণেয় সীমাস্থ মান 3। যদিও এটা সহজেই লক্ষ করা যায় যে, যেকোনো বাস্তব সংখ্যা $a$ এর জন্য $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ ।

**দৃষ্টান্ত 5** $f(x) = x^2 + x$ অপেক্ষকটি বিবেচনা করো। আমাদের $\lim_{x\to 1} f(x)$ এর মান নির্ণয় করতে হবে। $x = 1$ -এর নিকটবর্তী $f(x)$ এর মানগুলো সারণি 13.7-এ সারণিবদ্ধ করা হল ।

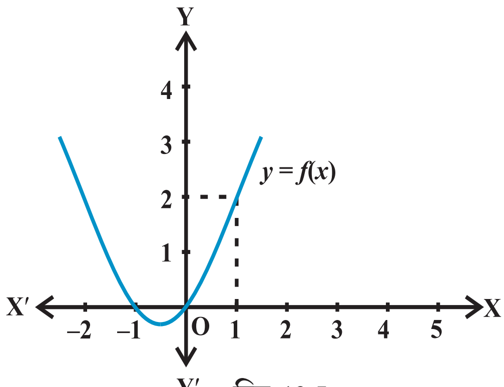
**সারণি 13.7**

| $x$ | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1.01 | 1.1 | 1.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.71 | 1.9701 | 1.997001 | 2.0301 | 2.31 | 2.64 |

এটি হতে সংগতভাবে পাওয়া যায়

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2 \text{ ।}$$

$f(x) = x^2 + x$ এর লেখচিত্র 13.5 নং চিত্রে দেখানো হয়েছে, এটা হতে স্পষ্ট যে, $x$ যখন 1 এর দিকে অগ্রসর হয়, তখন লেখচিত্র (1, 2) এর দিকে অগ্রসর হয়।



চিত্র 13.5

অতএব, আমরা পুনরায় লক্ষ করেছি

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

এখন নিম্নলিখিত তিনটি তথ্য তোমাদের স্বীকার করতে হবে :

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1, \quad \lim_{x\to 1} x = 1 \text{ এবং } \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

তাহলে, $$\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} x = 1 + 1 = 2 = \lim_{x\to 1}\left[x^2 + x\right] \text{ ।}$$

আবার, $$\lim_{x\to 1} x . \lim_{x\to 1}(x+1) = 1.2 = 2 = \lim_{x\to 1}\left[x(x+1)\right] = \lim_{x\to 1}\left[x^2 + x\right] \text{ ।}$$

**দৃষ্টান্ত 6** $f(x) = \sin x$ অপেক্ষকটি বিবেচনা করো। আমরা $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$ এ আগ্রহী, যেখানে কোণ রেডিয়ানে পরিমাপ করা হয়।

এখানে, $\frac{\pi}{2}$ এর নিকটবর্তী $f(x)$ এর (আসন্ন) মান সারণিবদ্ধ (সারণি 13.8) করা হল। এটি হতে আমরা দেখাতে পারি -

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$$

উপরন্তু এটি $f(x) = \sin x$ -এর লেখচিত্র দ্বারা সিদ্ধ হয় যা চিত্র 3.8 (অধ্যায় 3) -এ দেওয়া হয়েছে। এই অবস্থায়ও আমরা দেখত পাই $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ ।

**সারণি 13.8**

| $x$ | $\frac{\pi}{2} - 0.1$ | $\frac{\pi}{2} - 0.01$ | $\frac{\pi}{2} + 0.01$ | $\frac{\pi}{2} + 0.1$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.9950 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9950 |

**দৃষ্টান্ত 7** $f(x) = x + \cos x$ অপেক্ষকটি বিবেচনা করো। আমরা $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ এর মান নির্ণয় করতে চাই।

এখানে আমরা 0 এর নিকটবর্তী $f(x)$ এর মান (আসন্ন) সারণিবদ্ধ করা হল (সারণি 13.9) ।

**সারণি 13.9**

| $x$ | – 0.1 | – 0.01 | – 0.001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.9850 | 0.98995 | 0.9989995 | 1.0009995 | 1.00995 | 1.0950 |

সারণি 13.9 হতে, আমরা দেখাতে পারি যে,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

এই ক্ষেত্রেও আমরা দেখতে পাই $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$

এখন আমরা নিজেরা কি স্বীকার করতে পারি—

$$\lim_{x \to 0} [x + \cos x] = \lim_{x \to 0} x + \lim_{x \to 0} \cos x \text{ বাস্তবে সত্য ?}$$

**দৃষ্টান্ত 8** $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ^^ অপেক্ষকটি বিবেচনা করো, যখন $x>0$ । $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান নির্ণয় করো।

এখানে, লক্ষ করো যে অপেক্ষকের সংজ্ঞার ক্ষেত্র হল সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যাসমূহ। অতএব, আমরা যখন $f(x)$ এর মান সারণিবদ্ধ করি, তখন $x$, 0 -এর বাঁদিক হতে অগ্রসর হচ্ছে, এর কোনো ধারণা তৈরি করে না। নীচে আমরা 0 এর নিকটবর্তী $x$ এর ধনাত্মক মানের জন্য, অপেক্ষকের মানের সারণিবদ্ধ করা হল (সারণিতে $x$ হল যে কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)।

নিম্নে প্রদত্ত 13.10 সারণিতে আমরা দেখতে পাই $x$, 0 এর দিকে অগ্রসর হলে, $f(x)$ বড়ো এবং আরও বড়ো হয়। এখানে এটির অর্থ হল $f(x)$ এর মানকে বৃহত্তর করা যায় যেকোনো প্রদত্ত সংখ্যার জন্য।

**সারণি 13.10**

| $x$ | 1 | 0.1 | 0.01 | $10^{-n}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 100 | 10000 | $10^{2n}$ |

গাণিতিকভাবে, আমরা বলতে পারি,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

এই পাঠ্যক্রমে আমরা এই প্রকার সীমা নিয়ে আলোচনা করবো না।

**দৃষ্টান্ত 9** $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান নির্ণয় করো যখন,

$$f(x)=\begin{cases} x-2, & x<0 \\ 0 \quad , & x=0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$$

পূর্বের মতো আমরা 0 এর নিকটবর্তী $x$ এর মানের জন্য $f(x)$ এর সারণি তৈরি করা হল। লক্ষ করো $x$ এর ঋণাত্মক মানের জন্য $x-2$ এর মান নির্ণয় করতে হবে এবং ধনাত্মক মানের জন্য $x+2$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

**সারণি 13.11**

| $x$ | – 0.1 | – 0.01 | – 0.001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | – 2.1 | – 2.01 | – 2.001 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |

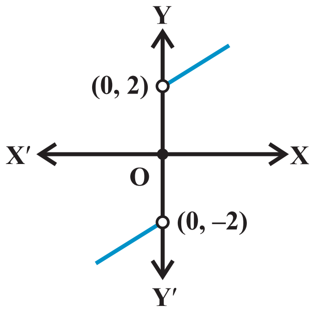
সারণি 13.11 এর প্রথম তিনিটি মানের জন্য, আমরা দেখতে পাই অপেক্ষকের মান –2 পর্যন্ত হ্রাস পায়। অতএব, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-2$

সারণিতে শেষ তিনটি মানের জন্য আমরা দেখতে পাই, অপেক্ষকটির মান 2 হতে বৃদ্ধি পায় এবং তাহলে

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

যেহেতু 0 এর বাঁদিকের এবং ডানদিকের সীমা সমাপতিত হয় না, তাই আমরা বলতে পারি 0 বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমার অস্তিত্ব নেই।

এই অপেক্ষকটির লেখচিত্র 13.6 নং চিত্রে দেখানো হল। এখানে আমরা মন্তব্য করতে পারি যে $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান সুসংজ্ঞাত, বাস্তবে 0 এর সমান, কিন্তু $x = 0$ তে অপেক্ষকটির সীমাও সংজ্ঞাত নয়।




চিত্র **13.6**

**দৃষ্টান্ত 10** সর্বশেষ দৃষ্টান্ত হিসেবে, আমরা $\lim_{x\to 1} f(x)$ এর মান নির্ণয় করবো, যখন

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}$$

**সারণি 13.12**

| $x$ | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 3.001 | 3.01 | 3.1 |

পূর্বের মতো, আমরা 1 এর নিকটবর্তী $x$ এর মানের জন্য $f(x)$ এর মানকে সারণিবদ্ধ করি। 1 থেকে ছোটো $x$ এর জন্য, $f(x)$এর মান থেকে এটা বোঝা যায় যে, $x = 1$ এ অপেক্ষকের মান 3 হতে হবে অর্থাৎ,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \text{।}$$

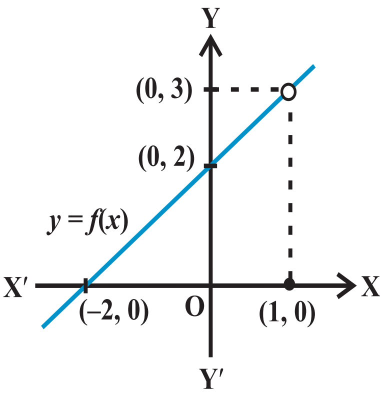
একইভাবে, 1 থেকে বড়ো $x$ এর মানের জন্য $f(x)$ এর মানগুলো নির্দেশ করে যে, $f(x)$ এর মান 3 হওয়া উচিত।

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3 \text{।}$$

কিন্তু, তাহলে বামপক্ষের সীমা এবং ডানপক্ষের সীমা সমাপতিত হয় এবং

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 3 \text{।}$$

13.7 নং চিত্রে প্রদত্ত, অপেক্ষকের লেখচিত্র সীমা সংক্রান্ত ধারণাকে মজবুত করে। আমরা সাধারণভাবে এখানে দেখতে




চিত্র **13.7**

পাচ্ছি যে, একটি প্রদত্ত বিন্দুতে অপেক্ষকের মান এবং এর সীমাস্থ মান ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে (এমনকি যখন উভয়ই সংজ্ঞাত)।

**13.3.1** ***সীমার বীজগণিত (Algebra of limits)*** উপরিউক্ত দৃষ্টান্তগুলোতে, আমরা লক্ষ করেছি যে, সীমা প্রক্রিয়া যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ এর নিয়ম মেনে চলে, যেখানে বিবেচনাধীন অপেক্ষক এবং সীমাগুলো সুসংজ্ঞাত হবে। ঘটনা দুটি সমাপতিত নয়। বাস্তবে আমরা এদের প্রমাণ ছাড়া উপপাদ্যের আকারে নিম্নরূপে প্রকাশ করতে পারি।

**উপপাদ্য 1** ধরা যাক, $f$ এবং $g$ দুটি এরূপ অপেক্ষক যেখানে $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ এর অস্তিত্ব আছে। তাহলে

(i) দুটি অপেক্ষকের যোগফলের সীমাস্থ মান, অপেক্ষক দুটির সীমাস্থ মানের যোগফল সমান, অর্থাৎ

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\ ।$$

(ii) দুটি অপেক্ষকের অন্তরফলের সীমাস্থ মান, অপেক্ষক দুটির সীমাস্থ মানের অন্তরফলের সমান, অর্থাৎ

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)\ ।$$

(iii) দুটি অপেক্ষকের গুণফলের সীমাস্থ মান, অপেক্ষক দুটির সীমাস্থ মানের গুণফলের সমান, অর্থাৎ

$$\lim_{x\to a}[f(x)\,.\,g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\,.\,\lim_{x\to a} g(x)\ ।$$

(iv) দুটি অপেক্ষকের ভাগফলের সীমাস্থ মান, অপেক্ষক দুটির সীমাস্থ মানের ভাগফলের সমান, অর্থাৎ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

**দ্রষ্টব্য** (iii) এর একটি বিশেষ ক্ষেত্রে, যখন $g$ একটি ধ্রুবক অপেক্ষক অর্থাৎ $g(x)=\lambda$, $\lambda$ যে কোনো একটি বাস্তব সংখ্যা হলে, আমরা জানি,

$$\lim_{x\to a}\left[(\lambda.f)(x)\right] = \lambda.\lim_{x\to a} f(x)\ ।$$

পরবর্তী দুটি অনুচ্ছেদে, আমরা কিছু উদাহরণ দেব যেখানে এই উপপাদ্যটি বিশেষ প্রকার অপেক্ষকের সীমাস্থ মান নির্ণয়ে প্রয়োগ করা হবে।

**13.3.2** ***বহুপদ এবং মূলদ অপেক্ষকের সীমা (Limits of polynomials and rational functions)*** একটি অপেক্ষক $f$ কে বহুপদ অপেক্ষক বলা হবে যদি $f(x)$ শূন্য (0) অপেক্ষক হয় অথবা যদি $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, যেখানে $a_i$ গুলো বাস্তব সংখ্যা ও $a_n \neq 0$, যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা $n$ এর জন্য।

আমরা জানি যে, $\lim\limits_{x\to a} x = a$ ।

তাহলে, $\lim\limits_{x \to a} x^2 = \lim\limits_{x \to a}(x.x) = \lim\limits_{x \to a} x . \lim\limits_{x \to a} x = a.\, a = a^2$

$n$ এর উপর আরোহণের নীতি প্রয়োগ করে সহজে বলা যায়

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

এখন, ধরি $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ একটি বহুপদ অপেক্ষক।

$a_0, a_1\, x, a_2 x^2, \ldots, a_n\, x^n$ এদের প্রত্যেককে একটি অপেক্ষক ভাবলে, আমরা পাই,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a}\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\right] \\
&= \lim_{x \to a} a_0 + \lim_{x \to a} a_1 x + \lim_{x \to a} a_2 x^2 + \ldots + \lim_{x \to a} a_n x^n \\
&= a_0 + a_1 \lim_{x \to a} x + a_2 \lim_{x \to a} x^2 + \ldots + a_n \lim_{x \to a} x^n \\
&= a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \ldots + a_n a^n \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

(উপরিউক্ত প্রতিটি ধাপের যৌক্তিকতা তোমরা বুঝেছ কি না তা নিশ্চিত হও !)

একটি অপেক্ষক $f$ কে মূলদ অপেক্ষক বলা হবে, যদি $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ হয়, যেখানে $g(x)$ এবং $h(x)$ হল বহুপদ রাশিমালা ও $h(x) \neq 0$ । তাহলে,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} g(x)}{\lim\limits_{x \to a} h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}$$

যদি $h(a) = 0$ হয়, তবে দুটি অবস্থা হল– (i) যখন $g(a) \neq 0$ এবং (ii) যখন $g(a) = 0$। প্রথম ক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি সীমার অস্তিত্ব নেই। পরবর্তী ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি $g(x) = (x - a)^k g_1(x)$, যেখানে $k$, $g(x)$ এ $(x - a)$ এর সর্বোচ্চ ঘাত। অনুরূপে, $h(x) = (x-a)^l h_1(x)$ যেহেতু $h(a) = 0$। এখন, যদি $k > l$ হয়, তবে

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} g(x)}{\lim\limits_{x \to a} h(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} (x - a)^k\, g_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} (x - a)^l\, h_1(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to a}(x-a)^{(k-l)}\, g_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} h_1(x)} = \frac{0.g_1(a)}{h_1(a)} = 0$$

যদি $k < l$ হয়, তবে সীমা সংজ্ঞাত নয়।

**উদাহরণ 1** সীমা নির্ণয় করো (i) $\lim\limits_{x\to 1}\left[x^3 - x^2 + 1\right]$ (ii) $\lim\limits_{x\to 3}\left[x(x+1)\right]$

(iii) $\lim\limits_{x\to -1}\left[1 + x + x^2 + ... + x^{10}\right]$ ।

**সমাধান :** প্রদত্ত বহুপদ রাশির অপেক্ষকের সীমাস্থ মানগুলো হল নির্ণেয় সীমামান। অতএব, সীমাস্থ মানগুলো হল প্রদত্ত বিন্দুতে অপেক্ষকের মান। আমরা জানি,

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\ [x^3 - x^2 + 1] = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$

(ii) $\lim\limits_{x\to 3}\left[x(x+1)\right] = 3(3+1) = 3(4) = 12$

(iii) $\lim\limits_{x\to -1}\left[1 + x + x^2 + ... + x^{10}\right] = 1 + (-1) + (-1)^2 + ... + (-1)^{10}$

$= 1 - 1 + 1 ... + 1 = 1$ ।

**উদাহরণ 2** সীমাগুলোর মান নির্ণয় করো :

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x^2+1}{x+100}\right]$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4}\right]$

(iii) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x}\right]$ (iv) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 5x + 6}\right]$

(v) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x-2}{x^2 - x} - \dfrac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\right]$ ।

**সমাধান** প্রদত্ত সবগুলো অপেক্ষক মূলদ অপেক্ষক। তাই প্রথমে আমাদের বিন্দুতে এই অপেক্ষকগুলোর মান নির্ণয় করতে হবে। যদি এটি $\dfrac{0}{0}$ আকারের হয় তবে, অপেক্ষকটি পুনরায় এমনভাবে লিখব যাতে $\dfrac{0}{0}$ আসার জন্য দায়ী গুণনীয়কটি অপনীত হয়।

(i) আমরা জানি, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x+100}=\dfrac{1^2+1}{1+100}=\dfrac{2}{101}$

(ii) $x=2$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান, $\dfrac{0}{0}$ আকারের হয়।

অতএব, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{(x+2)}$ যেহেতু $x\neq 1$

$= \dfrac{2(2-2)}{2+2}=\dfrac{0}{4}=0$ ।

(iii) $x=2$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান, $\dfrac{0}{0}$ আকারের হয়।

অতএব, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)}{x(x-2)}=\dfrac{2+2}{2(2-2)}=\dfrac{4}{0}$

ইহা সংজ্ঞাত নয়।

(iv) $x=2$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান, $\dfrac{0}{0}$ আকারের হয়।

অতএব, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{(x-3)}=\dfrac{(2)^2}{2-3}=\dfrac{4}{-1}=-4$ ।

(v) প্রথমে, অপেক্ষকটিকে আমরা মূলদ অপেক্ষক আকারে লিখে পাই –

$$\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]=\left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x\left(x^2-3x+2\right)}\right]$$

$$=\left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$=\left[\frac{x^2-4x+4-1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$=\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

$x = 1$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান $\frac{0}{0}$ আকারের হয়।

অতএব, $$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x(x-2)}=\frac{1-3}{1(1-2)}=2\text{ ।}$$

আমরা মন্তব্য করতে পারি যে, উপরোক্ত মান নির্ণয়ে $(x-1)$ পদটি বর্জন করা হল যেহেতু $x \neq 1$ ।

একটি গুরুত্বপূর্ণ সীমার মান নির্ণয়, নীচে একটি উপপাদ্য আকারে দেওয়া হল যা পরবর্তী ফলাফলে প্রয়োগ করা হল।

**উপপাদ্য 2** যে কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $n$ এর জন্য,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}.$$

**মন্তব্য** $n$ একটি মূলদ সংখ্যা এবং $a$ ধনাত্মক সংখ্যা হলেও উপরোক্ত উপপাদ্যে, রাশিমালার সীমাস্থ মান সত্য হবে।

**প্রমাণ** $x^n - a^n = (x-a)\ (x^{n-1} + x^{n-2}\, a + x^{n-3}\, a^2 + \ldots + x\, a^{n-2} + a^{n-1})$

$(x^n - a^n)$ কে $(x - a)$ দিয়ে ভাগ করে, আমরা পাই—

তাহলে, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = \lim\limits_{x \to a}\ (x^{n-1} + x^{n-2}\, a + x^{n-3}\, a^2 + \ldots + x\, a^{n-2} + a^{n-1})$

$$= a^{n-1} + a\ a^{n-2} + \ldots + a^{n-2}\ (a)\ + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a^{n-1} + a^{n-1}$$ ($n$ সংখ্যক পদ)

$$= na^{n-1}$$

**উদাহরণ 3** মান নির্ণয় করো :

(i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1}$  (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

**সমাধান** (i) আমরা পাই,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1} = \lim_{x \to 1} \left[ \frac{x^{15} - 1}{x - 1} \div \frac{x^{10} - 1}{x - 1} \right]$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[ \frac{x^{15} - 1}{x - 1} \right] \div \lim_{x \to 1} \left[ \frac{x^{10} - 1}{x - 1} \right]$$

$$= 15\,(1)^{14} \div 10(1)^{9}$$ (উপরোক্ত উপপাদ্যের সাহায্যে)

$$= 15 \div 10 = \frac{3}{2}$$

(ii) $y = 1 + x$ বসাও। সুতরাং, $x \to 0$ হলে $y \to 1$ ।

তাহলে, $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{y \to 1} \frac{\sqrt{y} - 1}{y \quad 1}$$

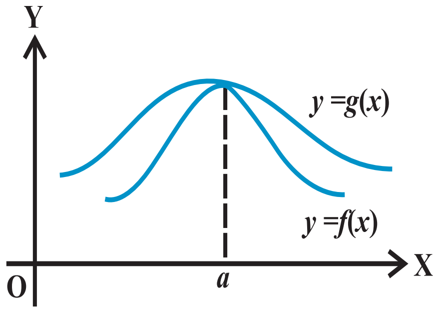
$$= \lim_{y \to 1} \frac{y^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}}{y - 1}$$

$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2} - 1}$$ (উপরের মন্তব্য অনুসারে) $= \dfrac{1}{2}$

## 13.4 ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের সীমা (Limits of Trigonometric Functions)

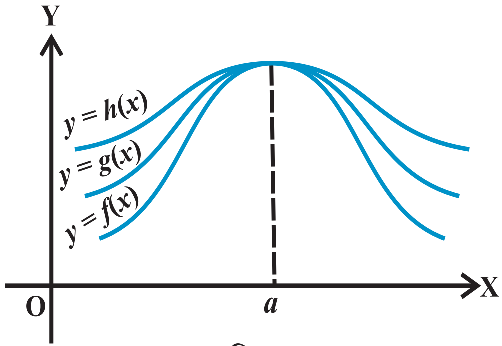
অপেক্ষক সংক্রান্ত নিম্নের তথ্যাবলি (যা উপপাদ্যের আকারে ব্যক্ত), কিছু ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের সীমাস্থ মানের হিসেব নির্ণয়ে সাধারণত সহায়তা করে।

**উপপাদ্য 3** ধরা যাক, একই ক্ষেত্র বিশিষ্ট দুটি বাস্তব মান সম্পন্ন $f$ এবং $g$ এরূপ দুটি অপেক্ষক যেন $f(x) \le g(x)$, সংজ্ঞাক্ষেত্রে $x$ এর সব মানে। এখন, কোনো $a$ এর জন্য, যদি উভয় সীমা $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ এর অস্তিত্ব থাকে, তবে $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$ এটি 13.8 নং চিত্রে প্রদর্শিত হল।




চিত্র **13.8**

**উপপাদ্য 4 ( স্যান্ডউইচ উপপাদ্য)** ধরা যাক, $f$, $g$ এবং $h$ এরূপ তিনটি অপেক্ষক যেন $f(x) \le g(x) \le h(x)$, $x$ এর সব সাধারণ সংজ্ঞার ক্ষেত্রের জন্য। কিছু বাস্তব সংখ্যা $a$ এর জন্য, যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l = \lim\limits_{x\to a} h(x)$, তবে $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ । এটি 13.9 নং চিত্রে প্রদর্শিত হল।



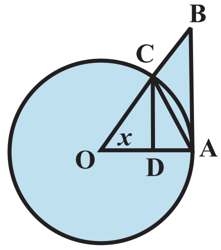

চিত্র **13.9**

ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক সংক্রান্ত গুরুত্বপূর্ণ অসমতার একটি সুন্দর জ্যামিতিক প্রমাণ নিম্নে দেওয়া হল।

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \text{যখন} \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \qquad (*)$$

**প্রমাণ** আমরা জানি যে, $\sin(-x) = -\sin x$ এবং $\cos(-x) = \cos x$ । তাই $0 < x < \frac{\pi}{2}$ বিস্তারে অসমতাটির প্রমাণই যথেষ্ট।

13.10 নং চিত্রে, O হল একক বৃত্তের কেন্দ্র এরূপ যেন AOC কোণের পরিমাপ $x$ রেডিয়ান এবং $0 < x < \frac{\pi}{2}$ । B A এবং CD রেখাংশ OA এর উপর লম্ব। AC যুক্ত করা হল। তাহলে,



চিত্র **13.10**

$\Delta$ OAC এর ক্ষেত্রফল < বৃত্তকলা OAC এর ক্ষেত্রফল < $\Delta$ OAB এর ক্ষেত্রফল।

অর্থাৎ, $\frac{1}{2}OA.CD < \frac{x}{2\pi}.\pi.(OA)^2 < \frac{1}{2}OA.AB$ .

অর্থাৎ, CD < $x$ . OA < AB.

$\Delta$ OCD হতে,

$\sin x = \frac{\text{CD}}{\text{OA}}$ (যেহেতু OC = OA) তাহলে, CD = OA $\sin x$ । আবার, $\tan x = \frac{\text{AB}}{\text{OA}}$

তাহলে, AB = OA. $\tan x$ ।

অতএব, OA $\sin x$ < OA. $x$ < OA. $\tan x$ ।

যেহেতু OA এর দৈর্ঘ্য ধনাত্মক, তাই $\sin x < x < \tan x$ ।

যেহেতু $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , $\sin x$ ধনাত্মক, সুতরাং, উপরোক্ত সম্পূর্ণ অসমীকরণটিকে $\sin x$ দ্বারা ভাগ করে

পাই– $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ । সবগুলোর অনোন্যক নিয়ে পাই

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

যা প্রমাণটিকে সম্পূর্ণ করে।

**উপপাদ্য 5** নীচে দুটো গুরুত্বপূর্ণ সীমা দেওয়া হল—

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

**প্রমাণ** (i) (*) এর অসমতা অনুসারে অপেক্ষক $\frac{\sin x}{x}$ হল অপেক্ষক $\cos x$ এবং ধ্রুবক অপেক্ষকের (যার মান 1) মধ্যবর্তী (sandwich এর মতো)।

আবার, যেহেতু $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, আমরা দেখতে পাই যে, উপপাদ্য (i) এর প্রমাণ সম্পূর্ণ হয় sandwich স্যান্ডউইচ এর উপপদ্য অনুসারে।

(ii) কে প্রমাণ করার জন্য, আমরা ত্রিকোণমিতিক অভেদ $1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ কে মনে করব।

তাহলে,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1.0 = 0$$

লক্ষ করে দেখো, $x \to 0$ হলে পরোক্ষভাবে $\frac{x}{2} \to 0$ -এর সমতুল্য। $y = \frac{x}{2}$ বসিয়ে এটি প্রমাণ করা যায়।

**উদাহরণ 4 :** মান নির্ণয় করো : (i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

**সমাধান** (i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}.\frac{2x}{\sin 2x}.2\right]$

$$= 2.\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$$= 2.\lim_{4x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \lim_{2x\to 0}\left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$= 2.1.1 = 2$ (যেহেতু $x \to 0$, তাই $4x \to 0$ এবং $2x \to 0$)

(ii) আমরা জানি, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,.\,\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$

সীমাস্থ মান নির্ণয়ের সময় নীচের সাধারণ নিয়মটি মনে রাখতে হবে। ধরা যাক সীমা $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ এর অস্তিত্ব আছে এবং আমরা এর মান নির্ণয় করতে চাই। প্রথমে $f(a)$ এবং $g(a)$ এর মান যাচাই করতে হবে। যদি উভয়ের মান শূন্য হয়, তবে আমাদের সেই উৎপাদকটি নির্ণয় করতে হবে যার জন্য পদটি শূন্য হয় অর্থাৎ যদি আমরা লিখি $f(x) = f_1(x)\,f_2(x)$ তবে $f_1(a) = 0$ এবং $f_2(a) \neq 0$ । অনুরূপে লেখা যায় $g(x) = g_1(x)\,g_2(x)$, যেখানে $g_1(a) = 0$ এবং $g_2(a) \neq 0$ । $f(x)$ এবং $g(x)$ হতে সাধারণ উৎপাদক বর্জন করে (যদি সম্ভব হয়) আমরা লিখতে পারি।

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)},\ \text{যেখানে } q(x) \neq 0.$$

তাহলে,
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

## অনুশীলনী 13.1

1 থেকে 22 পর্যন্ত নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলোর সীমাস্থ মান নির্ণয় করো।

**1.** $\lim\limits_{x\to 3} x+3$ **2.** $\lim\limits_{x\to \pi}\left(x-\frac{22}{7}\right)$ **3.** $\lim\limits_{r\to 1}\pi r^2$

**4.** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4x+3}{x-2}$ **5.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}$

**7.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x^2-4}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$ **9.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax+b}{cx+1}$

**10.** $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^{\frac{1}{3}}-1}{z^{\frac{1}{6}}-1}$ **11.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a},\ a+b+c\neq 0$

**12.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}$ **13.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}$ **14.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx},\ a,b\neq 0$

**15.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(\pi-x)}{\pi(\pi-x)}$ **16.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{\pi-x}$ **17.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-1}{\cos x-1}$

**18.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax+x\cos x}{b\sin x}$ **19.** $\lim\limits_{x\to0} x\sec x$

**20.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax+bx}{ax+\sin bx}\ a, b, a+b\neq 0$, **21.** $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{cosec} x-\cot x)$

**22.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 2x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$

**23.** $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ এর মান নির্ণয় করো, যখন $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\le 0\\ 3(x+1), & x>0\end{cases}$

**24.** $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ এর মান নির্ণয় করো, যখন $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\le 1\\ -x^2-1, & x>1\end{cases}$

**25.** $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ এর মান নির্ণয় করো, যখন $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

**26.** $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ এর মান নির্ণয় করো, যখন $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

**27.** $\lim\limits_{x\to5} f(x)$ এর মান নির্ণয় করো, যখন $f(x)=|x|-5$

**28.** যদি $f(x)=\begin{cases}a+bx, & x<1\\ 4, & x=1\\ b-ax, & x>1\end{cases}$

এবং $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$ হয় তবে $a$ ও $b$ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করো।

**29.** ধরো $a_1, a_2, \ldots, a_n$ নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা এবং

$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ একটি অপেক্ষকরূপে সংজ্ঞায়িত।

$\lim_{x \to a_1} f(x)$ কী বোঝায় ? $a \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$ হলে $\lim_{x \to a} f(x)$ নির্ণয় করো?

**30.** যদি $f(x) = \begin{cases} |x|+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x|-1, & x > 0 \end{cases}$

হয়, তবে $a$ এর কোন মানের জন্য $\lim_{x \to a} f(x)$ সংজ্ঞাত?

**31.** যদি অপেক্ষক *f(x)*, $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = \pi$, -কে সিদ্ধ করে, তবে $\lim_{x \to 1} f(x)$ এর মান নির্ণয় করো।

**32.** যদি $f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & x < 0 \\ nx + m, & 0 \leq x \leq 1 \\ nx^3 + m, & x > 1 \end{cases}$ হয়, তবে $m$ এবং $n$ এর কোনো অখণ্ড মানের জন্য

$\lim_{x \to 0} f(x)$ এবং $\lim_{x \to 1} f(x)$ উভয়ের অস্তিত্ব থাকে ?

## 13.5 অন্তরকলজ (Derivatives)

13.2 পরিচ্ছেদে আমরা দেখেছি, বিভিন্ন সময়ের অন্তরে বস্তুর অবস্থান জেনে, বস্তুটির অবস্থানের পরিবর্তনের হার নির্ণয় করা সম্ভব। সময়ের বিভিন্ন মুহূর্তে একটি নিশ্চিত প্রাচল (Parameter) জানা এবং সেই হার নির্ণয়ের চেষ্টা যেখানে এর পরিবর্তন হয়, তা অত্যন্ত মজাদার। বাস্তব জীবনে এমন অনেক পরিস্থিতি হয় যেখানে এই প্রক্রিয়া আবশ্যক হয়। উদাহরণস্বরূপ জলাধারের জলের হিসাব রক্ষাকারী ব্যক্তির সময়ের বিভিন্ন মুহূর্তে জলের গভীরতা জেনে কখন জলাধারের জল উপচে পড়বে তা জানা একান্ত প্রয়োজন। বিভিন্ন সময়ে রকেটের উচ্চতা জেনে রকেট বৈজ্ঞানিকদের সেই যথাযথ বেগ নির্ণয় করা অত্যাবশ্যক হয় যাতে উপগ্রহটি রকেট থেকে উৎক্ষেপন সম্ভব হয়। আর্থিক সংস্থার একটি নির্দিষ্ট স্টক এর বর্তমান মূল্য জেনে এর মূল্যের পরিবর্তন ভবিষ্যদ্বাণী করা প্রয়োজন হয়। এক্ষেত্রে এবং এরূপ অনেক ক্ষেত্রে এটি জানা প্রয়োজন যে, একটি প্রাচল অপর একটি প্রাচলের সাপেক্ষে কীরূপে পরিবর্তন হয়। অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চলের কোনো একটি বিন্দুতে অপেক্ষকটির অন্তরকলজ নির্ণয়ই আলোচনার মুখ্য উদ্দেশ্য।

**সংজ্ঞা 1** ধরো $f$ একটি বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক এবং এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রে ($domain$) $a$ একটি বিন্দু। $a$ বিন্দুতে $f$ এর অন্তরকলজ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

রূপে সংজ্ঞাত, এই শর্তে যে, ওই বিন্দুতে সীমার অস্তিত্ব আছে। $f(x)$ এর অন্তরকলজকে $f'(a)$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

লক্ষ করো, $x$ এর সাপেক্ষে $a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর পরিবর্তনকে $f'(a)$ দিয়ে পরিমাপ করা হয়।

**উদাহরণ 5** $f(x) = 3x$ অপেক্ষককের $x = 2$ বিন্দুতে অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা জানি

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-3(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6+3h-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3\text{।}$$

$x = 2$ বিন্দুতে, $3x$ অপেক্ষককের অন্তরকলজের মান 3।

**উদাহরণ 6** $x = -1$ বিন্দুতে $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ অপেক্ষকের অন্তরকলজের মান নির্ণয় করো। এটিও প্রমাণ করো যে, $f'(0) + 3f'(-1) = 0$।

**সমাধান :** প্রথমে $x = -1$ এবং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করতে হবে। আমরা জানি

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2(-1+h)^2+3(-1+h)-5\right]-\left[2(-1)^2+3(-1)-5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h-1) = 2(0)-1 = -1$$

এবং
$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2(0+h)^2+3(0+h)-5\right]-\left[2(0)^2+3(0)-5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+3) = 2(0)+3 = 3$$

স্পষ্টত, $f'(0) + 3\ f'(-1) = 0$

**মন্তব্য :** এই পরিস্থিতিতে এটি লক্ষ করা যায় যে, একটি বিন্দুতে সীমার সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয়ে বহু কার্যকরী নিয়মের প্রয়োগ যুক্ত থাকে। এর ব্যাখ্যা নিম্নলিখিত উদাহরণে পাওয়া যায়।

**উদাহরণ 7** $x = 0$ বিন্দুতে $\sin x$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** ধরা যাক, $f(x) = \sin x$ তাহলে,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

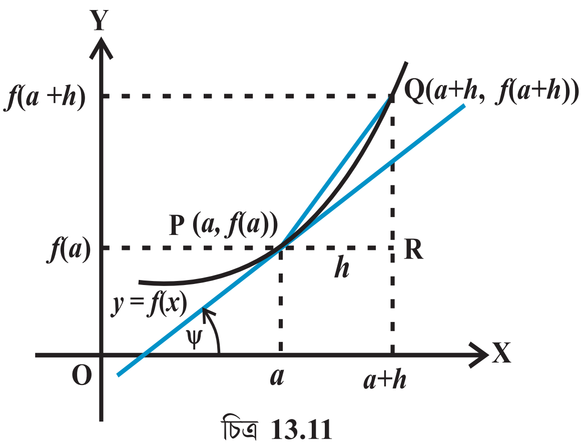
**উদাহরণ 8** $x = 0$ এবং $x = 3$ বিন্দুতে $f(x) = 3$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** যেহেতু অন্তরকলজ, অপেক্ষকের পরিবর্তনকে পরিমাপ করে, তাই স্পষ্টত সহজভাবে বলা যায়, প্রত্যেক বিন্দুতে ধ্রুবক অপেক্ষকের অন্তরকলজ অবশ্যই শূন্য হবে। প্রকৃতপক্ষে, নিম্নলিখিত ফলাফল অবশ্যই শূন্য হবে। প্রকৃতপক্ষে, নিম্নলিখিত ফলাফল এটিকে সমর্থন করে।

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

অনুরূপে $$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = 0$$

এখন আমরা একটি বিন্দুতে অপেক্ষকের অন্তরকলজের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা উপস্থাপন করব। ধরা যাক, $y = f(x)$ একটি অপেক্ষক এবং অপেক্ষকটির লেখচিত্রের উপর $P = [a, f(a)]$ এবং $Q = [a + h, f(a + h)]$ দুটি বিন্দু পরস্পর কাছাকাছি অবস্থিত। এমন চিত্র 13.11 নিজেই নিজের ব্যাখ্যা প্রদান করে।




চিত্র 13.11

আমরা জানি $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

PQR ত্রিভুজ থেকে এটি স্পষ্ট যে, যার সীমা আমরা নির্ণয় করছি তার অনুপাত, যথাযথভাবে tan(QPR) এর সমান, যা PQ জ্যা এর নতি সীমাস্থ মান নির্ণয়ের পদ্ধতিতে, $h$ শূন্যের (0) দিকে অগ্রসর হলে, Q বিন্দু P এর দিকে অগ্রসর হয় এবং আমরা পাই

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{Q\to P}\frac{QR}{PR}$$

এটি তথ্যের সমতুল্য যে, PQ জ্যা $y=f(x)$ বক্রের উপর অবস্থিত P বিন্দুতে স্পর্শকের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। তাহলে সীমাস্থ মান হল স্পর্শকের নতির সমান। অতএব,

$$f'(a)=\tan\psi \text{।}$$

প্রদত্ত অপেক্ষক $f$ এর অন্তরকলজ প্রতিটি বিন্দুতে নির্ণয় করা যায়। যদি প্রতিটি বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে তবে এটা একটি নতুন অপেক্ষকে সংজ্ঞাত করে থাকে $f$ এর অন্তরকলজ বলা হয়। প্রথাগতভাবে, আমরা একটি অপেক্ষকের অন্তরকলজ নিম্নরূপ সংজ্ঞায়িত করতে পারি।

**সংজ্ঞা 2** ধরো $f$ একটি বাস্তব মান বিশিষ্ট অপেক্ষক, যা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

যেখানে সীমার অস্তিত্ব আছে এবং $x$-এ $f$ এর অন্তরকলজ সংজ্ঞাত। এটি $f'(x)$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। এই সংজ্ঞাটিকে অন্তরকলজের প্রথম নিয়মও বলা হয়।

তাহলে, $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

স্পষ্টতই $f'(x)$ এর সংজ্ঞাত অঞ্চল হবে যেখানে উপরোক্ত সীমার অস্তিত্ব আছে। একটি অপেক্ষকের অন্তরকলজ বিভিন্ন প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। কখানো $f'(x)$ চিহ্নিত করা হয় $\frac{d}{dx}[f(x)]$ দ্বারা যখন $y=f(x)$, এটি $\frac{dy}{dx}$ দিয়ে চিহ্নিত হয়। এটি $f(x)$ বা $y$ এর $x$ -এর সাপেক্ষে অন্তকলজ নির্দেশ করে। এটিকে $D[f(x)]$ দিয়েও বোঝানো হয়। অধিকন্তু $x=a$ এ $f$ এর অন্তরকলজ চিহ্নিত হয় $\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_a$ বা $\left.\frac{df}{dx}\right|_a$ বা $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ দিয়ে।

**উদাহরণ 9** $f(x)=10x$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো ।

**সমাধান** যেহেতু $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{10(x+h)-10(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{10h}{h} = \lim_{h\to 0}(10) = 10 \text{ ।}$$

**উদাহরণ 10** $f(x) = x^2$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান :**. আমরা জানি, $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x) = 2x$$

**উদাহরণ 11** ধ্রুবক অপেক্ষক $f(x) = a$ এর অন্তর কলজ নির্ণয় করো, যেখানে $a$ একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা।

**সমাধান :** আমরা জানি, $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 \quad \text{যেহেতু } h \neq 0$$

**উদাহরণ 12** $f(x) = \frac{1}{x}$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা জানি, $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

**13.5.1 *অপেক্ষকের অন্তরকলজ -এর বীজগণিত (Algebra of derivative of functions)*** যেহেতু শুরুতে অন্তরকলজের সংজ্ঞায় প্রত্যক্ষভাবে সীমা যুক্ত, তাই আশা করা যায় অন্তরকলজের নিয়মগুলো ঐসব সীমা মানগুলোর সাথে নিবিড়ভাবে যুক্ত। নিম্নলিখিত উপপাদ্যে আমরা এদের সংকলিত করেছি।

**উপপাদ্য 5** ধরা যাক, $f$ এবং $g$ এরূপ দুটি অপেক্ষক যাদের অন্তরকলজ একটি সাধারণ অঞ্চলে সংজ্ঞাত। তাহলে,

(i) দুটি অপেক্ষকের যোগফলের অন্তরকলজ, অপেক্ষক দুটির অন্তরকলজের যোগফলের সমান।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x).$$

(ii) দুটি অপেক্ষকের অন্তরফলের অন্তরকলজ, অপেক্ষক দুটির অন্তরকলজের অন্তরফলের সমান।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x).$$

(iii) দুটি অপেক্ষকের গুণফলের অন্তরকলজ নীচে গুণের নিয়মে দেওয়া হল।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\,.\,g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)\,.\,g(x)+f(x)\,.\,\frac{d}{dx}g(x)$$

(iv) দুটি অপেক্ষকের ভাগফলের অন্তরকলজ নীচে ভাগের নিয়মে দেওয়া হল (যখন হর $\neq 0$)।

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{d}{dx}f(x)\,.\,g(x)-\;f(x)\;\frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

এটির প্রমাণ সীমার অনুরূপ উপপাদ্য থেকে প্রয়োজনীয় নিরিখে অনুসৃত হয়। আমরা এখানে এটির প্রমাণ করবো না। সীমার ক্ষেত্রে এই উপপাদ্য থেকে জানা যায় কিভাবে বিশেষ বিশেষ অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয় করতে হবে। উপরের উপপাদ্যের শেষ দুটি বিবৃতি নিম্নরূপে পুনরায় লেখা যায়, যার ফলে এদের সহজে মনে রাখা যায়।

ধরা যাক, $u=f(x)$ এবং $v=g(x)$, তাহলে

$$(uv)'=u'v+uv'$$

অপেক্ষকের গুণফলের অন্তরকলজের জন্য গুণের নিয়ম বা লিবনিজ (Leibnitz rule) নিয়ম উল্লেখ করা হয়। অনুরূপে ভাগফল নিয়মটি হল—

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

এখন, চলো আমরা কিছু আদর্শ অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয়ে সম্মুখীন হই।

এটা সহজেই দেখানো যায় যে, $f(x) = x$ অপেক্ষকের অন্তরকলজ হল ধ্রুবক অপেক্ষক 1 । এটির কারণ হল

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 1 = 1 \text{ ।}$$

আমরা এটা এবং উপরিউক্ত উপপাদ্যের প্রয়োগ $f(x) = 10x = x + .... + x$ (দশ বার) এর অন্তরকলজ নির্ণয়ে করব। উপরিউক্ত উপপাদ্য $(i)$ এর সাহায্যে

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x+\ldots+x) \text{ (দশ বার)}$$

$$= \frac{d}{dx}x+\ldots+\frac{d}{dx}x \text{ (দশ বার)}$$

$$= 1+\ldots+1 \text{ (দশ বার)} = 10 \text{ ।}$$

লক্ষ করলে দেখা যায়, এই সীমার মান গুণের নিয়ম প্রয়োগ করেও বের করা যায়। লেখা যায়, $f(x) = 10x = uv$, যেখনে $u$ একটি ধ্রুবক অপেক্ষক (প্রতিক্ষেত্রে মান 10 নিয়ে) এবং $v(x) = x$ এর অন্তরকলজের মান 1, তাহলে গুণের নিয়মে আমরা পাই।

$$f'(x) = (10x)' = (uv)' = u'v + uv' = 0.x + 10.1 = 10$$

অনুরূপে $f(x) = x^2$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করা যায়। আমরা জানি $f(x) = x^2 = x.x$ তবে

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x.x) = \frac{d}{dx}(x).x + x.\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 1.x + x.1 = 2x \text{ ।}$$

আরো সাধারণ ভাবে, আমরা নিম্নলিখিত উপপাদ্যটি পাই।

**উপপাদ্য 6** $f(x) = x^n$ এর অন্তরকলজ $nx^{n-1}$, যেখানে $n$ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

**প্রমাণ** অন্তরকলজ অপেক্ষকের সংজ্ঞা অনুযায়ী, আমরা জানি,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \text{ ।}$$

দ্বিপদ উপপাদ্য থেকে পাওয়া যায়— $(x + h)^n = \left({}^n\mathrm{C}_0\right)x^n + \left({}^n\mathrm{C}_1\right)x^{n-1}h + ... + \left({}^n\mathrm{C}_n\right)h^n$

অতএব, $(x + h)^n - x^n = h(nx^{n-1} + ... + h^{n-1})$ ।

তাহলে, $$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(nx^{n-1} + .... + h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + ... + h^{n-1}\right) = nx^{n-1} \text{ ।}$$

বিকল্পরূপে, আমরা এটি $n$ এর উপর আরোহণ করে এবং গুণের সূত্রের সাহায্যেও নিম্নরূপে প্রমাণ করতে পারি। $n = 1$ হলে এটি সত্য, যা পূর্বে প্রমাণিত হয়েছে। আমরা জানি,

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(x.x^{n-1}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x).\left(x^{n-1}\right) + x.\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\right) \text{ (গুণের নিয়মে)}$$

$$= 1.x^{n-1} + x.\left((n-1)x^{n-2}\right) \text{ (আরোহণ প্রকল্প অনুযায়ী)}$$

$$= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1} \text{ ।}$$

**মন্তব্য :** উপরোক্ত উপপাদ্য $x$ এর সকল ঘাত এর জন্য সত্য অর্থাৎ $n$ যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে (আমরা এখানে এটি প্রমাণ করব না)।

**13.5.2** ***বহুপদ এবং ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের অন্তরকলজ : (Derivative of polynomials and trigonometric functions)*** আমরা নিম্নের উপপাদ্যটি দিয়ে শুরু করি, যা থেকে বহুপদ অপেক্ষকের অন্তরকলজ পাওয়া যায়।

**উপপাদ্য 7** ধরো, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .... + a_1 x + a_0$ এটি বহুপদ অপেক্ষক, যেখানে সকল বাস্তব সংখ্যা হল $a_i s$ এবং $a_n \neq 0$ । তাহলে অন্তরকলজ অপেক্ষক নিম্নে দেওয়া হল —

$$\frac{df(x)}{dx} = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{x-2} + ... + 2a_2 x + a_1 \text{ ।}$$

উপপাদ্য 5 এবং উপপাদ্য 6 এর প্রথম ভাগকে একত্রিতকরণে এই উপপাদ্যের প্রমাণ করা হয়।

**উদাহরণ 13** $6x^{100} - x^{55} + x$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** উপরিউক্ত উপপাদ্যের সরাসরি প্রয়োগ করে এই অপেক্ষকের অন্তরকলজ হয় $600x^{99} - 55x^{54} + 1$ ।

**উদাহরণ 14** $x = 1$ এ $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{50}$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** উপাপাদ্য 6 সরাসরি প্রয়োগ করে, এই অপেক্ষকের অন্তরকলজ হয় $1+2x + 3x^2 + ...+ 50x^{49}$। $x = 1$ এ এই অপেক্ষকের মান হল

$$1 + 2(1) + 3(1)^2 + ... + 50(1)^{49} = 1 + 2 + 3 + ... + 50 = \frac{(50)(51)}{2} = 1275 \text{ ।}$$

**উদাহরণ 15** f $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** স্পষ্টত এই অপেক্ষকটি $x = 0$ ব্যাতীত সকল বিন্দুতে সংজ্ঞাত হয়। আমরা $u = x + 1$ এবং $v = x$ ধরে ভাগের নিয়ম প্রয়োগ করি। তাহলে $u' = 1$ এবং $v' = 1$ ।

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1(x)-(x+1)1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

**উদাহরণ 16** $\sin x$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** ধরা যাক, $f(x) = \sin x$ তাহলে

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}, \text{ ( } \sin A - \sin B \text{ এর সূত্র প্রয়োগ করে)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.1 = \cos x \text{ ।}$$

**উদাহরণ 17** $\tan x$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** ধরা যাক, $f(x) = \tan x$ । তাহলে

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$, ( sin (A + B) এর সূত্র প্রয়োগ করে)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \text{ ।}$$

**উদাহরণ 18** $f(x) = \sin^2 x$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান :** আমরা এর সমাধানের জন্য লিবনিজ (Leibnitz) এর গুণের নিয়ম প্রয়োগ করব।

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \sin x)$$

$$= (\sin x)' \sin x + \sin x (\sin x)'$$

$$= (\cos x)\sin x + \sin x(\cos x)$$

$$= 2\sin x\cos x = \sin 2x \text{ ।}$$

## অনুশীলনী 13.2

1. $x = 10$ -এ, $x^2 - 2$ -এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।
2. $x = 100$ -এ, $99x$ -এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।
3. $x = 1$ -এ, $x$ -এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।
4. প্রথম নিয়ম প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত অপেক্ষক গুলোর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

   (i) $x^3 - 27$ (ii) $(x-1)(x-2)$

   (iii) $\frac{1}{x^2}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

5. $f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x + 1$ হলে,

প্রমাণ করো $f'(1)=100f'(0)$ ।

**6.** $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো যেখানে $a$ একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা।

**7.** $a$ এবং $b$ ধ্রুবক হলে, অন্তরকলজ নির্ণয় করো—

(i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$ (iii) $\dfrac{x-a}{x-b}$

**8.** $a$ ধ্রুবক হলে $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**9.** অন্তরকলজ নির্ণয় করো

(i) $2x-\dfrac{3}{4}$ (ii) $(5x^3+3x-1)(x-1)$

(iii) $x^{-3}(5+3x)$ (iv) $x^5(3-6x^{-9})$

(v) $x^{-4}(3-4x^{-5})$ (vi) $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{x^2}{3x-1}$

**10.** প্রথম নিয়ম প্রয়োগ করে $\cos x$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**11.** নিম্নের অপেক্ষগুলোর অন্তরকলজ নির্ণয় করো :

(i) $\sin x \cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $5\sec x + 4\cos x$

(iv) $\operatorname{cosec} x$ (v) $3\cot x + 5\operatorname{cosec} x$

(vi) $5\sin x - 6\cos x + 7$ (vii) $2\tan x - 7\sec x$

## বিবিধ উদাহরণ (*Miscellaneous Examples*)

**উদাহরণ 19** প্রথম নিয়ম প্রয়োগ করে $f$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো, যেখানে $f$ হলো—

(i) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$ (ii) $f(x) = x+\dfrac{1}{x}$

**সমাধান :** (i) লক্ষ করো, $x=2$ এ অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত নয়। কিন্তু, আমরা জানি

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2(x+h)+3}{x+h-2}-\dfrac{2x+3}{x-2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+2h+3)(x-2)-(2x+3)(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+3)(x-2)+2h(x-2)-(2x+3)(x-2)-h(2x+3)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{7}{(x-2)\,(x+h-2)} = -\frac{7}{(x-2)^2}$$

আবার লক্ষ করো $f'$ অপেক্ষকটি $x = 2$ বিন্দুতে সংজ্ঞাত নয়।

(ii) $x = 0$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত নয়। কিন্তু আমরা জানি

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h+\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h+\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h\left(1-\frac{1}{x(x+h)}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[1-\frac{1}{x(x+h)}\right] = 1-\frac{1}{x^2}$$

আবার লক্ষ করো $x = 0$ তে $f'$ সংজ্ঞাত নয়।

**উদাহরণ 20** প্রথম নিয়ম প্রয়োগ করে *f(x)* এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো, যেখানে *f(x)* হল,

(i) $\sin x + \cos x$ (ii) $x \sin x$

**সমাধান :** (i) আমরা জানি $f'(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)+\cos(x+h)-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h+\cos x\cos h-\sin x\sin h-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h(\cos x-\sin x)+\sin x(\cos h-1)+\cos x(\cos h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}(\cos x-\sin x)+\lim_{h\to 0}\sin x\frac{(\cos h-1)}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x\frac{(\cos h-1)}{h}$$

$$= \cos x-\sin x$$

(ii) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sin(x+h)-x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(\sin x\cos h+\sin h\cos x)-x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)+x\cos x\sin h+h(\sin x\cos h+\sin h\cos x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0} x\cos x\frac{\sin h}{h} + \lim_{h\to 0}(\sin x\cos h+\sin h\cos x)$$

$$= x\cos x+\sin x$$

**উদাহরণ 21** অন্তরকলজ নির্ণয় করো—

(i) $f(x) = \sin 2x$ (ii) $g(x) = \cot x$

**সমাধান :** (i) ত্রিকোণমিতিক সূত্র $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ স্মরণ করো। তাহলে,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x) = 2\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)$$

$$= 2\left[(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'\right]$$

$$= 2\left[(\cos x)\cos x+\sin x(-\sin x)\right]$$

$$= 2(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

(ii) সংজ্ঞানুযায়ী, $g(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ । আমরা এই অপেক্ষকের জন্য ভাগের নিয়ম প্রয়োগ করবো, যেখানে এটি সংজ্ঞাত। $\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\cot x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$

$$= \frac{(\cos x)'(\sin x) - (\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

বিশেষভাবে, লিখেও এটিকে নির্ণয় করা যায়, $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ লিখেও এটিকে নির্ণয় করা যায়। এখানে আমরা *tan x* এর অন্তরকলজ *sec² x* এই তথ্য প্রয়োগ করবো, যা আমরা উদাহরণ 17 এ দেখেছি এবং ধ্রুবক অপেক্ষকের অন্তরকলজ 0 ।

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right)$$

$$= \frac{(1)'(\tan x) - (1)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(0)(\tan x) - (\sec x)^2}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

**উদাহরণ 22** অন্তরকলজ নির্ণয় করো—

(i) $\frac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ (ii) $\frac{x + \cos x}{\tan x}$

**সমাধান :** (i) ধরা যাক, $h(x) = \frac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ । এই অপেক্ষকে আমরা ভাগের নিয়ম প্রয়োগ করবো, যেখানে এটা সংজ্ঞাত।

$$h'(x) = \frac{(x^5 - \cos x)'\sin x - (x^5 - \cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(5x^4 + \sin x)\sin x - (x^5 - \cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-x^5 \cos x + 5x^4 \sin x + 1}{(\sin x)^2}$$

(iii) $\dfrac{x + \cos x}{\tan x}$ অপেক্ষকের উপর আমরা ভাগের নিয়ম প্রয়োগ করবো, যেখানে এটা সংজ্ঞাত।

$$h'(x) = \frac{(x + \cos x)' \tan x - (x + \cos x)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 - \sin x)\tan x - (x + \cos x)\sec^2 x}{(\tan x)^2}$$

## *অধ্যায় 13 এর উপর বিবিধ অনুশীলনী*

**1.** প্রথম নিয়ম প্রয়োগ করে নীচের অপেক্ষকগুলোর অন্তরকলজ নির্ণয় করো :

(i) $-x$ (ii) $(-x)^{-1}$ (iii) $\sin(x + 1)$ (iv) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right)$

নীচের অপেক্ষকগুলো অন্তরকলজ নির্ণয় করো ( $a, b, c, d, p, q, r$ ) এবং $s$ নির্দিষ্ট অশূন্য ধ্রুবক ধরতে হবে, $m$ ও $n$ অখণ্ড সংখ্যা ) :

**2.** $(x + a)$

**3.** $(px + q)\left(\dfrac{r}{x} + s\right)$

**4.** $(ax + b)(cx + d)^2$

**5.** $\dfrac{ax + b}{cx + d}$

**6.** $\dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}}$

**7.** $\dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$

**8.** $\dfrac{ax + b}{px^2 + qx + r}$

**9.** $\dfrac{px^2 + qx + r}{ax + b}$

**10.** $\dfrac{a}{x^4} - \dfrac{b}{x^2} + \cos x$

**11.** $4\sqrt{x} - 2$

**12.** $(ax + b)^n$

**13.** $(ax + b)^n (cx + d)^m$

**14.** $\sin(x + a)$

**15.** $\operatorname{cosec} x \cot x$

**16.** $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

**17.** $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ **18.** $\dfrac{\sec x-1}{\sec x+1}$ **19.** $\sin^n x$

**20.** $\dfrac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$ **21.** $\dfrac{\sin(x+a)}{\cos x}$ **22.** $x^4(5\sin x-3\cos x)$

**23.** $\left(x^2+1\right)\cos x$ **24.** $\left(ax^2+\sin x\right)\left(p+q\cos x\right)$

**25.** $\left(x+\cos x\right)\left(x-\tan x\right)$ **26.** $\dfrac{4x+5\sin x}{3x+7\cos x}$ **27.** $\dfrac{x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$

**28.** $\dfrac{x}{1+\tan x}$ **29.** $\left(x+\sec x\right)\left(x-\tan x\right)$ **30.** $\dfrac{x}{\sin^n x}$

## *Summary*

- অপেক্ষকের প্রত্যাশিত মান যা একটি বিন্দুর বাদিকের বিন্দু সমূহের উপর নির্ভর করে, তাকে ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকের বামপক্ষের সীমা (left hand limit) বলা হয়। অনুরূপে ডানপক্ষের সীমা।
- কোনো একটি বিন্দুতে একটি অপেক্ষকের সীমা মান সাধারণ হবে যদি, বামপক্ষের সীমামান এবং ডানপক্ষের সীমামান সমাপতিত হয়।
- একটি বাস্তব সংখ্যা $a$ এবং একটি অপেক্ষক $f$ এর জন্য, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এবং $f(a)$ সমান নাও হতে পারে (বাস্তবে একটি সংজ্ঞাত এবং অপরটি নাও হতে পারে)।
- $f$ এবং $g$ অপেক্ষকের জন্য নীচের গুলো সিদ্ধ হয় :

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

- নিম্নে কিছু আদর্শ সীমা হল :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

- a -তে অপেক্ষক $f$ এর অন্তরকলজ সংজ্ঞাত হয়,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- যে কোনো বিন্দু $x$-এ অপেক্ষক $f$ এর অন্তরকলজ

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ দিয়ে সংজ্ঞাত।

- অপেক্ষক $u$ এবং $v$ এর জন্য নীচের গুলো সিদ্ধ হয় :

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$ এই শর্তে যে, প্রত্যেক সংজ্ঞাত।

- কিছু আদর্শ অন্তরকলজ হল—

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

## *ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট*

গণিতের ইতিহাসে, কলনবিদ্যার আবিষ্কারের কৃতিত্বের অধিকারী দুজন বিশিষ্ট গণিতবিদ হলেন আইজাক নিউটন (Issac Newton) (1642 – 1727) এবং জি. ডব্লিউ লিবনিজ (G.W. Leibnitz 1646 – 1717)। 1700 শতাব্দীতে উভয়েই স্বাধীনভাবে অন্তরকলজ আবিষ্কার করেন। কলনবিদ্যার আবিষ্কারের পর অনেক গণিতবিদ এর বিকাশ সাধনে গুরুত্বপূর্ণ অবদান রেখেছেন। পরিশুদ্ধ ধারণার মুখ্য কৃতিত্বের অধিকারী হলেন গণিতবিদ A.L. Cauchy, J.L.Lagrange এবং Karl Weierstrass। Cauchy

কলনবিদ্যার যে ভিত্তি দিয়েছেন তা আমাদের পাঠ্য পুস্তকগুলোতে গৃহীত হয়েছে। Cauchy অপেক্ষকের অন্তরকলজের সংজ্ঞা নির্ণয়ে D' Alembert's এর সীমার ধারণা প্রয়োগ করেন। সীমার সংজ্ঞার শুরুতে, Cauchy যে উদাহরণটি দিয়েছিলেন তা $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ এর সীমা যখন $\alpha = 0$। উনি লিখেন $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, $i \to 0$ এর জন্য, সীমাস্থ মানকে বলেছেন "function derive'e, $y'$ for $f'(x)$"।

1900 শতাব্দীর পূর্বে, এটা ভাবা হত যে, কলনবিদ্যাকে পড়ানো অত্যন্ত কঠিন। তাই কলনবিদ্যা যুবকদের আয়ত্ত্বের বাইরে চলে যায়। কিন্তু ঠিক 1900 শতাব্দীতে, John Perry এবং ইংল্যান্ডের অন্যরা প্রচার করা শুরু করেন যে, কলনবিদার গুরুত্বপূর্ণ ধারণা এবং পদ্ধতি খুব সরল এবং বিদ্যালয়স্তরেও পড়ানো যায়। প্রথম বছর ছাত্রদের কলনবিদ্যা পড়ানোর পথিকৃৎ ছিলেন F.L. Griffin। তখনকার সময় এটা ছিল একটি সাহসী পদক্ষেপ।

আজকাল শুধু গণিতেই নয়, অন্যান্য অনেক বিষয় যেমন পদার্থবিদ্যা, রসায়নবিদ্যা, অর্থনীতিবিদ্যা এবং জীববিজ্ঞানেও কলনবিদ্যার ফলাফল ব্যবহৃত হচ্ছে।

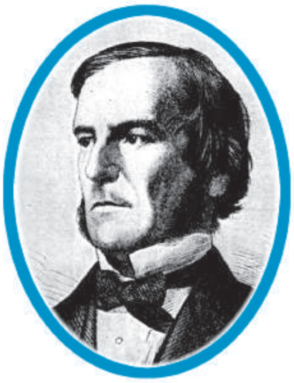
অধ্যায় **14**

# গাণিতিক যুক্তি
# (MATHEMATICAL REASONING)

❖ *There are few things which we know which are not capable of mathematical reasoning and when these can not, it is a sign that our knowledge of them is very small and confused and where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of another, as to grope for a thing in the dark when you have a candle stick standing by you. – ARTHENBOT* ❖

## 14.1 ভূমিকা

এ অধ্যায়ে আমরা গাণিতিক যুক্তি সম্পর্কিত কিছু মৌলিক ধারণার উপর আলোচনা করব। আমাদের সকলেরই জানা আছে যে মানুষ জাতি লক্ষ লক্ষ বছর আগে থেকে নিম্নতর প্রজাতি থেকে বিকশিত হয়েছে। মানুষের যুক্তি বিচার ক্ষমতার গুণাবলি মানুষকে অন্য প্রজাতির চেয়ে শ্রেষ্ঠ করে রেখেছে। কোনো ব্যক্তি এগুণগুলো কী রকমে ভালো করে প্রয়োগ করতে পারেন তা নির্ভর করে তাঁর যুক্তি ক্ষমতার উপর। এই ক্ষমতার বিকাশ কীভাবে করা যায়? এখানে আমরা বিশেষ করে গণিত সম্পর্কিত যুক্তিপ্রক্রিয়ার উপর আলোচনা করব।



জর্জ বুল
**(1815 - 1864)**

গাণিতিক ভাষায়, যুক্তি দুই প্রকারের হয়— আরোহী এবং অবরোহী। আমরা ইতোমধ্যে গাণিতিক আরোহণ প্রসঙ্গে আরোহী যুক্তির আলোচনা করছি। এ অধ্যায়ে আমরা অবরোহী যুক্তির কিছু মৌলিক ধারণা সম্পর্কে আলোচনা করব।

## 14.2 উক্তি (Statements)

গাণিতিক যুক্তির মৌলিক একক গাণিতিক উক্তি।

আমরা নিম্নলিখিত দুটি বাক্যের মাধ্যমে শুরু করছি।

*২০০৩ সালে ভারতের রাষ্ট্রপতি একজন মহিলা ছিলেন।*

*একটি হাতির ওজন একজন মানুষের চেয়ে বেশি।*

এই বাক্যগুলো পড়ামাত্রই  আমরা স্থির করতে পারি যে প্রথম বাক্যটি মিথ্যা এবং দ্বিতীয়টি সত্য। এ ব্যাপারে কোনো সন্দেহ নেই। গণিতে এ ধরনের বাক্যগুলোকে উক্তি বলে।

অপরদিকে নীচের বাক্যটিকে বিবেচনা করো -

*মহিলারা, পুরুষের চেয়ে বুদ্ধিমতী।*

কিছু লোক এটিকে সত্য বলে ভাবেন কিন্তু অপরপক্ষে অনেকে এটিতে সহমত পোষণ করেন না। এই বাক্যের পরিপ্রেক্ষিতে আমরা বলতে পারি না যে এটি সবসময় সত্য বা সব সময় মিথ্যা। অর্থাৎ এই বাক্যটি দ্ব্যর্থক বিশিষ্ট বা অস্পষ্ট। এধরনের বাক্যকে গণিতে উক্তি হিসেবে মানা হয় না।

***একটি বাক্যকে গাণিতিকরূপে উক্তি বলা হয় যদি বাক্যটি হয় সত্য বা মিথ্যা কিন্তু একই সাথে মিথ্যা বা সত্য উভয়ই নয়।*** যখনই আমরা এখানে উক্তি নিয়ে আলোচনা করব তা "গাণিতিক রূপে গ্রহণযোগ্য' উক্তি ধরব।

গণিত অধ্যয়নকালে আমরা কিছু বাক্যের মুখোমুখি হয়ে থাকি যা নীচে দেওয়া হল :

*দুই যোগ দুই-এ চার হয়।*

*দুটি ধনাত্মক সংখ্যার যোগফল ধনাত্মক।*

*সব মৌলিক সংখ্যাগুলো বিজোড় সংখ্যা।*

এই বাক্যগুলোর প্রথম দুটি সত্য এবং তৃতীয়টি মিথ্যা। এই বাক্যগুলো সম্পর্কে কোনো সন্দেহ নেই। অতএব এগুলো হল উক্তি।

তোমরা কি এমন কোনো বাক্যের উদাহরণ ভাবতে পারো যা অনিশ্চিত বা অস্পষ্ট? নীচের বাক্যটি নিয়ে চর্চা করো:

*$x$ ও $y$ এর যোগফল $0$ থেকে বড়ো।*

এখানে আমরা নিশ্চিত হতে পারি না যে বাক্যটি সত্য বা মিথ্যা, যতক্ষণ না আমরা $x$ বা $y$ সম্পর্কে জানতে পারছি। উদাহরণ স্বরূপ, $x = 1, y = -3$ -এর জন্য এটি সত্য নয় কিন্তু $x = 1, y = 0$ -এর জন্য এটি সত্য। অতএব এই বাক্যটি উক্তি নয়। কিন্তু নিম্নলিখিত বাক্যটি :

*যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা $x$ ও $y$ -এর ক্ষেত্রে, $x$ ও $y$ -এর যোগফল শূন্য থেকে বড়ো* — এটি একটি উক্তি।

এখন নীচের বাক্যগুলো বিবেচনা করো :

*আহা, কী সুন্দর!*

*দরজা খোলো।*

*তুমি কোথায় যাচ্ছ?*

এগুলো কি উক্তি? না, কারণ প্রথমটি বিস্ময়সূচক বাক্য, দ্বিতীয়টি আদেশসূচক, তৃতীয়টি প্রশ্নবোধক। এগুলোর কোনোটিই গাণিতিক উক্তি নয়। যে সব বাক্য পরিবর্তনশীল সময় যেমন, 'আজ', 'আগামীকাল' অথবা 'গতকাল' যুক্ত এগুলো উক্তি হয় না। কারণ এখানে কোন্ সময়কে সূচিত করা হচ্ছে তা আমাদের অজ্ঞাত। উদাহরণস্বরূপ

*আগামীকাল শুক্রবার।*

এটি উক্তি নয়। এই বাক্যটি কোনো এক বৃহস্পতিবারের জন্য সত্য কিন্তু অন্য কোনো দিনের জন্য সত্য নয়। এই বিষয়টি অপর বাক্য যেগুলোতে বিনা সম্বোধনে সর্বনামের প্রয়োগ হয় সে সব ক্ষেত্রে এবং যে সব বাক্যে 'এখানে' 'সেখানে' ইত্যাদি উল্লেখ্যে অনিশ্চিত স্থানকে নির্দেশ করে, এরূপ ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। উদারহণ স্বরূপ,

*সে একজন গণিত স্নাতক।*

*কাশ্মীর এখান থেকে অনেক দূর।*

এগুলো উক্তি নয়।

এখন অপর একটি বাক্য বিবেচনা করো—

*40 দিনে একটি মাস হয়।*

তোমরা কি এটিকে উক্তি বলবে? লক্ষ করো এখানে উল্লিখিত সময় অনিশ্চিত অর্থাৎ 12 মাসের কোনো একটি মাস। কিন্তু আমাদের জানা আছে বাক্যটি সর্বদা মিথ্যা (যে কোনো মাসের সাপেক্ষে), যেহেতু কোনো মাসের সর্বাধিক দিন সংখ্যা 31 এর বেশি হয় না। অতএব, এই বাক্যটি একটি উক্তি। সুতরাং একটি বাক্য কেবল সত্য বা মিথ্যা হলে কিন্তু উভয়ই না হলে তবে বাক্যটি উক্তি হবে।

যখন আমরা উক্তি নিয়ে কাজ করি, আমরা সাধারণত এদেরকে ছোটো হরফ $p, q, r, \ldots$ ইত্যাদি দিয়ে চিহ্নিত করি। উদাহরণ স্বরূপ, "আগুন সর্বদা উষ্ণ হয়" উক্তিটিকে আমরা p দিয়ে চিহ্নিত করতে পারি। এটাকে এরূপেও লেখা যায়

$p$: আগুন সর্বদা উষ্ণ হয়।

**উদাহরণ 1 :** নিচের বাক্যগুলো উক্তি হবে কিনা যাচাই করো। তোমার উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দাও।

(i) 8 সংখ্যাটি 6 -এর চেয়ে ছোটো।

(ii) প্রত্যেক সেট একটি সসীম সেট।

(iii) সূর্য একটি নক্ষত্র।

(iv) গণিত এক মজাদার বিষয়।

(v) বিনা মেঘে বৃষ্টি হয় না।

(vi) এখান থেকে চেন্নাই কত দূর?

**সমাধান :** (i) এই বাক্যটি মিথ্যা কারণ 8 সংখ্যাটি 6 থেকে বড়ো। অতএব এটি একটা উক্তি।

(ii) এই উক্তিটিও মিথ্যা কারণ সসীম এমনও সেট আছে। অতএব এটি একটি উক্তি।

(iii) বিজ্ঞানসম্মতরূপে বিষয়টি প্রতিষ্ঠিত যে সূর্য একটি নক্ষত্র এবং তাই বাক্যটি সর্বদা সত্য। অতএব এটি একটি উক্তি।

(iv) এই বাক্যটি আপেক্ষিক কারণ যারা গণিত পছন্দ করেন তাদের কাছে মজাদার কিন্তু অন্যদের ক্ষেত্রে এটি নাও হতে পারে। এটি থেকে বোঝা যায় বাক্যটি সর্বদা সত্য নয়।

(v) বিজ্ঞানসম্মত রূপে প্রাকৃতিক ঘটনায় এটি প্রতিষ্ঠিত যে বৃষ্টির আগে আকাশে মেঘ জমে। অতএব, বাক্যটি সর্বদা সত্য। সুতরাং এটি একটি উক্তি।

(vi) এটি একটি প্রশ্নবোধক বাক্য উপরন্তু এটি "এখানে" শব্দ যুক্ত। অতএব, এটি একটি উক্তি নয়।

উপরের উদাহরণগুলো থেকে দেখা যায় যখন আমরা একটি বাক্যকে উক্তি বলি তখন আমাদের সবসময় বলা দরকার এটি কেন উক্তি হয়। এই "কেন", উপরের চেয়ে অধিকতর গুরুত্বপূর্ণ।

## অনুশীলনী 14.1

**1.** নিম্নলিখিত বাক্যগুলোর কোন্‌গুলো উক্তি ? তোমার উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দাও ?

(i) 35 দিনে একটি মাস হয়।
(ii) গণিত কঠিন বিষয়।
(iii) 5 ও 7 -এর যোগফল 10 -এ চেয়ে বড়ো।
(iv) একটি সংখ্যার বর্গ একটি জোড় সংখ্যা হয়।
(v) একটি চতুর্ভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান।
(vi) এ প্রশ্নটির উত্তর করো।
(vii) (-1) ও 8-এর গুণফল হল 8
(viii) একটি ত্রিভুজের সবগুলো অন্ত:কোণের সমষ্টি 180।
(ix) আজ একটি তুফানি দিন
(x) সব বাস্তব সংখ্যাগুলো হল জটিল সংখ্যা

**2.** তিনটি বাক্যের উদাহরণ দাও যারা উক্তি নয়। উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দাও।

## 14.3 পুরোনো উক্তি হতে নূতন উক্তি (New Statements From Old.)

আমরা যখন পূর্বে জ্ঞাত উক্তি থেকে নূতন উক্তি গঠনের বিধি নিয়ে বিচার করব। 1854 সালে ইংরেজ গণিতজ্ঞ "জর্জ বুল" ওনার "The laws of Thoughtws" পুস্তকে এসব বিধিগুলো নিয়ে বিচার-বিবেচনা করেছেন। এখানে আমরা দুটি কৌশল নিয়ে আলোচনা করব।

উক্তি সম্পর্কে অধ্যয়নের প্রথম ধাপে, আমরা এক গুরুত্বপূর্ণ কৌশল নিয়ে দৃষ্টিপাত করব যার প্রয়োগে গাণিতিক উক্তি গভীরভাবে অনুধাবন করা যায়। এই কৌশল আমাদের জানতে সাহায্য করবে যে প্রদত্ত কোনো উক্তি শুধু সত্যতা সম্পর্কে নয় উপরন্তু বোঝাতে সাহায্য করে উক্তিটি সত্য না হওয়ার অর্থ।

### 14.3.1 একটি উক্তির না-ক্রিয়া (Negattion of a statement)

কোন একটি উক্তির অস্বীকার করাকে উক্তিটির না-ক্রিয়া বলা হয়।

ধরা যাক একটি উক্তি :

*p: নতুন দিল্লি একটি শহর*

এই উক্তিটির না-ক্রিয়া হল

*এটা ঠিক নয় যে নতুন দিল্লি একটি শহর*

এটাকে আরও লেখা যায়

*এটা মিথ্যা যে নতুন দিল্লি একটি শহর।*

সহজভাবে এটাকে বলা যায়

*নতুন দিল্লি একটি শহর নয়।*

**সংজ্ঞা 1** যদি p একটি উক্তি হয়, তবে $p$ -এর না-ক্রিয়াও একটি উক্তি এবং এটাকে $\sim p$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয় এবং পড়া হয় '$p$ নয়'।

**দ্রষ্টব্য** কোনো উক্তির না-ক্রিয়া গঠনে- "এটা ঠিক নয় যে" অথবা "এটা মিথ্যা যে" শব্দগুলো ব্যবহার হয়।

এখানে একটি উদাহরণ দেওয়া হল যা থেকে বোঝা যায় কোনো উক্তির না-ক্রিয়া পর্যবেক্ষণে কীভাবে এটি সহজ বোধোধয় হয়।

ধরো একটি উক্তি

*$p$: জার্মানে প্রত্যেকে জার্মান ভাষায় কথা বলে।*

এই বাক্যটির প্রত্যাখ্যানে বলা হয় যে জার্মানের প্রত্যেক লোক জার্মান ভাষা বলে না। এটির তাৎপর্য এই নয় যে জার্মানের কেউই জার্মান ভাষায় কথা বলে না। এটি কেবল বোঝায় যে কমপক্ষে জার্মানের একজন জার্মান ভাষা বলে না।

আমরা আরও উদাহরণ আলোচনা করব।

**উদাহরণ 2** নিম্নলিখিত উক্তিগুলোর না-ক্রিয়া লেখো :

(i) আয়তক্ষেত্রের উভয় কর্ণই সমান দৈর্ঘ্যের হয়।

(ii) $\sqrt{7}$ অমূলদ ।

**সমাধান :** (i) এই উক্তিটি বলে যে একটি আয়তক্ষেত্রের, উভয় কর্ণের দৈর্ঘ্য সমান হয়। এর অর্থ এই যে, যদি তুমি যে কোনো আয়তক্ষেত্র নাও, তবে তাদের কর্ণদ্বয় সমান দৈর্ঘ্যের হবে। উক্তিটির না-ক্রিয়া হল

*এটি মিথ্যা যে একটি আয়তক্ষেত্রের উভয় কর্ণই সমান দৈর্ঘ্যের হয়*

অর্থাৎ কমপক্ষে একটি আয়তক্ষেত্র আছে যার উভয় কর্ণ সমান হয়।

(ii) উক্তি (ii) -এর না-ক্রিয়া এভাবেও লেখা যায়

এটা ঠিক নয় যে $\sqrt{7}$ মূলদ।

এটাকে আরও লেখা যায় যে

$\sqrt{7}$ মূলদ নয়।

**উদাহরণ 3** নিম্নলিখিত উক্তিগুলোর না-ক্রিয়া লেখো এবং লব্ধ উক্তির সত্যতা যাচাই করো।

(i) অস্ট্রেলিয়া একটি মহাদেশ

(ii) এমন কোনো চতুর্ভুজের অস্তিত্ব নেই যার সবগুলো বাহু সমান।

(iii) প্রতিটি স্বাভাবিক সংখ্যা 0 থেকে বড়ো।

(iv) 3 এবং 4 এর যোগফল 9।

**সমাধান :** (i) উক্তিটির না-ক্রিয়া হল

*এটা মিথ্যা যে অস্ট্রেলিয়া একটি মহাদেশ।*

এটাকে এভাবেও লেখা যায়

*অস্ট্রেলিয়া একটি মহাদেশ নয়।*

আমরা জানি যে উক্তিটি মিথ্যা।

(ii) উক্তিটির না-ক্রিয়া হল

*এটা ঠিক নয় যে এমন কোনো চতুর্ভুজের অস্তিত্ব নেই যার সব বাহুগুলো সমান।*

যার তাৎপর্য হল

*এমন চতুর্ভুজের অস্তিত্ব আছে যার সব বাহু সমান।*

এই উক্তিটি সত্য কারণ আমরা জানি বর্গক্ষেত্র একটি চতুর্ভুজ যার সবগুলো বাহু সমান।

(iii) উক্তি না-ক্রিয়া হল

*এটা মিথ্যা যে স্বাভাবিক সংখ্যা 0 থেকে বড়ো।*

এটাকে অন্যভাবে লেখা যায়

এমন একটি স্বাভাবিক সংখ্যার অস্তিত্ব আছে যা 0 থেকে বড়ো নয়।

এই উক্তি মিথ্যা

(iv) উক্তিটির না-ক্রিয়া হল

*এটা মিথ্যা যে 3 এবং 4 এর যোগফল 9 ।*

এটাকে অন্যভাবে লেখা যেতে পারে

3 এবং 4 এর যোগফল 9 নয় ।

এই উক্তিটি সত্য।

### 14.3.2 যৌগিক উক্তি (Compound Statements)

কয়েকটি সংযোজক যেমন "এবং", "অথবা" ইত্যাদি প্রয়োগে একাধিক উক্তিকে জুড়ে দিয়ে অনেক গাণিতিক উক্তি পাওয়া যায়। নীচের উক্তিটি লক্ষ করো

$p$: বাল্ব অথবা বৈদ্যুতিক তারে কিছু ত্রুটি আছে।

এই উক্তিটির অর্থ হল বাল্বে কোনো ত্রুটি আছে বা বৈদ্যুতিক তারে কোনো ত্রুটি আছে।

সুতরাং, প্রকৃতপক্ষে প্রদত্ত উক্তিটি দুটি ক্ষুদ্রতর উক্তির সমন্বয়ে গঠিত :

*q: বাল্বে কিছু ত্রুটি আছে।*

*r: বৈদ্যুতিক তারে কিছু ত্রুটি আছে।*

এই উক্তি দুটি "অথবা" সংযোজক দিয়ে সংযোগ করা হয়েছিল।

এখন, নীচের আর দুটি উক্তিকে ধরা যাক :

*p: 7 একটি বিজোড় সংখ্যা।*

*q: 7 একটি মৌলিক সংখ্যা।*

এই উক্তি দুটিকে "এবং" সংযোজক প্রয়োগ করে পাই

*r: 7 বিজোড় এবং মৌলিক উভয় প্রকার সংখ্যা।*

এটি একটি যৌগিক উক্তি।

এ থেকে নিম্নের সংজ্ঞা পাওয়া যায়।

**সংজ্ঞা 2** একটি যৌগিক উক্তি হল এমন একটি উক্তি যা দুই বা ততোধিক উক্তি দিয়ে তৈরি। এক্ষেত্রে, প্রতিটি উক্তিকে বলা হয় একটি *উপাংশ উক্তি (Component Statement)*।

নিচের উদাহরণগুলো লক্ষ করো

**উদাহরণ 4** নিচের যৌগিক উক্তিগুলোর উপাংশ উক্তি নির্ণয় করো।

(i) আকাশ নীল এবং ঘাস সবুজ হয়।

(ii) বৃষ্টি হচ্ছে এবং ঠান্ডা পড়ছে।

(iii) সব মূলদ সংখ্যা বাস্তব সংখ্যা এবং সব বাস্তব সংখ্যা হল জটিল সংখ্যা।

(iv) 0 একটি ধনাত্মক সংখ্যা অথবা একটি ঋণাত্মক সংখ্যা।

**সমাধান :** চলো আমরা একটির পর একটি আলোচনা করি।

(i) উপাংশ উক্তিগুলো হল

*p: আকাশ নীল* ।

*q: ঘাস সবুজ* ।

সংযোজক শব্দ হল 'এবং'।

(ii) এখানে উপাংশ উক্তিগুলো হল

*p: বৃষ্টি হচ্ছে।*

*q: ঠান্ডা পড়ছে।*

সংযোজক শব্দ হল 'এবং'।

(iii) উপাংশ উক্তিগুলো হল

*p: সব মূলদ সংখ্যা বাস্তব।*

*q: সব বাস্তব সংখ্যা হল জটিল* সংখ্যা।

সংযোজক শব্দ হল 'এবং'।

(iv) এখানে উপাংশ উক্তিগুলো হল

*p: 0 একটি ধনাত্মক সংখ্যা*

*q: 0 একটি ঋণাত্মক সংখ্যা*

এখানে সংযোজক শব্দ হল 'এবং'।

**উদাহরণ 5** নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে উপাংশ উক্তিগুলো নির্ণয় করো এবং এরা সত্য বা মিথ্যা কিনা যাচাই করো।

(i) একটি বর্গক্ষেত্র হল একটি চতুর্ভুজ এবং এর চারটি বাহু সমান।

(ii) সব মৌলিক সংখ্যা হয় জোড় অথবা বিজোড়।

(iii) এক ব্যক্তি যিনি গণিত অথবা কম্পিউটার বিজ্ঞান অধ্যয়ন করেন তিনি MCA-তে প্রবেশ করতে পারেন।

(iv) চন্ডীগড় হল হরিয়ানা এবং ইউ পি-এর রাজধানী।

(v) $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা অথবা একটি অমূলদ সংখ্যা।

(vi) 2, 4 এবং 8 -এর একটি গুণিতক 24

**সমাধান** (i) উপাংশ উক্তিগুলো হল

*p: একটি বর্গক্ষেত্র একটি চতুর্ভুজ।*

*q: একটি বর্গক্ষেত্রের সবগুলো বাহু সমান।*

আমরা জানি উভয় উক্তিগুলো সত্য। এখানে সংযোজক শব্দ 'এবং'।

(ii) উপাংশ উক্তিগুলো হল

*p: সব মৌলিক সংখ্যা বিজোড় সংখ্যা।*

*q: সব মৌলিক সংখ্যা জোড় সংখ্যা।*

এখানে উভয় উক্তি মিথ্যা এবং সংযোজক শব্দ হল 'অথবা'।

(iii) উপাংশ উক্তিগুলো হল

*p: এক ব্যক্তি যিনি কম্পিউটার বিজ্ঞানে অধ্যয়ন করেন তিনি MCA -তে প্রবেশ করতে পারেন।*

*q: এক ব্যক্তি যিনি কম্পিউটার বিজ্ঞানে অধ্যয়ন করেন তিনি MCA -তে প্রবেশ করতে পারেন।*

উভয় উক্তিগুলো সত্য। এখানে সংযোজক শব্দ 'অথবা'।

(iv) উপাংশ উক্তিগুলো হল

*p: চন্ডীগড় হল হরিয়ানার রাজধানী ।*

*q: চন্ডীগড় হল ইউ পি এর রাজধানী ।*

প্রথম উক্তিটি সত্য কিন্তু দ্বিতীয়টি মিথ্যা। এখানে সংযোজক শব্দ হল 'এবং'।

(v) উপাংশ উক্তিগুলো হল

*p*: $\sqrt{2}$ *একটি মূলদ সংখ্যা* ।

*q*: $\sqrt{2}$ *একটি অমূলদ সংখ্যা* ।

প্রথম উক্তিটি মিথ্যা এবং দ্বিতীয়টি সত্য। এখানে সংযোজক শব্দ হল 'অথবা'।

(vi) উপাংশ উক্তিগুলো হল

*p* : *2 এর একটি গুণিতক 24* ।

*q* : *4 এর একটি গুণিতক 24* ।

*r* : *8 এর একটি গুণিতক 24* ।

তিনটি উক্তিই সত্য। এখানে সংযোজক শব্দগুলো হল 'এবং'। সুতরাং, আমরা লক্ষ করি যে, যৌগিক উক্তিগুলো তৈরি হয়, যেখানে 'এবং' 'অথবা' ইত্যাদি সংযোজক হিসেবে ব্যবহৃত হয়। এই শব্দগুলো গণিতশাস্ত্রে বিশেষ অর্থ বহন করে। আমরা এ ব্যাপারটা নিম্নলিখিত অনুচ্ছেদে আলোচনা করব।

## অধ্যায় 14.2

**1.** নিম্নলিখিত উক্তিগুলোর না-ক্রিয়া লেখো :

(i) চেন্নাই তামিলনাড়ুর রাজধানী।

(ii) $\sqrt{2}$ একটি জটিল সংখ্যা নয়।

(iii) সব ত্রিভুজ সমবাহু ত্রিভুজ নয়।

(iv) 2 সংখ্যাটি 7 -এর চেয়ে বড়ো।

(v) প্রতিটি স্বাভাবিক সংখ্যা একটি অখণ্ড সংখ্যা।

**2.** নিম্নলিখিত উক্তি যুগল একে অপরের না-ক্রিয়া কিনা?

(i) x সংখ্যাটি একটি মূলদ সংখ্যা নয়।
x সংখ্যাটি একটি অমূলদ সংখ্যা নয়।

(ii) x সংখ্যাটি একটি মূলদ সংখ্যা নয়।
x সংখ্যাটি একটি অমূলদ সংখ্যা নয়।

**3.** নিম্নলিখিত যৌগিক বাক্যগুলোর উপাংশ উক্তি নির্ণয় করো এবং এগুলো সত্য বা মিথ্যা কিনা যাচাই করো।

(i) 3 সংখ্যাটি মৌলিক অথবা এটি বিজোড়।

(ii) সব অখন্ড সংখ্যা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক।

(iii) 3, 11 এবং 5 দিয়ে 100 বিভাজ্য হয়।

## 14.4 বিশেষ শব্দ/বাক্যাংশ (Special Words/Phrases)

যৌগিক উক্তিতে কয়েকটি সংযোজক শব্দ যেমন, 'এবং', 'অথবা' ইত্যাদি প্রায়ই গাণিতিক উক্তিতে ব্যবহৃত হয়।

এগুলোকে সংযোজক বলা হয়। যখনই আমরা যৌগিক উক্তি ব্যবহার করি, এই শব্দগুলোর গুরুত্ব ভালো ভাবে বোঝা দরকার। নীচে আমরা এটা নিয়ে আলোচনা করব।

**14.4.1 সংযোজক 'এবং' (The Word 'And') :** 'এবং' প্রয়োগে একটি যৌগিক বাক্য লক্ষ করো।

*$p$ : একটি বিন্দুর জন্য একটি স্থান থাকে এবং এর স্থিতি নির্ণয় করা যায়।*

এই উক্তিটিকে দুটি উপাংশ উক্তিতে ভাঙা যায়

*$q$ : একটি বিন্দুর জন্য একটি স্থান থাকে।*

*$r$ : এর স্থিতি নির্ণয় করা দরকার।*

এখানে আমরা লক্ষ করি যে উভয় উক্তি সত্য।

অপর একটি উক্তি লক্ষ করো

$p$: 5, 6 এবং 7 দিয়ে 42 বিভাজ্য

$q$: 5 দিয়ে 42 বিভাজ্য।

$r$: 6 দিয়ে 42 বিভাজ্য।

$s$: 6 দিয়ে 42 বিভাজ্য।

এখানে, আমরা জানি যে প্রথমটি মিথ্যা যেখানে অপর দুটি সত্য।

সংযোজক 'এবং' -এর ক্ষেত্রে আমরা নিম্নলিখিত নিয়মগুলো পাই।

1. 'এবং' সংযোগে যৌগিক বাক্য সত্য হবে যদি এর সব উপাংশগুলো সত্য হয়।
2. 'এবং' সংযোগে যৌগিক বাক্য মিথ্যা হবে যদি এর কোনো একটি উপাংশ মিথ্যা হয় অর্থাৎ কয়েকটি উপাংশ বা সবগুলো উপাংশ মিথ্যা হলে যৌগিক বাক্য মিথ্যা হয়।

**উদাহরণ 6** নিম্নলিখিত যৌগিক বাক্যের উপাংশগুলো লেখো এবং যৌগিক বাক্যটি সত্য বা মিথ্যা কিনা যাচাই করো।

(i) একটি রেখা সোজা হয় এবং উভয় দিকে অসীম পর্যন্ত বাড়ানো যায়।

(ii) 0 প্রতিটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং প্রতিটি ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার চেয়ে ছোটো।

(iii) সব সজীব বস্তুর দুটি পা এবং দুটি চোখ আছে।

**সমাধান** (i) উপাংশ উক্তিগুলো হল

$p$: একটি রেখা সোজা হয়।

$q$: একটি রেখা উভয় দিকে অসীম পর্যন্ত বাড়ানো যায়।

উভয় উক্তিই সত্য, অতএব যৌগিক বাক্যটি সত্য।

(ii) উপাংশ উক্তিগুলো হল

*p: 0 প্রতিটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার চেয়ে ছোটো।*

*q: 0 প্রতিটি ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার চেয়ে ছোটো।*

দ্বিতীয় উক্তিটি মিথ্যা। অতএব, যৌগিক উক্তিটি মিথ্যা।

(iii) উপাংশ উক্তি দুটি হল

*p: সব সজীব বস্তুর দুটি পা আছে*

*q: সব সজীব বস্তুর দুটি চোখ আছে।*

যেহেতু উক্তিগুলো মিথ্যা, অতএব, যৌগিক উক্তিটি মিথ্যা।

এখন নীচের যৌগিক বাক্যটি লক্ষ করো

*p: অ্যালকোহল এবং জলের মিশ্রণ রাসায়নিক পদ্ধতিতে পৃথক করা যায়।*

'এবং' যুক্ত এই উক্তিটি যৌগিক উক্তি নয়। এখানে 'এবং' শব্দটি দুটি জিনিষকে যুক্ত করেছে- অ্যালকোহল এবং জল। এটা থেকে একটি গুরুত্বপূর্ণ দ্রষ্টব্যে আসতে পারি।

**দ্রষ্টব্য** "এবং" সংযুক্ত সব বাক্যগুলোকে সর্বদা যৌগিক বাক্য রূপে মনে করো না, যা উপরের উদাহরণে দেখানো হয়েছে। অতএব, 'এবং' শব্দটি এক্ষেত্রে সংযোজক হিসেবে ব্যবহৃত হয়নি।

**14.4.2 সংযোজক রূপে শব্দ 'অথবা' (The Word 'or")** চলো নীচের উক্তিটি লক্ষ করি-

*p: একটি সমতলে দুটি রেখা হয় একটি বিন্দুতে ছেদ করে অথবা এরা পরস্পর সমান্তরাল হয়।*

আমরা জানি যে এই উক্তিটি সত্য। এটি কি বোঝায়? এটা বোঝায় একটি সমতলে দুটি রেখা যদি ছেদ করে, তবে তারা সমান্তরাল হয় না। অন্যভাবে, যদি দুটি রেখা সমান্তরাল না হয়, তবে তারা একটি বিন্দুতে ছেদ করে। অর্থাৎ উক্তিটি উভয় পরিস্থিতিতে সত্য।

'অথবা' যুক্ত উক্তিকে বোঝার আগে আমরা লক্ষ করি যে 'অথবা' শব্দটি ইংরেজি ভাষায় দুই ভাবে ব্যবহৃত হয়। চলো প্রথমে আমরা নীচের বাক্যটিকে দেখি।

*p: একটি রেস্তোরায় একটি আইসক্রিম বা পেপসি একটি থালা সহ পাওয়া যায়।*

এর অর্থ এই যে, এক ব্যক্তি যিনি আইসক্রিম পছন্দ করেন না থালা সহ একটি পেপসি পেতে পারেন অথবা যিনি পেপসি পছন্দ করেন না থালাসহ একটি আইসক্রিম পেতে পারেন। অর্থাৎ যিনি পেপসি পছন্দ করেন না। তিনি আইসক্রিম পেতে পারেন। একজন ব্যক্তির আইসক্রিম ও পেপসি দুটিই হতে পারে না। এটাকে বলা হয় *বহির্ভুক্তি "অথবা" (exclusive 'or")* অপর একটি উক্তি লক্ষ করো-

*একজন শিক্ষার্থী যে জীববিদ্যা বা রসায়ন নিয়েছে সে মাইক্রোবায়োলজি প্রোগ্রামে এম.এসসি-এর জন্য আবেদন করতে পারে।*

এখানে আমরা বুঝতে পারছি, যে শিক্ষার্থী জীববিদ্যা এবং রসায়ন উভয়ই নিয়েছে সে মাইক্রোবায়োলজি প্রোগ্রামের জন্য আবেদন করতে পারে, আবার যে শিক্ষার্থী শুধুমাত্র একটি বিষয় নিয়েছে সেও মাইক্রোবায়োলজি প্রোগ্রামে আবেদন করতে পারে। এক্ষেত্রে আমরা অন্তর্ভুক্তি "অথবা" (Inclusive "or") ব্যবহার করেছি।

এই দুই প্রকার 'অথবা'-এর মধ্যে পার্থক্য ভালোভাবে বোঝা দরকার যা দিয়ে কোনো উক্তি সত্য বা মিথ্যা কিনা যাচাই করা যাবে।

চলো নিচের উদাহরণটি লক্ষ করি-

**উদাহরণ 7** নীচের উক্তিগুলোতে কোন্‌টি অন্তর্ভুক্তি "অথবা" বা বহির্ভুক্তি "অথবা" ব্যবহার হয়েছে, যুক্তিসহ উত্তর দাও।

(i) কোনো দেশে প্রবেশের ক্ষেত্রে তোমার পাসপোর্ট অথবা ভোটার রেজিস্ট্রেশন কার্ড দরকার।

(ii) ছুটির দিন বা রবিবার বিদ্যালয় বন্ধ থাকবে।

(iii) দুটি রেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে অথবা সমান্তরাল হয়।

(iv) শিক্ষার্থীরা তৃতীয় ভাষা হিসেবে ফরাসি বা সংস্কৃত পছন্দ করতে পারে।

**সমাধান** (i) এখানে এটি অন্তর্ভুক্তি "অথবা" কারণ একজন ব্যক্তির দেশে প্রবেশের জন্য পাসপোর্ট বা ভোটার রেজিস্ট্রেশন উভয়ই থাকতে পারে।

(ii) এটিও একটি অন্তর্ভুক্তি "অথবা" যেহেতু ছুটির দিনের পাশাপাশি রবিবারও বিদ্যালয় বন্ধ থাকে।

(iii) এটি বহির্ভুক্তি "অথবা" কারণ দুটি সরলরেখার ক্ষেত্রে ছেদ করা এবং সমান্তরাল হওয়া উভয়ই সম্ভব নয়।

(iv) এটিও বহির্ভুক্তি "অথবা" কেননা কোনো শিক্ষার্থী একই সাথে ফরাসি এবং সংস্কৃত উভয়ই পছন্দ করতে পারবে না।

### "অথবা" যোগে যৌগিক উক্তির নিয়মাবলি

1. "অথবা" যুক্ত একটি যৌগিক উক্তি সত্য হবে যখন একটি উপাংশ উক্তি সত্য হয় অথবা উভয় উপাংশ উক্তিই সত্য হয়।
2. "অথবা" যুক্ত একটি যৌগিক উক্তি মিথ্যা হবে যখন উভয় উপাংশ উক্তিই মিথ্যা হয়।

উদাহরণ স্বরূপ, নীচের উক্তিটি লক্ষ করো

*$p$: দুটি সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে অথবা এরা সমান্তরাল হয়।*

উপাংশ উক্তিগুলো হয়

*$q$: দুটি সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে।*

*$r$: দুটি সরলরেখা সমান্তরাল হয়।*

তাহলে, যখন $q$ সত্য হয় তবে $r$ মিথ্যা হয় এবং যখন $r$ সত্য হয় $q$ মিথ্যা হয়। সুতরাং যৌগিক উক্তি $p$ সত্য।

আরেকটি উক্তি লক্ষ করো

*$p$: 125 হল 7 অথবা 8 এর একটি গুণিতক।* -এর উপাংশ উক্তিগুলো হল

*$q$: 125 হল 7 -এর একটি গুণিতক।*

*$r$ : 125 হল 8 -এর একটি গুণিতক।*

q এবং r উভয়ই মিথ্যা। অতএব যৌগিক উক্তি p মিথ্যা।

আবার নীচের উক্তিটি লক্ষ করো :

*p: বিদ্যালয় বন্ধ থাকবে, যদি ছুটির দিন বা রবিবার হয়।*

উপাংশ উক্তি হল

*q: বিদ্যালয় বন্ধ থাকবে যদি ছুটির দিন হয়।*

*r: বিদ্যালয় বন্ধ থাকবে যদি রবিবার হয়।*

উভয়ই q ও r সত্য, অতএব, যৌগিক উক্তিটি সত্য।

অন্য আরেকটি উক্তি দেখো

*p: মুম্বাই হল কোলকাতা অথবা কর্ণাটক -এর রাজধানী।*

উপাংশ উক্তিগুলো

*q: মুম্বাই হল কোলকাতার রাজধানী।*

*r: মুম্বাই হল কর্ণাটকের রাজধানী।*

উভয় উক্তিই মিথ্যা। অতএব, যৌগিক উক্তিটি মিথ্যা। চলো নিচের উদাহরণটি লক্ষ করি।

উদাহরণ 8 : নিম্নলিখিত উক্তিগুলোতে কী ধরনের "অথবা" ব্যবহৃত হয়েছে সনাক্ত করো এবং উক্তিগুলো সত্য বা মিথ্যা কিনা যাচাই করো।

(i) $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা অথবা একটি অমূলদ সংখ্যা।

(ii) একটি সার্বজনীন পুস্তকালয়ে শিশুদের প্রবেশের জন্য বিদ্যালয় কর্তৃক প্রদত্ত পরিচয়পত্র অথবা বিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের তরফে চিঠির প্রয়োজন হয়।

(iii) একটি আয়তক্ষেত্র হল একটি চতুর্ভুজ অথবা 5-বাহু বিশিষ্ঠ একটি বহুভুজ।

**সমাধান** (i) উপাংশ উক্তিগুলো হল

*p:* $\sqrt{2}$ *একটি মূলদ সংখ্যা।*

*q:* $\sqrt{2}$ *একটি অমূলদ সংখ্যা।*

এখানে, আমরা জানি যে প্রথম উক্তিটি মিথ্যা এবং দ্বিতীয়টি সত্য। এটি বহির্ভুক্তি "অথবা"। সুতরাং, যৌগিক উক্তিটি সত্য।

(ii) এখানে উপাংশ উক্তি হল

*p: সর্বজনীন পুস্তকালয়ে প্রবেশের জন্য শিশুদের পরিচয়পত্র প্রয়োজন।*

*q: সার্বজনীন পুস্তকালয়ে প্রবেশের জন্য শিশুদের বিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের তরফে চিঠি প্রয়োজন।*

শিশুরা পুস্তকালয়ে প্রবেশ করতে পারবে যদি তাদের দুটির যে-কোনো একটি পরিচয়পত্র বা চিঠি থাকে, বা পাশাপাশি উভয়ই থাকে। অতএব, এটি হল অন্তর্ভুক্তি "অথবা" ফলে কার্ড বা চিঠি উভয়ই শিশুদের থাকলে যৌগিক উক্তিটি সত্য হবে।

(iii) এখানে এটি বহির্ভুক্তি "অথবা"। যখন আমরা উপাংশ উক্তিগুলোর দিকে তাকাই, আমরা উক্তিটির সত্যতা পাব।

**14.4.3 পরিমাণ নির্দেশক (Quantifiers)** পরিমাণ নির্দেশক হল এক বিশেষ শব্দ গোষ্ঠী (Phrases) যেমন, “এখানে অস্তিত্ব আছে” (There exists) এবং “সকলের জন্য” (For all)। গাণিতিক উক্তিতে “এখানে অস্তিত্ব আছে” শব্দ গোষ্ঠী ব্যবহৃত হয়, যেমন-

p : এমন একটি আয়তক্ষেত্রের অস্তিস্ত আছে যার সবগুলো বাহু সমান। এর অর্থ এই যে এখানে কমপক্ষে এমন একটি আয়তক্ষেত্র বিদ্যমান যার সবগুলো বাহু সমান।

“এখানে অস্তিত্ব আছে” -এর সাথে ঘনিষ্ঠভাবে ব্যবহৃত শব্দ গোষ্ঠী “প্রতিটির জন্য” (বা সকলের জন্য) “for every” (or for all)।

নীচের উক্তিটি লক্ষ করো

$$p: \textit{প্রতিটি মৌলিক সংখ্যা } p, \sqrt{p} \textit{ একটি অমূলদ সংখ্যা।}$$

এর অর্থ হল সকল মৌলিক সংখ্যার সেট S হলে, তবে S -এর সব সদস্য $p$ -এর জন্য, $\sqrt{p}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সাধারণভাবে, কোনো গাণিতিক উক্তিতে “প্রতিটির জন্য” শব্দ গোষ্ঠী প্রয়োগ করার অর্থ এই যে কোনো সেটে যদি একটি বিশেষ ধর্ম থাকে তবে তা সেটের সবগুলো পদের জন্য হতে হবে।

আমাদের লক্ষ করা উচিত, প্রদত্ত কোনো বাক্যে ঠিক কোথায় সংযোজক শব্দ ব্যবহৃত হবে তা জানা খুবই প্রয়োজন। উদাহরণস্বরূপ, নিম্নলিখিত বাক্য দুটির তুলনা করো :

1. প্রতিটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $x$ -এর জন্য এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $y$ -এর অস্তিত্ব আছে যেখানে $y < x$ ।
2. এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $y$ -এর অস্তিত্ব আছে যেখানে প্রতিটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $x$ -এর জন্য $y < x$ ।

যদিও উপরের উক্তি দুটি একই রকম মনে হয় কিন্তু তাদের অর্থ এক রকম নয়। প্রকৃতপক্ষে (1) নং সত্য (2) নং মিথ্যা। কোনো গাণিতিক উক্তি অর্থপূর্ণ হতে গেলে প্রতীক গুলো ঠিক ঠিক স্থানে প্রয়োগ করা আবশ্যক।

“এবং” ও “অথবা” শব্দগুলোকে সংযোজক (Connectives) এবং “এখানে অস্তিত্ব আছে” এবং “সকলের জন্য” গোষ্ঠী গুলোকে পরিমাণ নির্দেশক (Quantifiers) বলে।

সুতরাং, আমরা দেখেছি যে, অনেক গাণিতিক উক্তিতে বিশেষ কিছু শব্দ বা শব্দ গোষ্ঠীর প্রয়োগ হয়ে থাকে যার অর্থ বোঝা খুবই তাৎপর্যপূর্ণ, বিশেষ করে যখন আমরা বিভিন্ন উক্তির বৈধতা যাচাই করি।

## অনুশীলনী 14.3

**1.** নিম্নলিখিত প্রতিটি যৌগিক উক্তির ক্ষেত্রে প্রথমে সংযোজক শব্দ সনাক্ত করো এবং তারপর উপাংশ উক্তিতে বিভক্ত করো।

(i) সব মূলদ সংখ্যা বাস্তব এবং সব বাস্তব সংখ্যা জটিল নয়।

(ii) একটি পূর্ণ সংখ্যার বর্গ ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হয়।

(iii) বালুকারাশি রোদে খুব তাড়াতাড়ি উত্তপ্ত হয় এবং রাত্রিবেলায় তাড়াতাড়ি ঠান্ডা হয় না।

(iv) $x = 2$ এবং $x = 3$ হল $3x^2 - x - 10 = 0$ সমীকরণের বীজ।

**2.** নিম্নলিখিত উক্তিগুলোর পরিমাণ নির্দেশক (Quantifier) সনাক্ত করো এবং উক্তিগুলোর না-ক্রিয়া (Negagion) লেখো।

(i) এমন একটি সংখ্যার অস্তিত্ব আছে, যে নিজের বর্গের সমান।

(ii) প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা $x$ এর জন্য, $x + 1$ অপেক্ষা $x$ ক্ষুদ্রতর।

(iii) ভারতবর্ষের প্রতিটি রাজ্যের জন্য একটি রাজধানীর অস্তিত্ব আছে।

**3.** নিম্নলিখিত উক্তি জোড় পরস্পরের না-ক্রিয়া কিনা যাচাই করো। তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

(i) প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা $x$ ও $y$ এর জন্য $x + y = y + x$ সত্য হয়।

(ii) বাস্তব সংখ্যা $x$ ও $y$ এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $x + y = y + x$ হয়।

**4.** নিম্নলিখিত উক্তিগুলোর কোনটিতে অন্তর্ভুক্তি "অথবা" বা বহির্ভুক্তি "অথবা" ব্যবহৃত হয়েছে বলো। তোমার উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দাও।

(i) সূর্য উদিত হয় অথবা চাঁদ অস্ত যায়।

(ii) ড্রাইভিং লাইসেন্সের আবেদন করতে তোমার রেশন কার্ড অথবা পাসপোর্ট থাকা উচিত।

(iii) সব পূর্ণ সংখ্যাগুলো ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক।

## 14.5 অনুসৃতি (Implications)

এই অনুচ্ছেদে "যদি-তখন" (if-then) "কেবলমাত্র যদি" (only if), "যদি এবং কেবলমাত্র যদি" (if and only if) অনুসৃতি নিয়ে আলোচনা করব।

"যদি-তখন" (বা যদি... তবে....) দিয়ে উক্তি গণিতে সচরাচর ব্যবহৃত হয়। উদাহরণ স্বরূপ নীচের উক্তিটি লক্ষ করো

*$r$: যদি তোমার জন্ম কোনো দেশে হয়, তবে তুমি সে দেশের একজন নাগরিক।*

যখন আমরা এই উক্তিটিকে দেখি, আমরা তখন লক্ষ করি এটি নীচের উক্তি $p$ ও $p$ কে নির্দেশ করে।

*$p$: তোমার জন্ম কোনো দেশে হয়।*

*$q$: তুমি সে দেশের একজন নাগরিক।*

তাহলে "যদি $p$ তখন $q$" বাক্যটি বোঝায়, কোনো ঘটনায় যদি $p$ সত্য হয়, তখন $q$ অবশ্যই সত্য হবে।

"যদি $p$ তখন $q$" উক্তির ব্যাপারে একটি গুরুত্বপূর্ণ ঘটনা এই যে যখন $p$ মিথ্যা হয় সেক্ষেত্রে $q$ সম্পর্কে কিছু বলা নেই (অথবা উল্লেখ করে না)। উদাহরণ স্বরূপ, যদি তোমার জন্ম কোনো দেশে না হয়, তবে $q$ সম্পর্কে তুমি কিছু বলতে পার না। এটাকে অন্যভাবে বলা যায়, $p$ না ঘটার সাথে $q$ ঘটার কোনো সম্পর্ক নেই।

"যদি $p$ তখন $q$" -এর ক্ষেত্রে অপর বিষয়টি লক্ষণীয় যে উক্তিটি এটা প্রকাশ করে না $p$ ঘটছে কিনা।

"যদি $p$ তবে $q$" উক্তিটি বোঝানোর অনেক উপায় আছে। এ প্রসঙ্গে নিম্নলিখিত উক্তিগুলো দৃষ্টান্ত হিসেবে দেওয়া যেতে পারে

*$r$: যদি একটি সংখ্যা 9 -এর গুণিতক হয়, তবে এটি একটি 3-এর গুণিতক।*

ধরো $p$ ও $q$ নিচের উক্তিগুলোকে নির্দেশ করে

*$p$: একটি সংখ্যা 9-এর গুণিতক।*

*$q$: একটি সংখ্যা 3-এর গুণিতক।*

তাহলে, যদি $p$ তখন $q$ নিচেরগুলোর সদৃশ

1. $p$ ফলস্বরূপ (Implies) $q$ কে $p \Rightarrow q$ দিয়ে সূচিত হয়। $\Rightarrow$ প্রতীকটি বোঝায় ফলস্বরূপ এটি বলা যায় যে, একটি সংখ্যা 9 -এর গুণিতক হলে সেটি 3 -এরও গুণিতক হয়।
2. $p$ হল $q$ -এর জন্য একটি যথেষ্ট শর্ত।
   এটি বলা যায় যে, একটি সংখ্যা 9 -এর গুণিতক হয় এটা জানলে এই সিদ্ধান্ত করা যথেষ্ট যে এটি একটি 3 -এরও গুণিতক।
3. $p$ কেবলমাত্র যদি $q$
   এটার অর্থ এই যে একটি সংখ্যা 9 -এর গুণিতক হবে কেবলমাত্র যদি এটি একটি 3 -এর গুণিতক হয়।
4. $q$ হল $p$ -এর জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত।
   এটার অর্থ যখন কোনো সংখ্যা 9 -এর গুণিতক হয়, অবশ্যই এটি 3 -এর গুণিতক।
5. $\sim q$ ফলস্বরূপ (Implies) $\sim p$.
   এর অর্থ যদি একটি সংখ্যা 3 -এর গুণিতক না হয়, তাহলে এটি 9 -এর গুণিতকও নয়।

**14.5.1 বিরুদ্ধ ধনাত্মক এবং বিপরীত (Contrapositive and Converse)** বিরুদ্ধ ধনাত্মক (Contrapositive) এবং বিপরীত (Converse) হল দুটি অপর বিশেষ উক্তি যা প্রদত্ত উক্তি "যদি-তখন" উক্তি থেকে তৈরি হয়। উদাহরণ স্বরূপ নীচের "যদি-তখন" উক্তি লক্ষ করো।

*যদি বাহ্যিক পরিবেশ পরিবর্তিত হয়, তখন জৈবিক পরিবেশ পরিবর্তিত হয়।*

এটির বিরুদ্ধ ধনাত্মক উক্তি হয়

*যদি জৈবিক পরিবেশ পরিবর্তিত না হয়, তখন বাহিক্য পরিবেশ পরিবর্তিত হয় না।*

লক্ষ করো এই উক্তিগুলো একই অর্থ বহন করে।

ভালোভাবে বোঝার জন্য, নিচের আরও উদাহরণগুলো লক্ষ করো।

**উদাহরণ 9** নিম্নলিখিত উক্তিগুলোর বিরুদ্ধ ধনাত্মক লেখো :

(i) যদি একটি সংখ্যা 9 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তখন এটি 3 দ্বারা বিভাজ্য।

(ii) যদি তোমার জন্ম ভারতে হয়, তবে তুমি একজন ভারতের নাগরিক।

(iii) যদি একটি ত্রিভুজ সমবাহু হয়, তবে এটি সমদ্বিবাহু।

**সমাধান** উপরের উক্তিগুলোর বিরুদ্ধ ধনাত্মক হল

(i) যদি একটি সংখ্যা 3 দিয়ে বিভাজ্য না হয়, তখন সেটি 9 দিয়ে বিভাজ্য হয় না।

(ii) যদি তুমি একজন ভারতীয় নাগরিক না হও, তবে তোমার জন্ম ভারতে হয়নি।

(iii) যদি একটি ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু না হয়, তবে এটি সমবাহু নয়।

উপরের উদাহরণগুলো থেকে "যদি $p$, তবে $q$"। পরে আমরা কোনো উক্তির বিপরীত (Converse) নিয়ে আলোচনা করব।

একটি প্রদত্ত উক্তি "যদি $p$, তবে $q$" -এর বিপরীত হল যদি $q$, তবে $p$।

উদাহরণ স্বরূপ উক্তিটির বিপরীত ক্রিয়া

*$p$: যদি একটি সংখ্যা 10 দিয়ে বিভাজ্য হয়, এটি 5 দিয়েও বিভাজ্য হয়।*

*$q$: যদি একটি সংখ্যা 5 দিয়ে বিভাজ্য হয়, তবে এটি 10 দিয়ে বিভাজ্য হয়।*

**উদাহরণ 10** নিম্নলিখিত উক্তিগুলোর বিপরীত লেখো।

(i) যদি n একটি জোড় সংখ্যা হয়, তবে $n^2$ জোড় সংখ্যা।

(ii) যদি তুমি বইটির সব অনুশীলনীগুলো অধ্যয়ন করে থাকো, তবে তুমি শ্রেণিতে A-গ্রেড পাবে।

(iii) যদি a ও b দুটি পূর্ণসংখ্যা এরূপ যে, $a > b$ তবে $a - b$ সর্বদা একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

**সমাধান** এই উক্তিগুলোর বিপরীত হল

(i) যদি $n^2$ জোড় সংখ্যাা হয়, তবে n জোড় সংখ্যা।

(ii) যদি তুমি শ্রেণিতে A গ্রেড পাও, তবে তুমি বইটির সব অনুশীলনীগুলো অধ্যয়ন করেছ।

(iii) যদি দুটি পূর্ণসংখ্যা a ও b এরূপ যে $a - b$ সর্বদা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে $a > b$ ।

**উদাহরণ 11** নীচের প্রতিটি যৌগিক বাক্যের ক্ষেত্রে, প্রথমে অনুরূপ উপাংশ চিহ্নিত করো। অতঃপর এদের সত্যতা যাচাই করো।

(i) যদি ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ হয়, তবে এটি সমদ্বিবাহু।

(ii) যদি a ও b পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে ab একটি মূলদ সংখ্যা।

**সমাধান** (i) উপাংশ উক্তিগুলো হল

*$p$: ত্রিভুজ ABC সমবাহু।*

*$q$: ত্রিভুজ ABC সমদ্বিবাহু।*

যেহেতু একটি সমবাহু ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু হয়, আমরা বলতে পারি যৌগিক বাক্যটি সত্য।

(ii) এখানের উপাংশ উক্তিগুলো হল

*$p$: $a$ ও $b$ পূর্ণসংখ্যা হয়।*

*$q$: $ab$ একটি মূলদ সংখ্যা।*

যেহেতু দুটি পূর্ণসংখ্যার গুণফল একটি পূর্ণসংখ্যা হয়, অতএব এটি মুলদ সংখ্যা। তাই যোগিক উক্তিটি সত্য।

'যদি এবং কেবল মাত্র যদি' (If and only if) '$\Leftrightarrow$' চিহ্ন দ্বারা সূচিত হয়, যা নিম্নলিখিত প্রদত্ত উক্তি p ও q এর সমতুল্য রূপ।

(i) $p$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $q$

(ii) $q$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $p$

(iii) $p$ হল $q$ এর জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত এবং বিপরীত ক্রমে।

(iv) $p \Leftrightarrow q$

নিচের উদাহরণটি লক্ষ করো

**উদাহরণ 12** নীচের দুই জোড়া উক্তি প্রদত্ত হল। "যদি এবং কেবলমাত্র যদি" প্রয়োগে এই দুটি উক্তিকে সংযুক্ত করো।

(i) $p$: যদি একটি আয়তক্ষেত্র একটি বর্গক্ষেত্র হয়, তবে এর চারটি বাহু সমান হয়।

$q$: যদি একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি বাহুর সবগুলো সমান হয়, তবে আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র।

(ii) $p$: যদি একটি সংখ্যার অঙ্কগুলোর যোগফল 3 দিয়ে বিভাজ্য হয়, তবে সংখ্যাটি 3 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

$q$: যদি একটি সংখ্যা 3 দিয়ে বিভাজ্য হয়, তবে এর অঙ্ক গুলোর সমষ্টি 3 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

**সমাধান** (i) একটি আয়তক্ষেত্র একটি বর্গক্ষেত্র হয় যদি কেবলমাত্র যদি এর সবগুলো বাহু সমান হয়।

(ii) একটি সংখ্যা 3 দিয়ে বিভাজ্য হয় যদি এবং কেবলমাত্র যদি হয় অঙ্কগুলোর সমষ্টি 3 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

## অনুশীলনী 14.4

**1.** "যদি তখন" বাক্যাংশ প্রয়োগে পাঁচটি নিম্নলিখিত উক্তি সমার্থক উক্তি লেখো।

যদি একটি স্বাভাবিক সংখ্যা বিজোড় হয়, তখন তার বর্গও বিজোড় হয়।

**2.** নীচের উক্তিগুলোর বিরুদ্ধ ধনাত্মক এবং বিপরীত লেখো

(i) যদি $x$ একটি মৌলিক সংখ্যা হয়, তখন $x$ বিজোড় সংখ্যা হয়।

(ii) যদি দুটি সরলরেখা সমান্তরাল হয়, তখন ওই একই তলে এরা ছেদ করে না।

(iii) কোনো কিছু ঠান্ডা হওয়া মানে এই যে এটির নিম্ন তাপমাত্রার হয়।

(iv) তুমি জ্যামিতিকে উপলব্ধি করতে পারবেনা যদি তোমার জানা না থাকে যে অবরোহী যুক্তি কীরূপ।

(v) $x$ একটি জোড় সংখ্যা হওয়া মানে $x$, 4 দিয়ে বিভাজ্য।

**3.** নীচের প্রতিটি উক্তিকে "যদি তখন" আকারে লেখো।

(i) তোমার চাকরি পাওয়ার অর্থ এই যে তোমার বিশ্বাসযোগ্যতা বেশি।

(ii) কলাগাছ প্রস্ফুটিত হবে যদি একমাস গরম স্থায়ী হয়।

(iii) একটি চতুর্ভুজ সামান্তরিক হয় যদি এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(iv) শ্রেণিতে তোমাকে $A^+$ পেতে হলে, এটা জরুরি যে বই-এর সবগুলো অনুশীলনী অধ্যয়ন করা।

**4.** নীচে (a) এবং (b) তে প্রদত্ত উক্তিগুলো থেকে পরস্পর বিরুদ্ধ ধনাত্মক অথবা বিপরীত উক্তি সনাক্ত করো

(a) যদি তুমি দিল্লিতে বাস কর, তখন তোমার শীতের পোশাক আছে।

(i) যদি তোমার শীতের পোষাক না থাকে, তবে তুমি দিল্লীতে বাস কর না।

(ii) যদি তোমার শীতের পোষাক থাকে, তবে তুমি দিল্লিতে বাস কর না।

(b) যদি একটি চতুর্ভুজ একটি সামান্তরিক হয়, তখন এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(i) যদি একটি চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত না করে, তখন চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হয় না।

(ii) যদি একটি চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তখন এটি একটি সামান্তরিক হয়।

## 14.6 উক্তি বৈধকরণ (Validating Statements)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা আলোচনা করব, একটি উক্তি কোন পরিস্থিতিতে সত্য বলে বিবেচিত হয়। এটা জানার জন্য আমাদের নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলোর উত্তর জানা আবশ্যক।

উক্তি মানে কী ? এটার মানে বলতে গেলে কখন একটি উক্তি সত্য হয়, কখন সত্য হয় না ?-এটা বলতে হবে।

উপরোক্ত প্রশ্নগুলোর উত্তর নির্ভর করে কিছু বিশেষ শব্দ বা বাক্যাংশের "এবং", "অথবা" অনুসৃতি উক্তি- "যদি এবং কেবলমাত্র", "যদি-তখন" পরিমাণ নির্দেশক- "প্রতিটির জন্য", "সেখানে অস্তিত্ব আছে"-এসবের প্রদত্ত উক্তিতে ব্যবহারের উপর।

এখানে, আমরা কখন একটি উক্তি বৈধ, তার কয়েকটি কৌশল নিয়ে আলোচনা করো।

নিয়ম 1 **যদি $p$ এবং $q$ গাণিতিক উক্তি হয়, তবে উক্তি "$p$ এবং $q$" সত্য দেখানোর জন্য নীচের ধাপগুলো অনুসরণ করতে হবে।**

ধাপ-1 দেখাও যে $p$ উক্তিটি সত্য।

ধাপ- 2 দেখাও যে $q$ উক্তিটি সত্য।

নিয়ম- 2 **"অথবা" যুক্ত উক্তি**

যদি $p$ এবং $q$ গাণিতিক উক্তি হয়, তবে "$p$ অথবা $q$" এর সত্যতার জন্য নীচের ক্ষেত্রগুলো লক্ষণীয়

ক্ষেত্র 1 $p$ কে মিথ্যা অনুমান করে, দেখাও যে $q$ অবশ্যই সত্য।

ক্ষেত্র 2 $q$ কে মিথ্যা অনুমান করে, দেখাও যে $p$ অবশ্যই সত্য।

**নিয়ম 3** ***"যদি-তখন" যুক্ত উক্তি***

"যদি $p$ এবং $q$" উক্তির সত্যতা প্রমাণের জন্য আমাদেরকে নীচের যে কোনো একটি সত্য দেখাতে হবে।

**ক্ষেত্র 1** $p$ -কে সত্য অনুমান করে, প্রমাণ করো অবশ্যই $q$ সত্য (প্রত্যক্ষ পদ্ধতি)

**ক্ষেত্র 2** $q$-কে মিথ্যা অনুমান করে, প্রমাণ করো $q$ অবশ্যই মিথ্যা (বিরুদ্ধ ধনাত্মক পদ্ধতি)

**নিয়ম 4** ***"যদি এবং কেবলমাত্র যদি" যুক্ত উক্তি***

"$p$ যদি এবং কেবলমাত্র $q$" উক্তির সত্যতা প্রমাণে আমাদের দেখাতে হবে—

(i) যদি $p$ সত্য হয়, তবে q সত্য (ii) যদি $q$ সত্য হয়, তবে p সত্য

এখন আমরা কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করি।

**উদাহরণ 13** নিম্নলিখিত উক্তিটি সত্য না মিথ্যা যাচাই করো।

যদি $x, y \in \mathbf{Z}$ এমন যে $x$ ও $y$ বিজোড় সংখ্যা, তবে $xy$ বিজোড় সংখ্যা।

**সমাধান** ধরো $p : x, y \in \mathbf{Z}$ এমন যে x ও y বিজোড় সংখ্যা

$q : xy$ বিজোড় সংখ্যা

প্রদত্ত উক্তির বৈধতা যাচাই -এর জন্য আমরা নিয়ম3 এর ক্ষেত্র-1 প্রয়োগ করব। অর্থাৎ $p$ কে সত্য অনুমান করে, $q$ সত্য দেখাতে হবে।

$p$ সত্য, মানে $x$ ও $y$ বিজোড় সংখ্যা। তাহলে

$x = 2m + 1$, $m$ -একটি পূর্ণসংখ্যা, $y = 2n + 1$, $n$ -একটি পূর্ণ সংখ্যা।

অতএব, $xy = (2m + 1)(2n + 1)$

$= 2(2mn + m + n) + 1$

যা দেখায়, $xy$ বিজোড় সংখ্যা। অতএব প্রদত্ত উক্তিটি সত্য।

ধরো, আমরা নিয়ম-3 -এর ক্ষেত্র-2 -এর সাহায্যে এটিকে যাচাই করতে চাই। তাহলে আমাদেরকে নিম্নলিখিতরূপে এগোতে হবে-

আমরা ধরে নিই $q$ সত্য নয়। তার মানে আমরা $q$ -উক্তির না-ক্রিয়া করেছি। এ থেকে যে উক্তি পাওয়া যায় তা হল

$$\sim q : xy \text{ জোড় সংখ্যা}$$

এটা সম্ভব হবে যদি x অথবা y জোড় সংখ্যা হয়। অর্থাৎ p সত্য নয়। এরূপ আমরা দেখাতে পারি

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

**দ্রষ্টব্য** উপরের উদাহরণটি $p \Rightarrow q$ প্রমাণের দৃষ্টান্ত স্থাপন করে, এটা প্রমাণ করতে $\sim q \Rightarrow \sim p$ প্রমাণ করা যথেষ্ঠ, যা $p \Rightarrow q$ -এর বিরুদ্ধ ধনাত্মক উক্তি।

**উদাহরণ 14** বিরুদ্ধ ধনাত্মক প্রমাণ যোগে নিম্নলিখিত উক্তিটি সত্য না মিথ্যা যাচাই করো। যদি $x, y \in \mathbf{Z}$ এরূপ যে xy বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে x ও y উভয়েই বিজোড় সংখ্যা।

**সমাধান** ধরা যাক, নিম্নলিখিত রূপে উক্তিগুলোর নামাকরণ করা হল

*$p$ : $xy$ বিজোড় সংখ্যা*

*$q$ : $x$ ও $y$ উভয়েই জোড় সংখ্যা।*

আমরা যাচাই করতে চাই $p \Rightarrow q$ উক্তিটি সত্য না মিথ্যা

অর্থাৎ বিরুদ্ধ ধনাত্মক উক্তি $\sim q \Rightarrow \sim p$ যাচাই করা

এখন $\sim q$ : এটা মিথ্যা যে $x$ ও $y$ উভয়েই বিজোড় সংখ্যা।

এর অর্থ $x$ (বা $y$) জোড় সংখ্যা।

তাহলে $x = 2n$, $n$ কোনো পূর্ণ সংখ্যা।

অতএব, $xy = 2ny$, $n$ পূর্ণ সংখ্যা। এ থেকে পাওয়া যায় $xy$ জোড় সংখ্যা। অর্থাৎ $\sim p$ সত্য হয়।

এখন কী ঘটবে যখন আমরা অনুসৃতি এবং এটির বিপরীত সংযুক্ত করি? পরবর্তীতে তা আলোচনা করব।

নিম্নলিখিত উক্তিগুলোকে বিবেচনা করা যাক

*$p$ : একটি গেলাস অর্ধেক খালি।*

*$q$ : একটি গেলাস অর্ধেক পূর্ণ।*

আমরা জানি যে, যদি প্রথম উক্তিটি সত্য হয়, তবে দ্বিতীয়টি ঘটবে এবং যদি দ্বিতীয়টি হয়, তবে প্রথমটি হবে। এ বিষয়টিকে আমরা নিম্নলিখিত রূপে প্রকাশ করতে পারি—

*যদি একটি গেলাস অর্ধেক খালি হয়, তবে এটি অর্ধেকপূর্ণ।*

*যদি একটি গেলাস অর্ধেকপূর্ণ হয়, তবে এটি অর্ধেক খালি।*

এই উক্তি দুটিকে সংযুক্ত করে আমরা পাই—

*একটি গেলাস অর্ধেক খালি যদি এবং কেবলমাত্র যদি এটি অর্ধেকপূর্ণ হয়।*

এখন আমরা অন্য একটি পদ্ধতির আলোচনা করব:

**14.6. পরস্পর বিরোধী উক্তি (By Contradiction) :** এক্ষেত্রে একটি উক্তির সত্যতা যাচাই-এর জন্য, আমরা প্রথমে দরে নেব যে উক্তিটি সত্য নয় অর্থাৎ $\sim p$ সত্য। তারপর, আমরা এমন একটি ফলাফলে গিয়ে পৌঁছুব যা আমাদের পূর্বানুমানকে বিরোধিতা করে। অতএব, আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারি $p$ সত্য।

**উদাহরণ 15** পরস্পর বিরোধী উক্তির মাধ্যমে যাচাই করো

p: $\sqrt{7}$ অমূলদ সংখ্যা।

**সমাধান** এই পদ্ধতিতে, আমরা প্রথমে ধরে নেব প্রদত্ত উক্তিটি মিথ্যা। অর্থাৎ ধরে নেওয়া যাক $\sqrt{7}$ মূলদ সংখ্যা। যার অর্থ দুটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $a$ ও $b$ -এর অস্তিত্ব আছে এরূপ যে $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$, যেখানে $a$ ও $b$ -এর কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই।

সমীকরণের উভয় দিকে বর্গ করে, আমরা পাই,

$$7 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 7b^2 \;\Rightarrow a,\ 7 \text{ দিয়ে বিভাজ্য।}$$

অতএব, এখানে একটি পূর্ণসংখ্যা $c$ এর অস্তিত্ব আছে যেখানে $a = 7c$ হয়। তাহলে $a^2 = 49c^2$ এবং $a^2= 7b^2$

সুতরাং, $7b^2 = 49c^2 \Rightarrow b^2 = 7c^2 \Rightarrow b,\ 7$ দিয়ে বিভাজ্য। কিন্তু আমরা ইতোপূর্বে দেখেছি যে, a, 7 দিয়ে বিভাজ্য। এ থেকে বোঝা যায় 7 হল a ও b এর সাধারণ উৎপাদক যা আমাদের পূর্বানুমান $a$ ও $b$ -এর সাধারণ উৎপাদক নেই- এটাকে বিরোধিতা করে। এ থেকে দেখা যাচ্ছে আমাদের অনুমান $\sqrt{7}$ মূলদ এটি ভুল। সুতরাং, $\sqrt{7}$ অমূলদ সংখ্যা– এই উক্তিটি সত্য।

এখন আমরা আরেকটি পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব যা দিয়ে একটি উক্তি মিথ্যা কিনা দেখানো যায়। এই পদ্ধতিটি পরিস্থিতি নির্ভর একটি উদাহরণের সাথে সম্পর্কিত যেখানে উক্তিটি বৈধ হয় না। এ ধরণের উদাহরণকে বলা হয় পাল্টা উদাহরণ (Counter Example)। এর নামই বলে দেয় যে এটি একটি উক্তির পাল্টা (বিপরীত) উদাহরণ।

**উদাহরণ 16** পাল্টা উদাহরণ প্রদানে দেখাও যে নিম্নলিখিত উক্তিটি মিথ্যা-

যদি n একটি বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে $n$ মৌলিক সংখ্যা।

**সামাধান** প্রদত্ত উক্তিটির আকার "যদি $p$ তখন $q$"। আমাদের দেখাতে হবে এটি মিথ্যা। এর জন্য আমাদের দেখানো প্রয়োজন যদি $p$ তবে $q$ । এটা দেখাতে গিয়ে এমন একটি বিজোড় সংখ্যা দরকার যা মৌলিক নয়। 9 হল এমন একটি সংখ্যা। সুতরাং $n = 9$ হল পালটা উদাহরণ। সুতরাং আমরা এ সিদ্ধান্তে আসতে পারি উক্তিটি মিথ্যা।

এতক্ষণ উপরে আমরা কিছু কৌশল নিয়ে আলোচনা করেছি যা প্রয়োগে একটি উক্তি সত্য কিনা মিথ্যা যাচাই করা যায়।

> **দ্রষ্টব্য** গণিতশাস্ত্রে, পাল্টা উদাহরণ প্রয়োগে কোনো উক্তিকে খণ্ডন করা (disprove) হয়। যাই হোক, কোনো উক্তির পক্ষে উদাহরণ গঠনে উক্তির বৈধতাকে অনুমোদন করে না।

## অনুশীলনী 14.5

**1.** দেখাও যে,
p : "যদি x একটি বাস্তব সংখ্যা এরূপ যে $x^3 + 4x = 0$ হয়, তবে $x = 0$ হয়" উক্তিটি
(i) প্রত্যক্ষ পদ্ধতি (ii) পরস্পর বিরোধী উক্তি (iii) বিরুদ্ধ ধনাত্মক পদ্ধতি প্রয়োগে সত্য হয়।

**2.** পাল্টা উদাহরণ প্রদানে দেখাও যে, "যে কোনো বাস্তব সংখ্যা $a$ ও $b$ এর জন্য, $a^2 = b^2$ প্রকাশ করে a = b" উক্তিটি সত্য নয়।

**3.** বিরুদ্ধ ধনাত্মক পদ্ধতিতে দেখাও যে নিম্নলিখিত উক্তিটি সত্য।
$p$: যদি $x$ একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং $x^2$ জোড় হয়,
তবে $x$ ও জোড় সংখ্যা হয়।

**4.** পাল্টা উদাহরণ প্রয়োগে দেখাও যে নিম্নলিখিত উক্তিগুলো সত্য নয়।
(i) $p$: যদি একটি ত্রিভুজের সবগুলো কোণ সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ।
(ii) $q$: $x^2 - 1 = 0$ সমীকরণটির 0 এবং 2 -এর মধ্যবর্তী কোনো বীজ থাকে না।

5. নিম্নলিখিত উক্তিগুলোর কোন্‌গুলো সত্য এবং কোন্‌গুলো মিথ্যা ? প্রতিটি ক্ষেত্রে উত্তরের পক্ষে বৈধ যুক্তি দাও।

(i) $p$: কোনো বৃত্তের প্রতিটি ব্যাসার্ধ বৃত্তটির একটি জ্যা হয়।

(ii) $q$: কোনো বৃত্তের কেন্দ্র বৃত্তের প্রতিটি জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(iii) $r$: একটি বৃত্ত হল উপবৃত্তের একটি বিশেষ ক্ষেত্র,

(iv) $s$: যদি x ও y পূর্ণসংখ্যা এরূপ যে $x > y$ হয়, তবে $-x < -y$

(v) $t$: $\sqrt{11}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

## *বিবিধ উদাহরণমালা*

**উদাহরণ 17** নিচের যৌগিক উক্তিতে ব্যবহৃত "অথবা" বহির্ভুক্তি বা অন্তর্ভুক্তি কিনা যাচাই করো। যৌগিক উক্তিটির উপাংশ উক্তিগুলো লেখো এবং এদের প্রয়োগে যৌগিকউক্তিগুলোর সত্যতা যাচাই করো। উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দাও।

$t$: তুমি ভিজে যাও যখন বৃষ্টি হয় অথবা তুমি নদীতে থাক।

**সমাধান** প্রদত্ত উক্তিতে ব্যবহৃত "অথবা" অন্তর্ভুক্তি কারণ এটা সম্ভব যদি বৃষ্টি হয় এবং তুমি যদি নদীতে থাক। প্রদত্ত উক্তির উপাংশ উক্তিগুলো হল

$p$: *তুমি ভিজে যাও যখন বৃষ্টি হয়*

$q$: *তুমি ভিজে যাও যখন* তুমি নদীতে থাক।

এখানে উভয় উপাংশগুলো সত্য, অতএব, যৌগিক উক্তিটি সত্য।

**উদাহরণ 18** নীচের উক্তিগুলো না-ক্রিয়া লেখো :

(i) $p$: প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা $x$ -এর জন্য, $x^2 > x$.

(ii) $q$: এমন একটি মূলদ সংখ্যা $x$ এর অস্তিত্ব আছে এরূপ যে $x^2 = 2$.

(iii) $r$: সব পাখির ডানা আছে।

(iv) $s$: প্রাথমিক স্তরে সমস্ত শিক্ষার্থী গণিত অধ্যয়ন করে।

**সমাধান** $p$ -এর না-ক্রিয়া "এটা মিথ্যা যে $p$ সত্য" যার অর্থ, $x^2 > x$ সব বাস্তব সংখ্যার জন্য সিদ্ধ নয়। এটাকে প্রকাশ করা যেতে পারে

$\sim p$: এরূপ একটি বাস্তব সংখ্যা $x$ -এর অস্তিত্ব আছে যেখানে $x^2 < x$ হয়।

(ii) $q$ -এর না-ক্রিয়া হল "এটা মিথ্যা যে $q$ সত্য"।

অতএব, $\sim q$ বিবৃতিটি হল

$\sim q$: এমন কোনো মূলদ সংখ্যা $x$ -এর অস্তিত্ব নেই এরূপ যে $x^2 = 2$ হয়।

উক্তিটিকে অন্যরূপে লেখা যেতে পারে

$\sim q$: সকল বাস্তব সংখ্যা $x$ -এর জন্য, $x^2 \neq 2$

(iii) উক্তিটির না-ক্রিয়া হল

$\sim r$: একটি পাখির অস্তিত্ব আছে যার ডানা নেই।

(iv) প্রদত্ত উক্তির না-ক্রিয়া হল $\sim s$: একজন শিক্ষার্থীর অস্তিত্ব আছে যে প্রাথমিক স্তরে গণিত অধ্যয়ন করে না।

**উদাহরণ 19** "প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট" বাক্যাংশ প্রয়োগে, "পূর্ণসংখ্যা $n$ বিজোড় হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $n^2$ বিজোড় হয়"— উক্তিটি অন্যভাবে লেখো। উপরন্তু উক্তিটি সত্য কিনা যাচাই করো।

**সমাধান** প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ঠ শর্ত যে পূর্ণ সংখ্যা $n$ বিজোড় হলে $n^2$ অবশ্যই বিজোড় হয়।

ধরো, $p$ ও $q$ দুটি উক্তি

*$p$: পূর্ণ সংখ্যা n বিজোড় সংখ্যা।*

*$q$: $n^2$ বিজোড় সংখ্যা।*

"$p$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $q$" -এর বৈধতা যাচাই -এর জন্য আমাদের যাচাই করতে হবে "যদি $p$ তবে $q$" এবং "যদি $q$ তবে $p$" সত্য কিনা।

**ক্ষেত্র 1** যদি $p$ তবে $q$

যদি $p$ তবে $q$ উক্তিটি হল :

যদি পূর্ণ সংখ্যা $n$ বিজোড় হয়, তবে $n^2$ বিজোড়। আমাদের দেখতে হবে উক্তিটি সত্য কিনা। ধরা যাক $n$ বিজোড় সংখ্যা। তাহলে $n = 2k + 1$, যেখানে $k$ পূর্ণসংখ্যা। অতএব

$$n^2 = (2k + 1)^2$$
$$= 4K^2 + 4k + 1$$

সুতরাং $n^2$ একটি জোড় সংখ্যা থেকে 1 বেশি, তাই এটি বিজোড়।

**ক্ষেত্র 2** যদি $q$, তবে $p$

যদি $q$, তবে উক্তিটি হল :

যদি $n$ একটি পূর্ণসংখ্যা এবং $n^2$ বিজোড় হয়। তবে $n$ বিজোড় সংখ্যা।

আমাদেরকে যাচাই করতে হবে উক্তিটি সত্য কিনা। বিরুদ্ধ ধনাত্মক পদ্ধতিতে আমরা যাচাই করব।

প্রদত্ত উক্তির বিরুদ্ধ ধনাত্মক হল :

যদি $n$ জোড় পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে $n^2$ জোড়পূর্ণ সংখ্যা।

$n$ যুগ্ম সংখ্যা হলে $n = 2k$, কোনো $k$ -এর জন্য।

তাহলে $n^2 = 4k^2$ অতএব, $n^2$ জোড় সংখ্যা।

**উদাহরণ 20** প্রদত্ত উক্তিতে প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত সনাক্ত করো

$t$: যদি তুমি ঘণ্টায় 80 কি.মি. এর বেশি গতিতে গাড়ি চালাও, তবে তোমার জরিমানা হবে।

সমাধান : ধরো $p$ ও $q$ দুটি উক্তি

*$p$: তুমি ঘন্টায় 80 কি.মি এর বেশি গতিতে গাড়ি চালাও।*

*$q$: তোমার জরিমানা হবে।*

যদি $p$, তবে $q$ অনুসৃতি নির্দেশ করে $p$ হল $q$ -এর যথেষ্ট শর্ত। অর্থাৎ ঘণ্টায় 80 কিমি-এর বেশি গতিতে চালানো জরিমানা হওয়ার জন্য যথেষ্ট।

এখানে যথেষ্ট শর্ত হল "ঘণ্টায় 80 কিমি -এর বেশি গতিতে গাড়ি চালানো"

অনুরূপে, যদি $p$, তবে $q$ এটাও নির্দেশ করে যে, $q$ হল $p$ -এর প্রয়োজনীয় শর্ত।

অর্থাৎ যখন তুমি ঘণ্টায় 80 কিমি-এর বেশি গতিতে গাড়ি চালাও, তোমাকে অনিবার্যরূপে জরিমানা দিতে হবে। এখানে প্রয়োজনীয় শর্ত হল, "জরিমানা হওয়া"

## *অধ্যায় 14 এর বিবিধ অনুশীলনী*

**1.** নীচের উক্তিগুলোর না-ক্রিয়া লেখো :

(i) $p$: প্রতিটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা x -এর জন্য, x – 1 সংখ্যাটি সর্বদা ধনাত্মক

(ii) $q$: সমস্ত বিড়াল আঁচড় দেয়।

(iii) $r$: প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য, হয় x >1 অথবা x < 1

(iv) $s$: একটি সংখ্যা x -এর অস্তিত্ব আছে এরূপ যে $0 < x < 1$.

**2.** প্রতিটি উক্তির বিপরীত ও বিরুদ্ধধনাত্মক উক্তি বিবৃত করো :

(i) $p$: একটি ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা শুধুমাত্র মৌলিক হবে যদি 1 এবং সংখ্যাটি নিজে ছাড়া অন্য কোনো উৎপাদক না থাকে।

(ii) $q$: আমি সমুদ্রতটে যাই যখন দিনটি রৌদ্রোজ্জ্বল হয়।

(iii) $r$: যদি বাইরে গরম পড়ে, তবে তুমি তৃষ্ণার্ত হও।

**3.** নীচের প্রতিটি উক্তিটিকে "যদি p, তবে q" রূপে লেখো।

(i) $p$: সার্ভার লগ অন করার জন্য (to log on the server) পাসওয়ার্ড থাকা আবশ্যক।

(ii) $q$: যখন বৃষ্টি হয় যাতায়াতে ট্রাফিক জ্যাম হয়।

(iii) $r$: তুমি ওয়েবসাইটে প্রবেশ করতে পারো কেবলমাত্র যদি তুমি নির্ধারিত শুল্ক প্রদান করে থাক।

**4.** নীচের উক্তিগুলোকে "$p$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $q$"-আকারে লেখো।

(i) $p$: যদি তুমি দূরদর্শন দেখ, তবে তোমার মন উন্মুক্ত হয় এবং যদি তোমার মন উন্মুক্ত হয়, তবে তুমি দূরদর্শন দেখ।

(ii) $q$: তোমার A গ্রেড পাওয়ার প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ঠ শর্ত যদি তুমি নিয়মিত গৃহকাজ কর।

(iii) $r$: যদি একটি চতুর্ভুজের কোণগুলো সমান হয়, তবে এটি একটি আয়তক্ষেত্র এবং যদি একটি চতুর্ভুজ আয়তক্ষেত্র হয় তবে এটির কোণগুলো সমান হয়।

**5.** নীচে দুটি উক্তি দেওয়া হল

*$p$: 25 হল 5 এর একটি গুণিতক।*

*$q$: 25 হল 8 এর একটি গুণিতক।*

"এবং" ও "অথবা" যুক্ত করে উক্তিদুটি দিয়ে যৌগিক বাক্য লেখো। উভয় ক্ষেত্রেই যৌগিক উক্তির বৈধতা যাচাই করো।

**6.** প্রদত্ত পদ্ধতির সাপেক্ষে নিচের উক্তিগুলোর বৈধতা যাচাই করো।

(i) $p$: একটি অমূলদ সংখ্যা এবং একটি মূলদ সংখ্যার যোগফল অমূলদ সংখ্যা হয় (পরস্পর বিরোধী উক্তি পদ্ধতি)

(ii) $q$: যদি n একটি বাস্তব সংখ্যা $n>3$ হয়, তবে $n^2 > 9$ (পরস্পর বিরোধী উক্তি পদ্ধতি)

**7.** নীচের উক্তির একই অর্থ বহন করে এমন পাঁচটি বিভিন্ন উপায়ে উক্তি লেখো।

*$p$: যদি একটি ত্রিভুজের কোণগুলো সমান হয়, তবে এটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ।*

## সারসংক্ষেপ

◆ গাণিতিক ভাবে গ্রহণযোগ একটি উক্তি হল একটি বাক্য যা হয় সত্য, নতুবা মিথ্যা।

◆ নিম্নলিখিত কিছু পদের ব্যাখ্যা :

– একটি উক্তি $p$ -এর না-ক্রিয়া : যদি একটি উক্তি $p$ দিয়ে সূচিত হয়, তবে $p$ উক্তির না-ক্রিয়া $\sim p$ দিয়ে সূচিত করা হয়।

– যৌগিক উক্তি সমূহ এবং এদের সম্পর্কিত উপাংশ সমূহ : একটি উক্তি যৌগিক উক্তি হয় যদি এটি দুটি বা ততোধিক ক্ষুদ্রতর উক্তি দিয়ে গঠিত হয়। ক্ষুদ্রতর উক্তিগুলোকে যৌগিক উক্তির উপাংশ উক্তি বলা হয়।

– যৌগিক বাক্যে “এবং”, “অথবা”, “যেখানে অস্তিত্ব আছে” এবং “প্রতিটির জন্য” -এর ভূমিকা।

– “যদি”, “কেবলমাত্র যদি”, “যদি এবং কেবলমাত্র যদি” অনুসৃতিগুলোর অর্থ।

যদি $p$, তবে $q$ দিয়ে একটি উক্তিকে নিম্নলিখিত উপায়ে লেখা যায়।

– $p$ বোঝায় (বা প্রকাশ করে) $q$ ($p \Rightarrow q$ দিয়ে সূচিত হয়)।

– $p$ হল $q$ এর জন্য যথেষ্ট শর্ত।

– $q$ হল $p$ -এর জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত।

– $p$ কেবলমাত্র যদি $q$

– $\sim q$ বোঝায় $\sim p$

– $p \Rightarrow q$ উক্তির বিরুদ্ধ ধনাত্মক উক্তি হল $\sim q \Rightarrow \sim p$.

$q \Rightarrow p$. উক্তির বিপরীত উক্তি হল $q \Rightarrow p$

$q \Rightarrow p$ এর বিপরীত সহ পাওয়া যায় $p$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $q$.

◆ নিম্নলিখিত পদ্ধতিগুলো উক্তির বৈধতা যাচাই করে ব্যবহৃত হয়।

(i) প্রত্যক্ষ পদ্ধতি

(ii) বিরোদ্ধ ধনাত্মক পদ্ধতি

(iii) পরস্পর বিরোধী উক্তি পদ্ধতি

(iv) পাল্টা (বা বিপরীত) উদাহরণের প্রয়োগ।

## ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

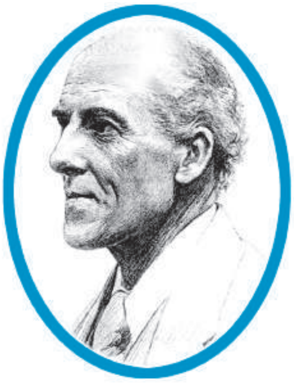
যুক্তি শাস্ত্রের উপর সর্বপ্রথম বিশ্লেষণী প্রবন্ধ রচনা করেন অ্যারিস্টটল (384 খ্রি: পূ: — 322 খ্রি: পূ:)। এটি ছিল অবরোহী যুক্তির জন্য নিয়মনীতি সংগ্রহ যা জ্ঞান-বিজ্ঞানের প্রতিটি শাখায় অধ্যয়নের ভিত্তি রূপে কাজ করে। পরবর্তীকালে সপ্তদশ শতকে জার্মান গণিতজ্ঞ G.W. Leibnitz (1646 —1716) অবরোহী যুক্তি-পদ্ধতিকে যান্ত্রিক বানানোর জন্য যুক্তিশাস্ত্রে প্রতীকী প্রয়োগের ধারণা দেয়। তার ধারণা উপলব্ধি করে ঊনবিংশ শতকে ইংরেজ গণিতজ্ঞ জর্জ বুল (1815 — 1864) এবং *অগস্টাস ডি মরগ্যান* (1806 — 1871) প্রতীকী যুক্তিশাস্ত্র, এই আধুনিক বিষয়ের ভিত্তি স্থাপন করেন।

অধ্যায় **15**

# রাশিবিজ্ঞান
# (STATISTICS)

❖ *"Statistics may be rightly called the science of averages and their estimates." – A.L.BOWLEY & A.L. BODDINGTON* ❖

## 15.1 ভূমিকা



কার্ল পিয়ারসন
**(1857-1936)**

আমরা জানি রাশিবিজ্ঞান কোনো সুনির্দিষ্ট লক্ষ্যে সংগৃহীত রাশিতথ্যসমূহ নিয়ে কাজ করে। এ সকল রাশিতথ্য বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা করে আমরা কোনো সিদ্ধান্তে আসতে পারি। লেখচিত্র ও সারণির মাধ্যমে রাশিতথ্যগুলোকে কীভাবে প্রকাশ করা যায় তা আমরা পূর্ববর্তী শ্রেণিতে জেনেছি। এর মাধ্যমে রাশিতথ্যসমূহের মুখ্য বৈশিষ্ট্যগুলো প্রকাশ করা সম্ভব। প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলোকে বর্ণনা করা যায় এমন কোনো মান বের করার পদ্ধতিও আমরা জেনেছি। এই মানকে বলা হয় কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ। মনে করে দেখো, তিনটি কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হল- মধ্যক (যৌগিক গড়), মধ্যমা এবং সংখ্যাগুরু মান। রাশিতথ্যগুলো কোন বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত তা সম্পর্কে একটা মোটামুটি ধারনা *কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের* মাধ্যমে আমরা পাই। কিন্তু এর থেকে আরও বিশদ ধারনা লাভের জন্য আমাদের প্রয়োজন রাশিতথ্যসমূহের মানগুলো কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের চতুর্দিকে কীভাবে ছড়িয়ে আছে অথবা গুচ্ছাকারে রয়েছে তা সম্পর্কে অবহিত হওয়া।

ধরা যাক, দুইজন ব্যাটসম্যানের গত দশটি ম্যাচের রানসংখ্যা নিম্নরূপ :

ব্যাটসম্যান A : 30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71

ব্যাটসম্যান B : 53, 46, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 57, 52

স্পষ্টতই, রাশিতথ্যগুলোর মধ্যক ও মধ্যমা হল

| | ব্যাটসম্যান A | ব্যাটসম্যান B |
|---|---|---|
| মধ্যক | 53 | 53 |
| মধ্যমা | 53 | 53 |

স্মরণ করো, পর্যবেক্ষণগুলোর সমষ্টিকে পর্যবেক্ষণ সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে আমরা একটি রাশিতথ্যের মধ্যক ($\bar{x}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়) নির্ণয় করি।

অর্থাৎ $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

আবার রাশিতথ্যগুলোকে উর্ধক্রমে অথবা অধ:ক্রমে সাজিয়ে নিম্নে উল্লেখিত সূত্রের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করা হয়।

যদি পর্যবেক্ষণগুলো বিজোড় হয়, তাহলে মধ্যমা হল $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম পর্যবেক্ষণ।

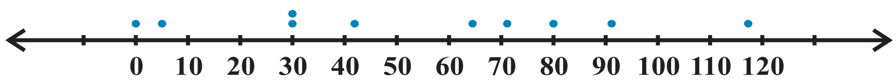
যদি পর্যবেক্ষণগুলো জোড় হয়, তাহলে মধ্যমা হল $\left(\frac{n}{2}\right)$ তম এবং $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম পর্যবেক্ষণের মধ্যক।

আমরা দেখেছি যে ব্যাটসম্যান A এবং ব্যাটসম্যান B উভয়েরই রানের মধ্যক ও মধ্যমা সমান অর্থাৎ 53। তাহলে কি আমরা দুজন ব্যাটসম্যানের কর্মদক্ষতা একই রকম বলতে পারি?

পরিস্কারভাবেই না, কারণ ব্যাটসম্যান A এর রানের বিভিন্নতা 0 (সর্বনিম্ন) থেকে 117 (সর্বোচ্চ)। অন্যদিকে, ব্যাটসম্যান B এর রানের বিস্তৃতি 46 থেকে 60 পর্যন্ত।

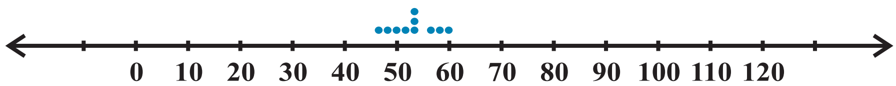
এখন আমরা সংখ্যারেখায় ডট এর মাধ্যমে উপরের স্কোরগুলো প্রকাশ করে আমরা নীচের চিত্রগুলো পাচ্ছি।

ব্যাটসম্যান A -এর জন্য




**চিত্র 15.1**

ব্যাটসম্যান B -এর জন্য




**চিত্র 15.2**

আমরা দেখতে পাচ্ছি ডটগুলো ব্যাটসম্যান B এর সাপেক্ষে খুবই কাছাকাছি রয়েছে এবং কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের (মধ্যক ও মধ্যমা) চারপাশে গুচ্ছাকারে রয়েছে, অন্যদিকে ব্যাটসম্যান A এর সাপেক্ষে বেশী মাত্রায় ছড়িয়ে ছিটিয়ে রয়েছে।

তাই বলা যায়, প্রদত্ত রাশিতথ্য সম্পর্কে সম্পূর্ণ ওয়াকিবহাল হতে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকগুলোই যথেষ্ট নয়।

রাশিবিজ্ঞানে পরিবর্তনশীলতা হল এমন একটি উপাদান যা সম্পর্কে জানা খুব প্রয়োজন। এই পরিবর্তনশীলতা বর্ণনা করার জন্য *'কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ'* সংখ্যার মত একটি সংখ্যা আমরা চাই। এই সংখ্যাটিকে বলা হয় *বিস্তৃতির পরিমাপ।* এ অধ্যায়ে আমরা কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ বিস্তৃতির পরিমাপ এবং শ্রেণিবদ্ধ ও সরল রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে তাদের গণনার পদ্ধতি সম্পর্কে শিখব।

## 15.2 বিস্তৃতির পরিমাপ (Measures of Dispersion)

চতুর্দিকে বিস্তৃত রাশিতথ্যের বিস্তৃতি নির্ভর করে পর্যবেক্ষণগুলো এবং পূর্বে ব্যবহৃত কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের ধরনগুলোর উপর। বিস্তৃতির পরিমাপ নির্ণয়ে পদ্ধতিগুলো নিম্নে উল্লেখ করা হল :

(i) প্রসার (ii) চতুর্থক পার্থক্য (iii) গড় পার্থক্য (iv) সমক পার্থক্য।

এ অধ্যায়ে আমরা চতুর্থক পার্থক্য ছাড়া বাকি সব বিস্তৃতির পরিমাপসমূহ আলোচনা করব।

## 15.3 প্রসার (Range)

মনে করে দেখো, পূর্বে আলোচিত উদাহরণটিতে দুইজন ব্যাটসম্যান A ও B এর রানের প্রতিটি শ্রেণিতে সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ রানের মাধ্যমে আমরা স্কোলগুলোর পরিবর্তনশীলতা সম্পর্কে কিছুটা ধারণা পেয়েছি। এক্ষেত্রে একটি মান পাওয়ার জন্য প্রতিটি শ্রেণির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের অন্তরফল বের করতে পারি। এই অন্তরফলকেই রাশিতথ্যসমূহের 'প্রসার' বলা হয়।

ব্যাটসম্যান A এর ক্ষেত্রে, প্রসার = 117 – 0 = 117 এবং ব্যাটসম্যান B এর ক্ষেত্রে, প্রসার = 60 – 46 = 14 । স্পষ্টতই, A এর প্রসার >B এর প্রসার। তাই A এর ক্ষেত্রে স্কোরগুলো চারদিকে ছড়ানো ছিটানো ছিল যেখানে B এর ক্ষেত্রে এগুলো ছিল পরস্পরের কাছাকাছি। অতএব, কোনো শ্রেণির প্রসার = বৃহত্তম মান – ক্ষুদ্রতম মান। প্রসার এর সাহায্যে রাশিতথ্যগুলোর পরিবর্তনশীলতা বা চর্তুদিকে ছড়িয়ে থাকার একটা আনুমানিক ধারনা পাওয়া গেলেও কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ থেকে রাশিতথ্যগুলোর বিস্তৃতি সম্পর্কে কিছু জানা যায় না।

এরজন্য পরিবর্তনশীলতার অপর পরিমাপগুলো আমাদের প্রয়োজন। স্পষ্টতই এ সকল পরিমাপকগুলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা থেকে মানগুলোর অন্তরফল (বা পার্থক্য) এর উপর নির্ভরশীল।

এরকম গুরুত্বপূর্ণ বিস্তৃতির পরিমাপসমূহ, যেগুলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা থেকে পর্যবেক্ষণগুলোর পার্থক্যের উপর নির্ভর করে সেগুলো হল গড় পার্থক্য ও সমক পার্থক্য। এবার এগুলো সম্বন্ধে আমরা বিস্তৃত আলোচনা করব।

## 15.4 গড় পার্থক্য (Mean Deviation)

মনে করে দেখো, কোনো একটি নির্দিষ্ট মান 'a' থেকে একটি পর্যবেক্ষণ x এর পার্থক্য হল x – a। কোনো কেন্দ্রীয় মান 'a' থেকে x এর বিস্তৃতি নির্ণয় করতে হলে আমাদের 'a' এর সাপেক্ষে পার্থক্য নির্ণয় করতে হবে। এসকল পার্থক্যের গড় হল বিস্তৃতির পরম পরিমাপ। গড় বের করতে হলে আমাদের অবশ্যই পার্থক্যগুলোর সমষ্টি জানতে হবে। কিন্তু আমরা জানি যে কোনো কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ পর্যবেক্ষণসমূহের বৃহত্তম মান ও ক্ষুদ্রতম মানের মাঝে অবস্থান করে। সুতরাং, কিছু কিছু পার্থক্য হবে ঋণাত্মক আবার কিছু কিছু হবে ধনাত্মক। এভাবে পার্থক্যসমূহের সমষ্টি হবে শূন্য। তাহলে গড় ( $\bar{x}$ ) থেকে পার্থক্যসমূহের সমষ্টি শূন্য হবে।

সুতরাং, $$\text{গড় পার্থক্য} = \frac{\text{পার্থক্যগুলোর সমষ্টি}}{\text{পর্যবেক্ষণ সংখ্যা}} = \frac{0}{n} = 0$$

তাই বিস্তৃতির পরিমাপের ক্ষেত্রে গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় আমাদের কোনো কাজে আসে না।

মনে রাখা দরকার, একটি বিস্তৃতির উপযুক্ত পরিমাপের ক্ষেত্রে আমাদের একটি কেন্দ্রীয় প্রবণতার মান বা কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা 'a' থেকে প্রতিটি মানের দূরত্ব নির্ণয় করা দরকার। কোনো দুটি সংখ্যার অন্তরফলের পরম মান সংখ্যারেখায় প্রকাশিত সংখ্যাগুলোর মধ্যে দূরত্ব বোঝায়। সুতরাং কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা 'a' থেকে বিস্তৃতির পরিমাপের সময় আমরা কোনো কেন্দ্রীয় মান থেকে পার্থক্যগুলোর পরম মানের গড় বের করতে পারি। এই গড়কেই বলা হয় *'গড় পার্থক্য'*। তাই বলা যায়, কোনো কেন্দ্রীয় মান 'a' এর সাপেক্ষে গড় পার্থক্য হল 'a' থেকে পর্যবেক্ষণসমূহের পার্থক্যের পরম মানের গড়। 'a' থেকে নির্ণেয় গড় পার্থক্য-কে M.D.(a) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\text{অর্থাৎ, M.D.(a)} = \frac{\text{'a' থেকে পার্থক্যসমূহের পরম মানের সমষ্টি}}{\text{পর্যবেক্ষণগুলোর সংখ্যা}}$$

**মন্তব্য** যেকোনো কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের থেকেও গড় পার্থক্য পাওয়া যেতে পারে। যদিও রাশিবিজ্ঞানে গড় ও মধ্যমা থেকেই সাধারণত গড় পার্থক্য নির্ণয় করা হয়ে থাকে।

এখন আমরা বিভিন্ন ধরণের রাশিতথ্যের জন্য গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য এবং মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করা শিখব।

### *15.4.1 সরল রাশিতথ্যের গড় পার্থক্য (Mean deviation for ungrouped data)*

ধরা যাক n সংখ্যক পর্যবেক্ষণ হল $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$।

গড় অথবা মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয়ের প্রয়োজনীয় ধাপগুলো হল :

**ধাপ 1** রাশিতথ্যগুলোর কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ নির্ণয় করো, যার সাপেক্ষে আমাদের গড় পার্থক্য নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক ইহা 'a'।

**ধাপ 2** a থেকে প্রতিটি $x_i$ এর পার্থক্য বের করো,

যেমন- $x_1 - a,\ x_2 - a,\ x_3 - a, \ldots, x_n - a$

**ধাপ 3** পার্থক্যগুলোর পরম মান বের করো অর্থাৎ ঋণাত্মক (–) চিহ্ন থাকলে তা বাদ দাও, যদি এরকম থাকে, যেমন- $|x_1 - a|, |x_2 - a|, |x_3 - a|, \ldots, |x_n - a|$

**ধাপ 4** পার্থক্য সমূহের পরম মানগুলোর গড় নির্ণয় করো। এই গড়ই হল a এর সাপেক্ষে গড় পার্থক্য,

$$\text{অর্থাৎ, } \mathbf{M.D.}(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|}{n}$$

$$\text{এভাবে } \mathbf{M.D.}\ (\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|, \text{ যেখানে } \bar{x} = \text{গড়}$$

$$\text{এবং } \mathbf{M.D.\ (M)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mathrm{M}|, \text{ যেখানে } \mathbf{M} = \text{মধ্যমা}$$

দ্রষ্টব্য এ অধ্যায়ে কোনো কিছু বলা না থাকলে মধ্যমার জন্য আমরা M চিহ্নটি ব্যবহার করব। নীচের উদাহরণগুলোতে উপরে বর্ণিত ধাপগুলো একে একে বর্ণনা করা হল।

**উদাহরণ 1** নীচের রাশিতথ্যগুলোর গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো :

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

**সমাধান** আমরা ধাপে ধাপে এগিয়ে নীচের মত করে পাই

**ধাপ 1** প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলোর গড়

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

**ধাপ 2** গড় $\bar{x}$ থেকে রাশিতথ্যগুলোর পার্থক্যগুলো অর্থাৎ $x_i - \bar{x}$ হল

$$6-9,\ 7-9,\ 10-9,\ 12-9,\ 13-9,\ 4-9,\ 8-9,\ 12-9,$$

অথবা, $\quad -3, -2, 1, 3, 4, -5, -1, 3$

**ধাপ 3** পার্থক্যগুলোর পরম মানগুলো অর্থাৎ $|x_i - \bar{x}|$ হল

3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3

**ধাপ 4** গড়ের সাপেক্ষে নির্ণেয় গড় পার্থক্য হল

$$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{8}|x_i - \bar{x}|}{8}$$

$$= \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$$

দ্রষ্টব্য প্রত্যেক বার ধাপগুলো বর্ণনা করার পরিবর্তে আমরা ধাপগুলো উল্লেখ না করে ধাপে ধাপে মান নির্ণয় করব।

**উদাহরণ 2** নীচের রাশিতথ্যগুলোর গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো।

12, 3, 18, 17, 4, 9, 17, 19, 20, 15, 8, 17, 2, 3, 16, 11, 3, 1, 0, 5

**সমাধান** আমরা প্রথমে প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলোর গড় $(\bar{x})$ নির্ণয় করবো।

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{200}{20} = 10$$

গড় থেকে প্রতিটি পার্থক্যের পরম মানগুলো অর্থাৎ $|x_i - \bar{x}|$ হল

2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5, 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5

সুতরাং, $$\sum_{i=1}^{20}|x_i-\bar{x}| = 124$$

এবং $$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{124}{20} = 6.2$$

**উদাহরণ 3** নীচের রাশিতথ্যগুলোর মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো :

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21।

**সমাধান** এখানে রাশিতথ্যগুলোর সংখ্যা 11 যা একটি বিজোড় সংখ্যা। রাশিতথ্যগুলোকে উর্ধ্বঃক্রমে সাজিয়ে পাই,

3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21

এখন মধ্যমা $= \left(\frac{11+1}{2}\right)$তম অর্থাৎ ষষ্ঠ পদ $= 9$

মধ্যমা থেকে প্রাপ্ত পার্থক্যগুলোর পরম মানগুলো অর্থাৎ $|x_i - \text{M}|$ হল

6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12

সুতরাং $$\sum_{i=1}^{11}|x_i-\text{M}| = 58$$

এবং $$\text{M.D.}(\text{M}) = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}|x_i-\text{M}| = \frac{1}{11}\times 58 = 5.27$$

### 15.4.2 শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের গড় পার্থক্য (*Mean deviation for grouped data*)

আমরা জানি রাশিতথ্যগুলো দুটি উপায়ে শ্রেণিবদ্ধ করা যায়:

(a) বিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজন,

(b) সন্তত পরিসংখ্যা বিভাজন।

এই উভয় প্রকারের রাশিতথ্যসমূহের গড় পার্থক্য নির্ণয়ের পদ্ধতি সম্পর্কে আমরা আলোচনা করব।

**(a) বিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজন (Discrete frequency distribbution)** ধরা যাক, n সংখ্যক নির্দিষ্ট মানসমূহ $x_1, x_2, ..., x_n$ এর পরিসংখ্যাগুলো যথাক্রমে $f_1, f_2, ..., f_n$। এই রাশিতথ্যগুলোকে নীচে একটি টেবিলের মাধ্যমে লেখা হল; এটিকেই *বিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজন* বলা হয়।

$$\begin{array}{lllll} x : x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ f : f_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_n \end{array}$$

### (i) গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য (Mean deviation about mean):

প্রথমে আমরা প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলো নীচের গড় $\bar{x}$ সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করব।

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i ,$$

যেখানে $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ হল $x_i$ রাশিসমূহ এবং তাদের যথাযথ পরিসংখ্যাসমূহ $f_i$ এর গুণফল এবং $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ হল পরিসংখ্যাগুলোর যোগফল।

তারপর আমরা গড় $\bar{x}$ থেকে প্রতিটি $x_i$ এর পার্থক্যগুলো নিরূপণ করে প্রতিটি $i = 1, 2, ..., n$ এর জন্য পরম মানগুলো $|x_i - \bar{x}|$ নির্ণয় করব।

তারপর পার্থক্যগুলোর পরম মানের গড় নির্ণয় করতে হবে এবং এটিই হবে গড়ের সাপেক্ষে নির্ণেয় গড় পার্থক্য।

অতএব, $$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|$$

**(ii) মধ্যমা-এর সাপেক্ষে গড় পার্থক্য (Mean deviation about median)** মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করতে হলে আমাদের প্রদত্ত বিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজনের মধ্যমা বের করতে হবে। এই জন্য রাশিতথ্যগুলোকে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজাতে হবে। এরপর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বের করতে হবে। তারপর আমরা সেই রাশিটিকে শনাক্ত করব যার ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{N}{2}$ এর সমান বা সামান্য বড় হবে, যেখানে N হল পরিসংখ্যাগুলোর যোগফল। এই মানটি প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলোর মধ্যভাগে অবস্থিত তাই এটিই হল নির্ণেয় মধ্যমা। তারপর মধ্যমা থেকে রাশিগুলোর পার্থক্যের পরম মানসমূহের গড় নির্ণয় করব।

সুতরাং $$\text{M.D.(M)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$$

**উদাহরণ 4** নীচের রাশিতথ্যগুলোর গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| $f_i$ | 2 | 8 | 10 | 7 | 8 | 5 |

**সমাধান** প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলোর সাহায্যে আমরা একটি সারণি 15.1 তৈরি করি এবং গণনার পর অপর স্তম্ভগুলো যুক্ত করি।

**সারণি 15.1**

| $x_i$ | $f_i$ | $f_i x_i$ | $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$ | $f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 5.5 | 11 |
| 5 | 8 | 40 | 2.5 | 20 |
| 6 | 10 | 60 | 1.5 | 15 |
| 8 | 7 | 56 | 0.5 | 3.5 |
| 10 | 8 | 80 | 2.5 | 20 |
| 12 | 5 | 60 | 4.5 | 22.5 |
| | 40 | 300 | | 92 |

$$N = \sum_{i=1}^{6} f_i = 40, \ \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 300, \ \sum_{i=1}^{6} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 92$$

অতএব, $$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{1}{40} \times 300 = 7.5$$

এবং $$\text{M.D.} \ (\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} f_i \ \lvert x_i - \bar{x} \rvert = \frac{1}{40} \times 92 = 2.3$$

**উদাহরণ 5** নীচের রাশিতথ্যগুলোর জন্য মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 3 | 6 | 9 | 12 | 13 | 15 | 21 | 22 |
| $f_i$ | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 5 | 4 | 3 |

**সমাধান** প্রদত্ত পর্যবেক্ষণগুলো মানের উর্ধ্বক্রমে সাজানো রয়েছে। প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলোর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার জন্য একটি সারি সংযোজন করে (সারণি 15.2) আমরা পাই,

**সারণি 15.2**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 3 | 6 | 9 | 12 | 13 | 15 | 21 | 22 |
| $f_i$ | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 5 | 4 | 3 |
| $c.f.$ | 3 | 7 | 12 | 14 | 18 | 23 | 27 | 30 |

এক্ষেত্রে, N = 30 যা একটি জোড় সংখ্যা।

মধ্যমা হল 15 তম ও 16 তম পর্যবেক্ষণের গড়। উভয় পর্যবেক্ষণই ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 18 তে রয়েছে, যার অনুরূপ পর্যবেক্ষণটি হল 13।

অতএব, $$\text{মধ্যমা M} = \frac{15 \text{ তম পর্যবেক্ষণ} + 16 \text{ তম পর্যবেক্ষণ}}{2} = \frac{13+13}{2} = 13$$

এখন, মধ্যমা থেকে পর্যবেক্ষণগুলোর পার্থক্যসমূহের পরম মান অর্থাৎ $|x_i - \mathrm{M}|$ সারণি 15.3-তে দেখানো হল।

**সারণি 15.3**

| $\|x_i - \mathrm{M}\|$ | 10 | 7 | 4 | 1 | 0 | 2 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 5 | 4 | 3 |
| $f_i\|x_i - \mathrm{M}\|$ | 30 | 28 | 20 | 2 | 0 | 10 | 32 | 27 |

এক্ষেত্রে, $$\sum_{i=1}^{8} f_i = 30 \text{ এবং } \sum_{i=1}^{8} f_i\,|x_i - \mathrm{M}| = 149$$

অতএব, $$\mathrm{M.D.(M)} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{8} f_i\,|x_i - \mathrm{M}|$$

$$= \frac{1}{30} \times 149 = 4.97 \text{ ।}$$

**(b) সন্তত পরিসংখ্যান বিভাজন (Continuous frequency distribution)** একটি সন্তত পরিসংখ্যা বিভাজন হল এমন একটি শ্রেণি যেখানে রাশিতথ্য ফাঁক বিহীন (without gaps) বিভিন্ন শ্রেণি অন্তরে নিজ নিজ পরিসংখ্যা সহ বিন্যস্ত।

উদাহরণস্বরূপ 100 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বরের সন্তত পরিসংখ্যা বিভাজন নিম্নে দেখানো হল :

| প্রাপ্ত নম্বর | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্র সংখ্যা | 12 | 18 | 27 | 20 | 17 | 6 |

**(i) গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য (Mean deviation about mean)** সন্তত পরিসংখ্যা বিভাজনের গড় নির্ণয়ের সময় আমাদের ধরে নিতে হবে যে প্রতিটি শ্রেণির পরিসংখ্যা তার মধ্যবিন্দুতে কেন্দ্রীভূত রয়েছে। এখানে আমরা প্রতিটি প্রদত্ত শ্রেণির মধ্যবিন্দু বের করে বিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে গড় পার্থক্য নির্ণয়ের অনুরূপভাবে অগ্রসর হব।

আমরা নীচের উদাহরণটি লক্ষ করি।

**উদাহরণ 6** নীচের প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো।

| প্রাপ্ত নম্বর | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| শিক্ষার্থীর সংখ্যা | 2 | 3 | 8 | 14 | 8 | 3 | 2 |

**সমাধান** প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে আমরা নীচের 15.4 সারণিটি তৈরি করি।

**সারণি 15.4**

| প্রাপ্ত নম্বর | শিক্ষার্থীর সংখ্যা $f_i$ | মধ্যবিন্দু $x_i$ | $f_i x_i$ | $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$ | $f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10-20 | 2 | 15 | 30 | 30 | 60 |
| 20-30 | 3 | 25 | 75 | 20 | 60 |
| 30-40 | 8 | 35 | 280 | 10 | 80 |
| 40-50 | 14 | 45 | 630 | 0 | 0 |
| 50-60 | 8 | 55 | 440 | 10 | 80 |
| 60-70 | 3 | 65 | 195 | 20 | 60 |
| 70-80 | 2 | 75 | 150 | 30 | 60 |
| | 40 | | 1800 | | 400 |

এক্ষেত্রে $$\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{7} f_i = 40, \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 1800, \sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 400$$

অতএব, $$\bar{x} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{1800}{40} = 45$$

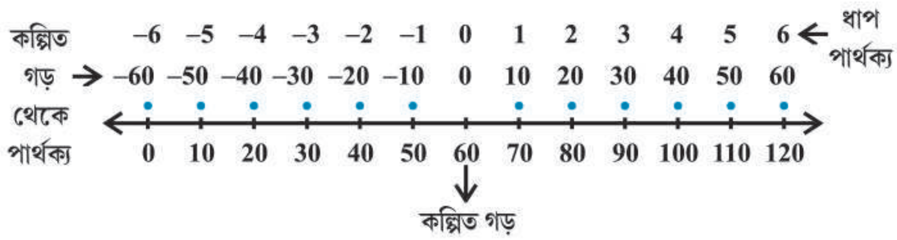
এবং $$\mathrm{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = \frac{1}{40} \times 400 = 10$$

**গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি (Shortcut method for calculating mean deviation about mean)** $\bar{x}$ নির্ণয়ের জন্য নীচে বর্ণিত ধাপগুলো ব্যবহার করে আমরা ক্লান্তিকর গণনা কার্য পরিহার করতে পারি। এক্ষেত্রে রাশিতথ্যগুলোর মধ্যবর্তী অথবা এর খুব কাছাকাছি একটি মানকে আমরা কল্পিত গড় ধরে নেব। তারপর পর্যবেক্ষণসমূহের পার্থক্যগুলো (অথবা শ্রেণিগুলোর মধ্যবিন্দু) কল্পিত গড়

থেকে গণনা করবো। ইহা সংখ্যারেখায় মূলবিন্দু শূন্য থেকে কল্পিত গড়ে স্থানান্তরিত করা ছাড়া আর কিছুই নয় যা চিত্র 15.3 এ দেখানো হল।


**চিত্র : 15.3**

যদি প্রতিটি পার্থক্যে একটি সাধারণ উৎপাদক থাকে তাহলে পার্থক্যগুলোকে সরল করার জন্য এই সাধারণ উৎপাদক দিয়ে এদের ভাগ করতে হবে। এগুলোকে ধাপ পার্থক্য বলা হয়। এই পদ্ধতিতে সংখ্যা রেখায় যেভাবে স্কেলের পরিবর্তন হল তা চিত্র 15.4 এ দেখানো হল।




**চিত্র : 15.4**

এই পার্থক্য ও ধাপ পার্থক্যগুলো, পর্যবেক্ষণগুলোর আকারকে ছোট করে যার ফলে গুণফল বা অন্যান্য গণনাকার্য সহজতর হয়।

এই নতুন চলকে $d_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়, যেখানে ‘a’ হল কল্পিত গড় এবং h হল সাধারণ উৎপাদক। ধাপ– পার্থক্য পদ্ধতিতে গড় $\bar{x}$ হল

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\, d_i}{\mathrm{N}} \times h$$

এই ধাপ পার্থক্য পদ্ধতিতে উদাহরণ 6 এর রাশিতথ্যগুলো থেকে আমরা গড় পার্থক্য নির্ণয় করব।

কল্পিত গড় a = 45 এবং h = 10 ধরে আমরা নীচের সারণি 15.5 তৈরি করি।

**সারণি 15.5**

| প্রাপ্ত নম্বর | শিক্ষার্থীর সংখ্যা $f_i$ | মধ্যবিন্দু $x_i$ | $d_i = \frac{x_i - 45}{10}$ | $f_i d_i$ | $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$ | $f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10-20 | 2 | 15 | – 3 | – 6 | 30 | 60 |
| 20-30 | 3 | 25 | – 2 | – 6 | 20 | 60 |
| 30-40 | 8 | 35 | – 1 | – 8 | 10 | 80 |
| 40-50 | 14 | 45 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50-60 | 8 | 55 | 1 | 8 | 10 | 80 |
| 60-70 | 3 | 65 | 2 | 6 | 20 | 60 |
| 70-80 | 2 | 75 | 3 | 6 | 30 | 60 |
| | 40 | | | 0 | | 400 |

সুতরাং,
$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i d_i}{N} \times h = 45 + \frac{0}{40} \times 10 = 45$$

এবং
$$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = \frac{400}{40} = 10$$

**দ্রষ্টব্য** ধাপ পার্থক্য পদ্ধতিটি $(\bar{x})$ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়। বাকি পদ্ধতি একইরকম।

**(ii) মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য (Mean deviation about median)** সন্তত পরিসংখ্যা বিভাজন-এ মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয়ের পদ্ধতির অনুরূপ। শুধু একটাই পার্থক্য, এখানে পার্থক্য নির্ণয়ের ক্ষেত্রে গড়ের পরিবর্তে মধ্যমা ব্যবহার করা হয়।

সন্তত পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে মধ্যমা নির্ণয়ের পদ্ধতিটি মনে করার চেষ্টা করি।

রাশিতথ্যগুলোকে মানের উর্ধ্বক্রমে প্রথমে সাজানো হল। তারপর সন্তত পরিসংখ্যা বিভাজনের মধ্যমা নির্ণয়ের জন্য মধ্যমা রয়েছে এমন শ্রেণি (মধ্যমা শ্রেণি)-টি বের করতে হবে। এরপর নীচের সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে।

$$\text{মধ্যমা} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

যেখানে মধ্যমা শ্রেণি হল এমন শ্রেণি অন্তরাল যার ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{N}{2}$ এর সমান বা কিছুটা বড় হয়, N হল পরিসংখ্যার সমষ্টি, $l, f, h$ এবং c হল যথাক্রমে নিম্ন সীমা, পরিসংখ্যা, মধ্যমা শ্রেণির পরিসর এবং মধ্যমা শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা। মধ্যমা বের করার পর মধ্যমা থেকে মধ্যবিন্দুগুলোর পার্থক্যসমূহের পরম মান $|x_i - M|$ নির্ণয় করতে হবে।

তাহলে, $$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$$

এই পদ্ধতিটি নীচের উদাহরণটিতে প্রয়োগ করা হল :

**উদাহরণ 7** নীচের রাশিতথ্যগুলোর জন্য মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো :

| শ্রেণি | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা | 6 | 7 | 15 | 16 | 4 | 2 |

**সমাধান** প্রদত্ত রাশিতথ্য এর সাহায্যে নীচের সারণি 15.6 তৈরি করি।

**সারণি 15.6**

| শ্রেণি | পরিসংখ্যা $f_i$ | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(c.f.)$ | মধ্যবিন্দু $x_i$ | $\|x_i - \text{মধ্যমা}\|$ | $f_i \|x_i - \text{মধ্যমা}\|$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0-10 | 6 | 6 | 5 | 23 | 138 |
| 10-20 | 7 | 13 | 15 | 13 | 91 |
| 20-30 | 15 | 28 | 25 | 3 | 45 |
| 30-40 | 16 | 44 | 35 | 7 | 112 |
| 40-50 | 4 | 48 | 45 | 17 | 68 |
| 50-60 | 2 | 50 | 55 | 27 | 54 |
| | 50 | | | | 508 |

যে শ্রেণি অন্তরালে $\frac{N}{2}$ তম বা 25 তম পদটি রয়েছে তা হল 20-30। সুতরাং 20-30 হল মধ্যমা শ্রেণি।

আমরা জানি যে,

$$\text{মধ্যমা } = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

এখানে $l = 20$, $C = 13$, $f = 15$, $h = 10$ এবং $N = 50$

সুতরাং, $\quad \text{মধ্যমা } = 20 + \frac{25-13}{15} \times 10 = 20 + 8 = 28$

তাহলে, মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য হল

$$\text{M.D.(M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - M| = \frac{1}{50} \times 508 = 10.16$$

## অনুশীলনী 15.1

1 নং এবং 2 নং প্রশ্নে প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলোর গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো।

**1.** 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

**2.** 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

3 নং এবং 4 নং প্রশ্নে প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলোর মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো।

**3.** 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17

**4.** 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

5 নং এবং 6 নং প্রশ্নে প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলোর গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো।

**5.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| $f_i$ | 7 | 4 | 6 | 3 | 5 |

**6.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 10 | 30 | 50 | 70 | 90 |
| $f_i$ | 4 | 24 | 28 | 16 | 8 |

7 নং এবং 8 নং প্রশ্নে প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলোর মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো।

**7.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 15 |
| $f_i$ | 8 | 6 | 2 | 2 | 2 | 6 |

**8.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 15 | 21 | 27 | 30 | 35 |
| $f_i$ | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 |

9 নং এবং 10 নং প্রশ্নে প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলোর গড়ের সাপেক্ষে গড়ের পার্থক্য নির্ণয় করো

**9.**

| প্রতিদিনের আয় | 0-100 | 100-200 | 200-300 | 300-400 | 400-500 | 500-600 | 600-700 | 700-800 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| লোকসংখ্যা | 4 | 8 | 9 | 10 | 7 | 5 | 4 | 3 |

**10.**

| উচ্চতা (সেমিতে) | 95-105 | 105-115 | 115-125 | 125-135 | 135-145 | 145-155 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ছেলেদের সংখ্যা | 9 | 13 | 26 | 30 | 12 | 10 |

**11.** নীচের রাশিতথ্যগুলোর মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো:

| নম্বর | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| মেয়েদের সংখ্যা | 6 | 8 | 14 | 16 | 4 | 2 |

**12.** নিম্নে প্রদত্ত 100 জন লোকের বয়সের বিভাজন থেকে মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো :

| বয়স | 16-20 | 21-25 | 26-30 | 31-35 | 36-40 | 41-45 | 46-50 | 51-55 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| লোকসংখ্যা | 5 | 6 | 12 | 14 | 26 | 12 | 16 | 9 |

[ইঙ্গিত প্রতিটি শ্রেণি অন্তরালের নিম্নসীমা থেকে 0.5 বিয়োগ এবং উর্ধ্বসীমার সঙ্গে 0.5 যোগ করে প্রদত্ত রাশিতথ্যগুলোকে সন্তত পরিসংখ্যা বিভাজনে পরিবর্তিত করো]

***15.4.3 গড় পার্থক্যের সীমাবদ্ধতা (Limitations of mean deviation)*** কোনো শ্রেণিতে যেখানে পরিবর্তনশীলতার ঘাত খুব বেশী সেখানে কেন্দ্রীয় প্রবনতার পরিমাপের জন্য মধ্যমা অপরিহার্য নয়। তাই এই সমস্ত শ্রেণির ক্ষেত্রে মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য-কে সম্পূর্ণভাবে বিশ্বাস করা যায় না।

গড় থেকে পার্থক্যগুলোর সমষ্টি (ঋণাত্মক চিহ্ন উপেক্ষা করে), মধ্যমা থেকে পার্থক্যগুলোর সমষ্টির চেয়ে বেশী হয়। তাই গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য খুব একটা বিজ্ঞান সম্মত নয়। অনেক ক্ষেত্রেই দেখা যায় গড় পার্থক্যের ফলাফল অসন্তোষজনক। যদিও গড় পার্থক্য নির্ণয় করা হয় পার্থক্যগুলোর পরম মানের সাহায্যে তাই আর কোনো বীজগাণিতিক কাজ করাও সম্ভব নয়। তাই আমাদের অন্য কোনো বিস্তৃতির পরিমাপের দিকে মনোযোগ দেওয়া প্রয়োজন। ঠিক এরকমই একটি বিস্তৃতির পরিমাপ হল সমক পার্থক্য।

## 15.5 ভেদমান ও সমক পার্থক্য (Variance and Standard Deviation)

মনে করে দেখো আমরা যখন গড় অথবা মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করি তখন পার্থক্যসমূহের পরম মানের সাহায্য নিয়ে থাকি। গড় পার্থক্য অর্থবহ করার জন্যই পরম মান নেওয়া হয় অন্যথায় পার্থক্যগুলো পরস্পর নিজেদের মধ্যেই বাতিল হয়ে যায়।

অপরদিকে পার্থক্যগুলোর চিহ্নের জন্য যে সমস্যা দেখা দেয় তা দূর করার জন্য পার্থক্যগুলোর বর্গ নেওয়া যেতে পারে।

অবশ্যই এই সমস্ত পার্থক্যগুলোর বর্গসমূহ সবই অ-ঋণাত্মক। ধরা যাক, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ হল $n$ সংখ্যক পর্যবেক্ষণ এবং $\overline{x}$ তাদের গড়। তাহলে

$$(x_1-\overline{x})^2 \;+\; (x_2 \;-\overline{x})^2 \;+\; \ldots\ldots + \;(x_n-\overline{x})^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

যদি এদের সমষ্টি শূণ্য হয় তাহলে প্রতিটি $(x_i-\overline{x})$ শূন্য হবে। তাহলে দেখা যাচ্ছে, যে সকল পর্যবেক্ষণগুলোর মান গড় $\overline{x}$ এর সমান হয় এদের কোনো বিস্তৃতিই থাকবে না।

যদি $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ ছোট হয় তাহলে $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ পর্যবেক্ষণগুলোর গড় $\overline{x}$ এর কাছাকাছি থাকবে এবং বিস্তৃতির ঘাত কম হবে। অপরপক্ষে, যদি সমষ্টি বড় হয় তাহলে গড় $\overline{x}$ থেকে পর্যবেক্ষণগুলোর বিস্তৃতির ঘাত বড় হবে। তাহলে কি আমরা বলতে পারি যে $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ হল বিস্তৃতির ঘাতের একটি সঠিক নির্দেশক?

ধরা যাক, ছয়টি পর্যবেক্ষণের একটি সেট A হল 5, 15, 25, 35, 45, 55। পর্যবেক্ষণগুলোর গড় হল $\overline{x}=30$। $\overline{x}$ থেকে পার্থক্যগুলোর বর্গের যোগফল

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2 = (5-30)^2 + (15-30)^2 + (25-30)^2 + (35-30)^2 + (45-30)^2 + (55-30)^2$$

$$= 625 + 225 + 25 + 25 + 225 + 625 = 1750$$

চল আমরা 31টি পর্যবেক্ষণের অপর একটি সেট B নিলাম 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45। এই পর্যবেক্ষণগুলোর গড় $\overline{y}=30$

লক্ষ করো যে A ও B উভয় সেটেরই পর্যবেক্ষণগুলোর গড় 30। এখন B সেটের পর্যবেক্ষণগুলোর গড় y থেকে পার্থক্যগুলোর বর্গের সমষ্টি হল

$$\sum_{i=1}^{31}(y_i-\overline{y})^2 = (15-30)^2 + (16-30)^2 + (17-30)^2 + \ldots + (44-30)^2 + (45-30)^2$$

$$= (-15)^2 + (-14)^2 + \ldots + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 14^2 + 15^2$$

$$= 2\,[15^2 + 14^2 + \ldots + 1^2]$$

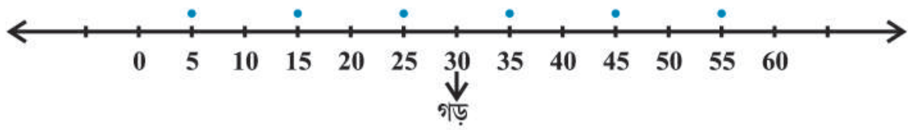
$$= 2\times\frac{15\times(15+1)\,(30+1)}{6} = 5\times 16\times 31 = 2480$$

(কারণ প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি $\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$, এখানে $n = 15$)

যদি গড়ের সাপেক্ষে বিস্তৃতির পরিমাপ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ হয়, আমরা বলতে পারি যে, গড়ের সাপেক্ষে ছয়টি পর্যবেক্ষণের সেট A এর বিস্তৃতি 31টি পর্যবেক্ষণের সেট B এর বিস্তৃতির চেয়ে কম। যদিও A সেটের পর্যবেক্ষণগুলো (পার্থক্যগুলোর প্রসার –25 থেকে 25), B সেটের পর্যবেক্ষণগুলোর চেয়ে (পার্থক্যগুলোর প্রসার –15 থেকে 15) অনেক বেশী গড়ের চারিদিকে ছড়িয়ে রয়েছে।

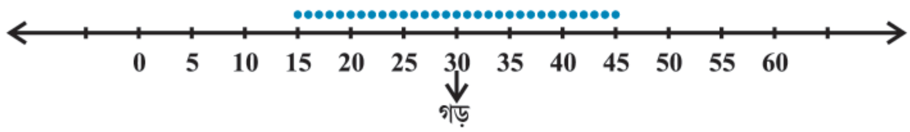
নীচের চিত্রগুলোর সাহায্যে এটি আরও পরিস্কার বোঝা যায়।

A সেটের জন্য,




**চিত্র :15.5**

B সেটের জন্য,




**চিত্র : 15.6**

তাই বলা যায়, গড় থেকে পার্থক্যগুলোর বর্গের সমষ্টি বিস্তৃতির সঠিক পরিমাপ নয়। এই সমস্যাটি দূর করার জন্য আমরা পার্থক্যগলোর বর্গের গড় নির্ণয় করি অর্থাৎ, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ । A সেট -এর জন্য গড় $= \frac{1}{6}\times 1750 = 291.67$ এবং B সেট-এর জন্য গড় হল $\frac{1}{31}\times 2480 = 80$ ।

এ থেকে ধারণা করা যায় যে A সেটের বিস্তৃতি B সেটের তুলনায় বেশি এবং তা জ্যামিতিক উপস্থাপনের সাহায্যেও স্পষ্ট বোঝা যায়। তাহলে আমরা $\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^2$ কে বিস্তৃতির সঠিক পরিমাপ হিসেবে নিতে পারি। এই সংখ্যাটি অর্থাৎ, গড় থেকে পার্থক্যসমূহের বর্গের গড়কে বলা হয় *ভেদমান* এবং $\sigma^2$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় (পড়া হয় সিগমা স্কয়ার)। সুতরাং n সংখ্যক পর্যবেক্ষণ $x_1, x_2, ..., x_n$ এর ভেদমান হল

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

### 15.5.1 সমক পার্থক্য (Standard Deviation)

ভেদমান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে, আমরা দেখতে পাই যে প্রতিটি পর্যবেক্ষণ $x_i$ এর একক এবং তাদের গড় $\overline{x}$ এর একক পৃথক, কেননা ভেদমান $(x_i - \overline{x})$ এর বর্গের যোগফলের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। এই কারণে পর্যবেক্ষণগুলোর গড়ের সাপেক্ষে বিস্তৃতির সঠিক পরিমাপকে ভেদমানের ধনাত্মক বর্গমূলের দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ইহাকে বলা হয় *সমক পার্থক্য*।

সুতরাং সমক পার্থক্য যা সাধারণত $\sigma$ দ্বারা প্রকাশিত হয়, তা হল

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \qquad \text{... (1)}$$

সরল রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে নীচের উদাহরণটির ভেদমান ও অতঃপর সমক পার্থক্য নির্ণয় করা হল।

**উদাহরণ 8** নীচের রাশিতথ্যগুলোর ভেদমান নির্ণয় করো :

6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24

**সমাধান** প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে নীচের সারণি 15.7 তৈরি করা হল। কল্পিত গড় 14 নিয়ে ধাপ-পার্থক্য পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা হল। মোট পর্যবেক্ষণ সংখ্যা হল 10।

**সারণি 15.7**

| $x_i$ | $d_i = \frac{x_i - 14}{2}$ | গড় থেকে পার্থক্য $(x_i - \overline{x})$ | $(x_i - \overline{x})$ |
|---|---|---|---|
| 6 | –4 | –9 | 81 |
| 8 | –3 | –7 | 49 |
| 10 | –2 | –5 | 25 |
| 12 | –1 | –3 | 9 |
| 14 | 0 | –1 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 |
| 18 | 2 | 3 | 9 |
| 20 | 3 | 5 | 25 |
| 22 | 4 | 7 | 49 |
| 24 | 5 | 9 | 81 |
| | 5 | | 330 |

অতএব, গড় $\bar{x}$ = কল্পিত গড় + $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \times h = 14 + \dfrac{5}{10} \times 2 = 15$

এবং ভেদমান $(\sigma^2) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \dfrac{1}{10} \times 330 = 33$

সুতরাং, সমক পার্থক্য $(\sigma) = \sqrt{33} = 5.74$

### *15.5.2 বিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজনের সমক পার্থক্য (Standard deviation of a discrete frequency distribution)*

ধরা যাক প্রদত্ত বিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজনটি হল

$$x : x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_n$$
$$f : f_1,\ f_2,\ f_3, \ldots, f_n$$

এক্ষেত্রে সমক পার্থক্য $(\sigma) = \sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}$ ... (2)

যেখানে $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ ।

নিচের উদাহরণটি নিয়ে দেখা যাক।

**উদাহরণ 9** নীচের রাশিতথ্যগুলোর ভেদমান ও সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

| $x_i$ | 4 | 8 | 11 | 17 | 20 | 24 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 3 | 5 | 9 | 5 | 4 | 3 | 1 |

**সমাধান** সারণি 15.8 -এ রাশি তথ্যগুলো উপস্থাপন করা হল।

**সারণি 15.8**

| $x_i$ | $f_i$ | $f_i x_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $f_i (x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 12 | –10 | 100 | 300 |
| 8 | 5 | 40 | –6 | 36 | 180 |
| 11 | 9 | 99 | –3 | 9 | 81 |
| 17 | 5 | 85 | 3 | 9 | 45 |
| 20 | 4 | 80 | 6 | 36 | 144 |
| 24 | 3 | 72 | 10 | 100 | 300 |
| 32 | 1 | 32 | 18 | 324 | 324 |
| | 30 | 420 | | | 1374 |

$$N = 30,\ \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 420,\ \sum_{i=1}^{7} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 1374$$

সুতরাং,
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{N} = \frac{1}{30} \times 420 = 14$$

অতএব,
$$\text{ভেদমান } (\sigma^2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{30} \times 1374 = 45.8$$

এবং
$$\text{সমক পার্থক্য } (\sigma) = \sqrt{45.8} = 6.77$$

***15.5.3 সন্তত পরিসংখ্যা বিভাজনের সমক পার্থক্য (Standard deviation of a continuous frequency distribution)*** প্রতিটি শ্রেণিকে তার মধ্যবিন্দু দিয়ে প্রতিস্থাপন করে সন্তত পরিসংখ্যা বিভাজনকে বিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজনে উপস্থাপন করা যায়। বিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজনের অনুরূপ পদ্ধতির সাহায্যে সমক পার্থক্যও নির্ণয় করা যায়।

যদি পরিসংখ্যা বিভাজনের $n$ সংখ্যক শ্রেণির মধ্যবিন্দু $x_i$ এবং পরিসংখ্যা $f_i$ হয় তাহলে সমক পার্থক্য নির্ণয়ের সূত্রটি হল

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

যেখানে $\bar{x}$ হল বিভাজনের গড় এবং $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ ।

**সমক পার্থক্য নির্ণয়ের অপর সূত্র** আমরা জানি যে

$$\text{ভেদমান } (\sigma^2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\, x_i)$$

$$= \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 f_i - \sum_{i=1}^{n} 2\bar{x}\, f_i x_i \right]$$

$$= \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{n} f_i - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2\ N - 2\bar{x}\ .\ N\ \bar{x}\right]\left[\text{এখানে } \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \bar{x} \text{ অথবা } \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = N\bar{x}\right]$$

$$= \frac{1}{N}\ \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2\ - 2\bar{x}^2 = \frac{1}{N}\ \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \ \bar{x}^2$$

অথবা
$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^2}\left[N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2\right]$$

অতএব, সমক পার্থক $(\sigma) = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2}$ ... (3)

**উদাহরণ 10** নীচের বিভাজনটির গড়, ভেদমান ও সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

| শ্রেণি | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যান | 3 | 7 | 12 | 15 | 8 | 3 | 2 |

**সমাধান** প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে সারণি 15.9 তৈরি করি।

**সারণি 15.9**

| শ্রেণি | পরিসংখ্যা $(f_i)$ | মধ্যবিন্দু $(x_i)$ | $f_i x_i$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $f_i(x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 30-40 | 3 | 35 | 105 | 729 | 2187 |
| 40-50 | 7 | 45 | 315 | 289 | 2023 |
| 50-60 | 12 | 55 | 660 | 49 | 588 |
| 60-70 | 15 | 65 | 975 | 9 | 135 |
| 70-80 | 8 | 75 | 600 | 169 | 1352 |
| 80-90 | 3 | 85 | 255 | 529 | 1587 |
| 90-100 | 2 | 95 | 190 | 1089 | 2178 |
| | 50 | | 3100 | | 10050 |

সুতরাং, গড় $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{3100}{50} = 62$

$$\text{ভেদমান } \left(\sigma^2\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{50} \times 10050 = 201$$

এবং সমক পার্থক্য $(\sigma) = \sqrt{201} = 14.18$

**উদাহরণ 11** নীচের রাশিতথ্যগুলোর সমক পার্থক্য নির্ণয় করো ঃ

| $x_i$ | 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 7 | 10 | 15 | 10 | 6 |

**সমাধান** আমরা সারণি 15.10 তৈরি করি

**সারণি 15.10**

| $x_i$ | $f_i$ | $f_i x_i$ | $x_i^2$ | $f_i x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 21 | 9 | 63 |
| 8 | 10 | 80 | 64 | 640 |
| 13 | 15 | 195 | 169 | 2535 |
| 18 | 10 | 180 | 324 | 3240 |
| 23 | 6 | 138 | 529 | 3174 |
| | 48 | 614 | | 9652 |

সূত্র (3)-এর সাহায্যে পাই,

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{48 \times 9652 - (614)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{463296 - 376996}$$

$$= \frac{1}{48} \times 293.77 = 6.12$$

অতএব, সমক পার্থক্য $(\sigma) = 6.12$

***15.5.4. ভেদমান ও সমক পার্থক্য নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি (Shortcut method to find variance and standard deviation)*** কখনো কখনো বিচ্ছিন্ন বিভাজনের মান $x_i$ অথবা সন্তত বিভাজনের বিভিন্ন শ্রেণির মধ্যবিন্দু $x_i$ গুলো এত বড় হয় যে গড় ও ভেদমান নির্ণয় করা যেমন কষ্টসাধ্য তেমনি সময় সাপেক্ষ। ধাপ পদ্ধতি ব্যবহারের মাধ্যমে এই গণনাকার্যকে সহজ করা যায়।

ধরা যাক কল্পিত গড় 'A' এবং স্কেল $\frac{1}{h}$ গুণ কমানো হল (h হল শ্রেণি অন্তরালের বিস্তার)। ধরা যাক ধাপ পার্থক্য বা নতুন মান হল $y_i$।

অর্থাৎ $$y_i = \frac{x_i - A}{h} \text{ বা } x_i = A + hy_i \qquad \dots (1)$$

আমরা জানি, $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N} \qquad \dots (2)$$

(1) থেকে $x_i$ এর মান (2) -এ বসিয়ে পাই,

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(A + hy_i)}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i A + \sum_{i=1}^{n} h\, f_i y_i\right) = \frac{1}{N}\left(A \sum_{i=1}^{n} f_i + h \sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)$$

$$= A \cdot \frac{N}{N} + h\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i}{N} \qquad \left(\text{কারণ } \sum_{i=1}^{n} f_i = N\right)$$

অর্থাৎ, $$\bar{x} = A + h\,\bar{y} \qquad \dots (3)$$

এখন, x এর ভেদমান, $\sigma_x{}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(A + hy_i - A - h\,\bar{y})^2$$ ((1) এবং (3) ব্যবহার করে)

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\, h^2\, (y_i - \bar{y})^2$$

$$= \frac{h^2}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\, (y_i - \bar{y})^2 = h^2 \times y_i \text{ -এর ভেদমান}$$

অর্থাৎ, $\sigma_x{}^2 = h^2\sigma_y{}^2$ বা, $\sigma_x = h\sigma_y$ ... (4)

(3) এবং (4) হতে,

$$\sigma_x = \frac{h}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i y_i{}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)^2} \quad \text{... (5)}$$

এবারে আমরা (5) ব্যবহার করে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে উদাহরণ 11 সমাধান করতে পারি।

**উদাহরণ 12** নীচের বিভাজনের গড়, ভেদমান ও সমক পার্থক্য বের করো।

| শ্রেণি | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা | 3 | 7 | 12 | 15 | 8 | 3 | 2 |

**সমাধান** ধরি কল্পিত গড় A = 65। এখানে h = 10

প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে নীচের 15.11 সারণিটি পাওয়া যায়।

**সারণি 15.11**

| শ্রেণি | পরিসংখ্যা $f_i$ | মধ্যবিন্দু $x_i$ | $y_i = \frac{x_i - 65}{10}$ | $y_i{}^2$ | $f_i\, y_i$ | $f_i\, y_i{}^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30-40 | 3 | 35 | – 3 | 9 | – 9 | 27 |
| 40-50 | 7 | 45 | – 2 | 4 | – 14 | 28 |
| 50-60 | 12 | 55 | – 1 | 1 | – 12 | 12 |
| 60-70 | 15 | 65 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 70-80 | 8 | 75 | 1 | 1 | 8 | 8 |
| 80-90 | 3 | 85 | 2 | 4 | 6 | 12 |
| 9 0-100 | 2 | 95 | 3 | 9 | 6 | 18 |
| | N=50 | | | | – 15 | 105 |

সুতরাং, $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i y_i}{50} \times h = 65 - \frac{15}{50} \times 10 = 62$

ভেদমান $\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2}\left[N\Sigma f_i y_i^2 - \left(\Sigma f_i y_i\right)^2\right]$

$$= \frac{(10)^2}{(50)^2}\left[50 \times 105 - (15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}[5250 - 225] = 201$$

এবং সমক পার্থক্য $(\sigma) = \sqrt{201} = 14.18$

## অনুশীলনী 15.2

1 নং প্রশ্ন থেকে 5 নং প্রশ্ন পর্যন্ত প্রতিটি রাশিতথ্যের গড় ও ভেদমান নির্ণয় করো।

**1.** 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

**2.** প্রথম $n$-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা

**3.** 3 এর প্রথম 10টি গুণিতক

**4.**

| $x_i$ | 6 | 10 | 14 | 18 | 24 | 28 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 2 | 4 | 7 | 12 | 8 | 4 | 3 |

**5.**

| $x_i$ | 92 | 93 | 97 | 98 | 102 | 104 | 109 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 3 | 2 | 3 | 2 | 6 | 3 | 3 |

**6.** সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় ও সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

| $x_i$ | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 2 | 1 | 12 | 29 | 25 | 12 | 10 | 4 | 5 |

7 ও 8নং প্রশ্নের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত বিভাজনের গড় ও ভেদমান নির্ণয় করো।

**7.**

| শ্রেণি | 0-30 | 30-60 | 60-90 | 90-120 | 120-150 | 150-180 | 180-210 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা | 2 | 3 | 5 | 10 | 3 | 5 | 2 |

8.

| শ্রেণি | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা | 5 | 8 | 15 | 16 | 6 |

9. সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি অনুসরণ করে গড়, ভেদমান ও সমকপার্থক্য নির্ণয় করো।

| উচ্চতা (সেমিতে) | 70-75 | 75-80 | 80-85 | 85-90 | 90-95 | 95-100 | 100-105 | 105-110 | 110-115 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| শিশুর সংখ্যা | 3 | 4 | 7 | 7 | 15 | 9 | 6 | 6 | 3 |

10. কোনো একটি নক্সায় অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাস (মিমি-তে) দেওয়া হল :

| ব্যাস | 33-36 | 37-40 | 41-44 | 45-48 | 49-52 |
|---|---|---|---|---|---|
| বৃত্তের সংখ্যা | 15 | 17 | 21 | 22 | 25 |

বৃত্তগুলোর ব্যাসের সমক পার্থক্য ও গড় নির্ণয় করো।

[ইঙ্গিত শ্রেণিগুলোকে 32.5-36.5, 36.5-40.5, 40.5-44.5, 44.5 - 48.5, 48.5 - 52.5 এ পরিবর্তিত করে সন্তত করো এবং অগ্রসর হও ।]

## 15.6 পরিসংখ্যা বিভাজনের বিশ্লেষণ (Analysis of Frequency Distributions)

পূর্বের অনুচ্ছেদগুলোতে আমরা বিভিন্ন ধরনের বিস্তৃতির পরিমাপ সম্পর্কে পড়েছি। প্রদত্ত রাশিতথ্যের গড় পার্থক্য এবং সমক পার্থক্য এর একক অভিন্ন। যখন একই গড় বিশিষ্ট দুটি শ্রেণির পরিবর্তনশীলতার তুলনা করা হয় এবং বিভিন্ন এককে পরিমাপ করা হয় তখন আমরা কেবলমাত্র বিস্তৃতির পরিমাপ নির্ণয় করতে পারি না। আমাদের তখন এককের উপর নির্ভরশীল নয় এমন পরিমাপ সমূহের প্রয়োজন। পরিবর্তনশীলতার পরিমাপ যা এককের উপর নির্ভর করে না, এমন পরিমাপকে ভেদাঙ্ক (Coefficient of Variation) বলে (C.V দ্বারা প্রকাশ করা হয়)।

ভেদাঙ্ক হল,

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\,, \quad \bar{x} \neq 0\,,$$

যেখানে $\sigma$ ও $\bar{x}$ যথাক্রমে রাশিতথ্যের সমক পার্থক্য ও গড়।

দুটি শ্রেণির বিস্তৃতির অথবা পরিবর্তনশীলতার তুলনা করতে হলে আমরা শ্রেণি দুটির ভেদাঙ্ক নির্ণয় করি। যে শ্রেণিটির C.V বেশী তাকে অন্যটির চেয়ে বেশী পরিবর্তনশীল বলি। যে শ্রেণিটির C.V কম সেটি অন্যটির চেয়ে বেশী সঙ্গত।

***15.6.1 সমগড়যুক্ত দুটি পরিসংখ্যা বিভাজনের তুলনা (Comparison of two frequency distributions with same mean)*** ধরা যাক প্রথম বিভাজনের গড় ও সমক পার্থক্য $\bar{x}_1$ ও $\sigma_1$ এবং দ্বিতীয় বিভাজনের গড় ও সমক পার্থক্য $\bar{x}_2$ ও $\sigma_2$।

তাহলে C.V (প্রথম বিভাজন) $= \dfrac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$

এবং C.V (দ্বিতীয় বিভাজন) $= \dfrac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

দেওয়া আছে $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$ (ধরি)

সুতরাং C.V (প্রথম বিভাজন) $= \dfrac{\sigma_1}{\bar{x}} \times 100$ ... (1)

এবং C.V (দ্বিতীয় বিভাজন) $= \dfrac{\sigma_2}{\bar{x}} \times 100$ ... (2)

(1) এবং (2) থেকে এটা পরিস্কার যে, কেবল $\sigma_1$ ও $\sigma_2$ এর মানের ভিত্তিতে দুটি C.V তুলনা করা যায়।

তাই সমান গড় যুক্ত দুটি শ্রেণির সম্পর্কে আমরা বলতে পারি, যে শ্রেণির সমক পার্থক্য (বা ভেদমান) বেশী সে শ্রেণিটি অন্যটির চেয়ে অধিক বিস্তৃত অথবা পরিবর্তনশীল। অন্যদিকে যে শ্রেণির সমক পার্থক্য (বা ভেদমান) কম সেটি অন্যটির চেয়ে অধিক সঙ্গত।

নীচের উদাহরণগুলো আলোচনা করা যাক।

**উদাহরণ 13** একটি কারখানার দুটি যন্ত্রাংশ থেকে শ্রমিকের সংখ্যা এবং তাদের পারিশ্রমিক সম্পর্কে নীচের তথ্যগুলো জানা যায়।

| | A | B |
|---|---|---|
| শ্রমিকের সংখ্যা | 5000 | 6000 |
| মাসিক গড় আয় | 2500 টাকা | 2500 টাকা |
| আয়ের বিভাজনের ভেদমান | 81 | 100 |

ব্যক্তিগত আয়ের প্রেক্ষিতে A অথবা B, কোন যন্ত্রাংশের পরিবর্তনশীলতা অধিক?

**সমাধান** A যন্ত্রাংশের বিভাজনের ভেদমান A $(\sigma_1^2) = 81$

অতএব, বিভাজনটির সমক পার্থক্য A $(\sigma_1) = 9$

আবার B যন্ত্রাংশের বিভাজনের ভেদমান B $(\sigma_2{}^2) = 100$

অতএব, বিভাজনটির সমক পার্থক্য B $(\sigma_2) = 10$

যেহেতু দুটি যন্ত্রাংশের মাসিক গড় আয় সমান অর্থাৎ, 2500 টাকা তাই অধিক সমক পার্থক্য যুক্ত যন্ত্রাংশের পরিবর্তনশীলতা বেশী হবে।

তাই ব্যক্তিগত আয়ের ক্ষেত্রে B যন্ত্রাংশের পরিবর্তনশীলতা অধিক।

**উদাহরণ 14** দুটি বিভাজনের ভেদাঙ্ক 60 ও 70 এবং তাদের সমক পার্থক্য যথাক্রমে 21 ও 16। তাদের গাণিতিক গড় কত?

**সমাধান** দেওয়া আছে, C.V. (প্রথম বিভাজন) = 60, $\sigma_1 = 21$

C.V. (দ্বিতীয় বিভাজন) = 70, $\sigma_2 = 16$

ধরা যাক, প্রথম ও দ্বিতীয় বিভাজনের গড় যথাক্রমে $\bar{x}_1$ ও $\bar{x}_2$ ।

তাহলে C.V. (প্রথম বিভাজন) = $\dfrac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$

সুতরাং $60 = \dfrac{21}{\bar{x}_1} \times 100$ বা $\bar{x}_1 = \dfrac{21}{60} \times 100 = 35$

এবং C.V. (দ্বিতীয় বিভাজন) = $\dfrac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

অর্থাৎ, $70 = \dfrac{16}{\bar{x}_2} \times 100$ বা $\bar{x}_2 = \dfrac{16}{70} \times 100 = 22.85$

**উদাহরণ 15** নীচের মানগুলো একাদশ শ্রেণির একটি শাখার শিক্ষার্থীদের উচ্চতা ও ওজনের ভিত্তিতে নেওয়া হয়েছে।

| | উচ্চতা | ওজন |
|---|---|---|
| গড় | 162.6 সেমি | 52.36 কেজি |
| ভেদমান | 127.69 সেমি$^2$ | 23.1361 কেজি$^2$ |

আমরা কি বলতে পারি যে উচ্চতার চেয়ে ওজনের ভেদমান বেশি?

**সমাধান** পরিবর্তনশীলতার তুলনা করতে, প্রথমে আমাদের ভেদাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

দেওয়া আছে, উচ্চতার ভেদমান = 127.69 সেমি$^2$

সুতরাং উচ্চতার সমক পার্থক্য = $\sqrt{127.69}$ সেমি = 11.3 সেমি

এবং ওজনের ভেদমান = 23.1361 কেজি$^2$

সুতরাং ওজনের সমক পার্থক্য $= \sqrt{23.1361}$ কেজি $= 4.81$ কেজি

এখন উচ্চতার ভেদাঙ্ক (C.V) $= \dfrac{\text{সমক পার্থক্য}}{\text{গড়}} \times 100$

$$= \frac{11.3}{162.6} \times 100 = 6.95$$

এবং ওজনের ভেদাঙ্ক (C.V) $= \dfrac{4.81}{52.36} \times 100 = 9.18$

অর্থাৎ উচ্চতার ভেদাঙ্কের চেয়ে ওজনের ভেদাঙ্ক বেশী।

সুতরাং, আমরা বলতে পারি উচ্চতার চেয়ে ওজনের পরিবর্তনশীলতা বেশী।

## অনুশীলনী 15.3

**1.** নিম্নে প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে, A ও B এর মধ্যে কোনটি বেশী পরিবর্তনশীল বিবৃত করো?

| নম্বর | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| গ্রুপ A | 9 | 17 | 32 | 33 | 40 | 10 | 9 |
| গ্রুপ B | 10 | 20 | 30 | 25 | 43 | 15 | 7 |

**2.** নীচের X ও Y এর শেয়ার দর থেকে কোনটি মানের সাপেক্ষে বেশি স্থায়ী বের করো :

| X | 35 | 54 | 52 | 53 | 56 | 58 | 52 | 50 | 51 | 49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 108 | 107 | 105 | 105 | 106 | 107 | 104 | 103 | 104 | 101 |

**3.** কোনো একটি শিল্প প্রতিষ্ঠানের দুটি ফার্ম A ও B এর শ্রমিকদের মাসিক আয়ের একটি বিশ্লেষণ নীচে দেওয়া হল :

| | ফার্ম A | ফার্ম B |
|---|---|---|
| শ্রমিক সংখ্যা | 586 | 648 |
| মাসিক আয়ের গড় | 5253 টাকা | 5253 টাকা |
| আয়ের বিভাজনের ভেদমান | 100 | 121 |

(i) A অথবা B এর মধ্যে কোন ফার্মটি পারিশ্রমিক বাবদ বেশী খরচ করে?

(ii) A অথবা B এর মধ্যে কোন ফার্মটির ব্যক্তিগত পারিশ্রমিকের ক্ষেত্রে পরিবর্তনশীলতা বেশী?

**4.** ফুটবল খেলার একটি মরশুমে A দলের গোলের রেকর্ড নিম্নে দেওয়া হল :

| গোল সংখ্যা | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| ম্যাচ সংখ্যা | 1 | 9 | 7 | 5 | 3 |

B দলের প্রতি ম্যাচ পিছু গোল করার গড় 2 এবং সমক পার্থক্য 1.25। কোন দল বেশী সঙ্গত, তা বের করো ?

**5.** 50টি উদ্ভিজ দ্রব্যের দৈর্ঘ্য x (সেমিতে) ও ওজন y (গ্রাম-এ) এর সমষ্টি এবং তাদের বর্গের সমষ্টি নিচে দেওয়া হল :

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 212,\ \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 902.8,\ \sum_{i=1}^{50} y_i = 261,\ \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1457.6$$

দৈর্ঘ্য বা ওজনের মধ্যে কোনটি বেশী পরিবর্তনশীল ?

## বিবিধ উদাহরণমালা

**উদাহরণ 16** 20টি পর্যবেক্ষণের ভেদমান হল 5। যদি প্রতিটি পর্যবেক্ষণকে 2 দ্বারা গুণ করা হয় তাহলে নতুন পর্যবেক্ষণগুলোর ভেদমান নির্ণয় করো।

**সমাধান** ধরা যাক পর্যবেক্ষণগুলো হল $x_1, x_2, ..., x_{20}$ এবং $\bar{x}$ হল তাদের গড়।

দেওয়া আছে, ভেদমান = 5 এবং n = 20 ।

আমরা জানি, ভেদমান $(\sigma^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2$

অর্থাৎ, $5 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2$

বা $\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 100$

যদি প্রতিটি পর্যবেক্ষণকে 2 দ্বারা গুণ করা হয় এবং নতুন পর্যবেক্ষণগুলো $y_i$ হয়, তাহলে

$$y_i = 2x_i \text{ অর্থাৎ, } x_i = \frac{1}{2}y_i$$

সুতরাং $$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} 2x_i = 2 . \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

অর্থাৎ, $$\bar{y} = 2\bar{x} \text{ বা } \bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y}$$

(1) এ $x_i$ এবং $\bar{x}$ এর মানগুলো বসিয়ে পাই,

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{2}y_i-\frac{1}{2}\overline{y}\right)^2=100\text{, অর্থাৎ, }\sum_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2=400$$

অর্থাৎ নতুন পর্যবেক্ষণগুলোর ভেদমান $=\dfrac{1}{20}\times 400=20=2^2\times 5$

> **দ্রষ্টব্য** যদি প্রতিটি পর্যবেক্ষণকে একটি ধ্রুবক $k$ দ্বারা গুণ করা হয় তাহলে নতুন পর্যবেক্ষণগুলোর ভেদমান হবে মূল ভেদমানের $k^2$ গুণ।

**উদাহরণ 17** 5টি পর্যবেক্ষণের গড় 4.4 এবং তাদের ভেদমান 8.24 । যদি পর্যবেক্ষণগুলোর মধ্যে তিনটি 1, 2 এবং 6 হয় তাহলে অপর দুটি পর্যবেক্ষণ বের করো।

**সমাধান** ধরা যাক, অপর পর্যবেক্ষণ দুটি হল $x$ এবং $y$।

তাহলে শ্রেণিটি হবে 1, 2, 6, $x$, $y$ ।

এখন গড় $\overline{x}=4.4=\dfrac{1+2+6+x+y}{5}$

বা $22=9+x+y$

সুতরাং $x+y=13$ ... (1)

আবার ভেদমান $8.24=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2$

অর্থাৎ, $8.24=\dfrac{1}{5}\left[(3.4)^2+(2.4)^2+(1.6)^2+x^2+y^2-2\times 4.4\,(x+y)+2\times(4.4)^2\right]$

বা $41.20=11.56+5.76+2.56+x^2+y^2-8.8\times 13+38.72$

অর্থাৎ $x^2+y^2=97$ ... (2)

কিন্তু (1) থেকে পাই, $x^2+y^2+2xy=169$ ... (3)

(2) ও (3) থেকে পাই,

$2xy=72$ ... (4)

(2) থেকে (4) বিয়োগ করে পাই, $x^2+y^2-2xy=97-72$ অর্থাৎ, $(x-y)^2=25$

বা $x-y=\pm 5$ ... (5)

সুতরাং, (1) ও (5) থেকে পাই, $x=9$, $y=4$ যখন $x-y=5$

আবার $x=4$, $y=9$ যখন $x-y=-5$

সুতরাং অবশিষ্ট দুটি পর্যবেক্ষণ হল 4 এবং 9।

**উদাহরণ 18** যদি $x_1, x_2, ..., x_n$ পর্যবেক্ষণগুলোর প্রতিটি $a$ দ্বারা বৃদ্ধি পায় যেখানে $a$ একটি ঋণাত্মক বা ধণাত্মক সংখ্যা তাহলে দেখাও যে ভেদমান অপরিবর্তনশীল।

**সমাধান** ধরা যাক, $x_1, x_2, ..., x_n$ এর গড় $\overline{x}$ ।

তাহলে ভেদমান $\sigma_1{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$

যদি প্রতিটি পর্যবেক্ষণের সঙ্গে '$a$' যোগ করা হয়, তাহলে নতুন পর্যবেক্ষণগুলো হবে

$$y_i = x_i + a \qquad ... (1)$$

ধরা যাক, নতুন পর্যবেক্ষণগুলোর গড় $\overline{y}$ ।

তাহলে
$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} a\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{na}{n} = \overline{x} + a$$

অর্থাৎ
$$\overline{y} = \overline{x} + a \qquad ... (2)$$

তাহলে নতুন পর্যবেক্ষণগুলোর ভেদমান

$$\sigma_2{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a - \overline{x} - a)^2 \qquad \text{[(1) ও (2) ব্যবহার করে]}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sigma_1{}^2$$

অর্থাৎ নতুন পর্যবেক্ষণগুলোর ভেদমান, আগের পর্যবেক্ষণগুলোর ভেদমানের সমান।

**দ্রষ্টব্য** আমরা দেখতে পাই যে কোনো একটি দলের প্রতিটি পর্যবেক্ষণের সঙ্গে (বা থেকে) কোনো ধণাত্মক সংখ্যা যোগ (বা বিয়োগ) করলে ভেদমানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

**উদাহরণ 19** একজন শিক্ষার্থী 100টি পর্যবেক্ষণের গড় ও ভেদমান গণনা করল যথাক্রমে 40 ও 5.1। কিন্তু ভুলবশত শিক্ষার্থীটি একটি পর্যবেক্ষণকে 40 এর স্থলে 50 নিল। তাহলে সঠিক গড় ও ভেদমান কত?

**সমাধান** দেওয়া আছে, পর্যবেক্ষণ সংখ্যা $(n) = 100$

অশুদ্ধ গড় $(\overline{x}) = 40$

অশুদ্ধ সমক পার্থক্য $(\sigma) = 5.1$

আমরা জানি
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

অর্থাৎ,
$$40 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i \quad \text{বা} \quad \sum_{i=1}^{100} x_i = 4000$$

অর্থাৎ পর্যবেক্ষণগুলোর অশুদ্ধ সমষ্টি = 4000

সুতরাং, পর্যবেক্ষণগুলোর সঠিক সমষ্টি = অশুদ্ধ সমষ্টি – 50 + 40

$$= 4000 - 50 + 40 = 3990$$

তাহলে সঠিক গড় $= \dfrac{\text{সঠিক যোগফল}}{100} = \dfrac{3990}{100} = 39.9$

আবার সমক পার্থক্য $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{x})^2}$$

অর্থাৎ, $5.1 = \sqrt{\dfrac{1}{100} \times \text{ অশুদ্ধ } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (40)^2}$

বা , $26.01 = \dfrac{1}{100} \times \text{ অশুদ্ধ } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1600$

সুতরাং, অশুদ্ধ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 100\,(26.01 + 1600) = 162601$

এখন, সঠিক $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 =$ অশুদ্ধ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (50)^2 + (40)^2$

$$= 16260 - 2500 + 1600 = 161701$$

অতএব, সঠিক সমক পার্থক্য

$$= \sqrt{\frac{\text{সঠিক } \sum x_i^2}{n} - (\text{সঠিক গড়})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{161701}{100} - (39.9)^2}$$

$$= \sqrt{1617.01 - 1592.01} = \sqrt{25} = 5$$

## *অধ্যায় 15 এর বিবিধ অনুশীলনী*

1. আটটি পর্যবেক্ষণের গড় ও ভেদমান যথাক্রমে 9 এবং 9.25। যদি ছয়টি পর্যবেক্ষণ 6, 7, 10, 12, 12 এবং 13 হয় তাহলে বাকি দুটি পর্যবেক্ষণ বের করো।

2. 7 টি পর্যবেক্ষণের গড় ও ভেদমান যথাক্রমে 8 এবং 16। যদি পাঁচটি পর্যবেক্ষণ 2, 4, 10, 12, 14 হয় তাহলে বাকি দুটি পর্যবেক্ষণ বের করো।

3. ছয়টি পর্যবেক্ষণের গড় ও ভেদমান যথাক্রমে 8 এবং 4। যদি প্রতিটি পর্যবেক্ষণকে 3 দ্বারা গুণ করা হয় তাহলে লব্ধ পর্যবেক্ষণগুলোর নতুন গড় ও নতুন সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

4. $n$ সংখ্যক পর্যবেক্ষণ $x_1, x_2, ..., x_n$ এর গড় $\bar{x}$ এবং ভেদমান $\sigma^2$। প্রমাণ কর যে $ax_1, ax_2, ax_3, ....,$ $ax_n$ পর্যবেক্ষণগুলোর গড় ও ভেদমান যথাক্রমে $a\bar{x}$ ও $a^2 \sigma^2$ $(a \neq 0)$।

5. 20টি পর্যবেক্ষণের গড় ও সমক পার্থক্য যথাক্রমে 10 এবং 2। কিন্তু দেখা গেল যে একটি পর্যবেক্ষণ 8 অশুদ্ধ। নীচের প্রতিটি ক্ষেত্রে গড় ও সমক পার্থক্য নির্ণয় করো :

   (i) যদি ভুল পর্যবেক্ষণটি বাদ দেওয়া হয় (ii) যদি এটিকে 12 দ্বারা প্রতিস্থাপিত হয়।

6. কোনো একটি ক্লাশের 50 জন শিক্ষার্থীর গণিত, পদার্থবিদ্যা ও রসায়নে প্রাপ্ত নম্বরের গড় ও সমক পার্থক্য নিম্নে দেওয়া হল:

| **বিষয়** | **গণিত** | **পদার্থবিদ্যা** | **রসায়ন** |
|---|---|---|---|
| **গড়** | 42 | 32 | 40.9 |
| **সমক পার্থক্য** | 12 | 15 | 20 |

   তিনটি বিষয়ের মধ্যে কোনটিতে পরিবর্তনশীলতা সর্বোচ্চ এবং কোনটিতে সর্বনিম্ন ?

7. 100 টি পর্যবেক্ষণের গড় ও সমক পার্থক্য যথাক্রমে 20 এবং 3। পরে দেখা গেল যে এদের মধ্যে তিনটি পর্যবেক্ষণ 21, 21 ও 18 ভুল ছিল। ভুল পর্যবেক্ষণগুলো বাদ দিলে তাদের গড় ও সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

## সারসংক্ষেপ

- **বিস্তৃতির পরিমাপ** প্রসার, চতুর্থক পার্থক্য, গড় পার্থক্য, ভেদমান, সমক পার্থক্য হল বিস্তৃতির পরিমাপ।
  প্রসার = বৃহত্তম মান – ক্ষুদ্রতম মান
- **সরল রাশিতথ্যের গড় পার্থক্য**

$$M.D.(\bar{x}) = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}, \quad M.D.(M) = \frac{\sum |x_i - M|}{n}$$

◆ **শ্রেণিবন্ধ রাশিতথ্যের গড় পার্থক্য**

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N}, \quad \text{M.D.}(M) = \frac{\sum f_i |x_i - M|}{N}, \text{ যেখানে } \quad N = \sum f_i$$

◆ **সরল রাশিতথ্যের ভেদমান ও সমক পার্থক্য**

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

◆ **বিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে ভেদমান ও সমকপার্থক্য**

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

◆ **সন্তত পরিসংখ্যা বিভাজনের ভেদমান ও সমক পাথর্ক্য**

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \frac{1}{N} \sqrt{N \sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

◆ **ভেদমান ও সমক পার্থক্য নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি।**

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2} \left[ N \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2 \right], \ \sigma = \frac{h}{N} \sqrt{N \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2},$$

যেখানে $y_i = \dfrac{x_i - A}{h}$

◆ **ভেদাঙ্ক (C.V.)** $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \ \bar{x} \neq 0$ ।

সমান গড় যুক্ত শ্রেণিগুলোর মধ্যে যেটির সমক পার্থক্য কম সেটি বেশি সঙ্গত বা কম ছড়ানো।

## *ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট*

‘রাশিবিজ্ঞান’ শব্দটি ল্যাটিন শব্দ ‘স্টেটাস’ থেকে এসেছে যার অর্থ রাজনৈতিক রাষ্ট্র। এ থেকে বোঝানো যায় যে রাশি বিজ্ঞান এর বয়স মানব সভ্যতার বয়সের সমান। খ্রীষ্টপূর্ব 3050-এ ইজিপ্ট-এ সম্ভবত প্রথম জনগণনা হয়। ভারতবর্ষেও প্রায় 2000 বছর আগে, চন্দ্রগুপ্ত মৌর্যের আমলে (324 - 300 খ্রী. পূ), প্রশাসনিক যাবতীয় রাশিবিজ্ঞান সংগ্রহের জন্য সবধরনের সুবিধা মজুত ছিল। কৌটিল্যের *অর্থশাস্ত্রে* (প্রায় 300 খ্রী. পূ) জন্ম ও মৃত্যু সম্পর্কিত রাশিতথ্য সংগ্রহের পদ্ধতির উল্লেখ আছে। আকবরের শাসনকালে প্রশাসনিক নিরীক্ষার সবিস্তার উল্লেখ আবুল ফজলের ‘*আইন-ই আকবরী*’ তে পাওয়া যায়।

জন্ম মৃত্যু সংক্রান্ত রাশিবিজ্ঞানের অধ্যয়নের সঙ্গে যুক্ত থাকার জন্য লন্ডনের ক্যাপ্টেন জন গ্রান্ট-কে (1620 - 1674) জীবন সম্বন্ধীয় রাশিবিজ্ঞানের জনক বলা হয়। জেকব বর্নৌলী 1654 - 1705) তাঁর 1713 সালে প্রকাশিত হওয়া বই *"Ars Conjectandi'* তে বৃহত্তম সংখ্যা নিয়মগুলো উল্লেখ করেছেন।

রাশিবিজ্ঞানের তাত্ত্বিক দিকটির উন্নতি হয় সপ্তদশ শতাব্দীর মধ্যভাগে এবং তা চলে ক্রীড়াতত্ত্ব বা সম্ভাবনার উৎপত্তি পর্যন্ত। ইংল্যান্ডের ফ্রান্সিস গ্যালটন (1822 - 1921) হলেন জীবমিতি ক্ষেত্রে রাশিবিজ্ঞান সম্মত পদ্ধতি ব্যবহারের প্রবর্তক। *কাইস্কয়ার টেস্ট* ও ইংল্যান্ডের (1911) *স্ট্যাটিসটিক্যাল ল্যাবরেটরী* ফাউন্ডেশান এর আবিষ্কর্তা কার্ল পিয়ারসন (1857 - 1936) রাশি বিজ্ঞান চর্চার প্রভূত উন্নতি সাধন করেন। স্যার রোনাল্ড এ. ফিশার (1890 - 1962) কে আধুনিক রাশিবিজ্ঞানের জনক বলা হয় যিনি প্রজনন শাস্ত্র, জীবমিতি, শিক্ষাবিজ্ঞান, কৃষি প্রভৃতি বিভিন্ন বিষয়ে এর প্রয়োগ করে দেখান।

অধ্যায় 16

# সম্ভাবনা
# PROBABILITY

❖ *Where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of any other, as to grope for a thing in the dark, when you have a candle in your hand. – JOHN ARBUTHNOT* ❖

## 16.1 ভূমিকা

পূর্বের শ্রেণিতে আমরা সম্ভাবনার ধারণা বলতে বিভিন্ন ঘটনা ঘটার অনিশ্চয়তার পরিমাপকে পড়েছি।

কোলমোগোরভ
**Kolmogorov**
**(1903-1987)**

আমরা পেয়েছি যে একটি লুডোর ছক্কাকে নিক্ষেপ করে যুগ্ম সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{6}$ অর্থাৎ, $\frac{1}{2}$ । এখানে মোট সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হল 1,2,3,4,5 এবং 6 (সংখ্যায় ছয়টি)। যার মধ্যে যুগ্ম সংখ্যা পাওয়ার পক্ষে ফলগুলো হল 2,4,6 (অর্থাৎ সংখ্যায় তিনটি)। সাধারণত কোনো ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা পেতে হলে আমরা ঘটনার পক্ষে ফলাফলগুলোর সংখ্যা এবং মোট সমভাবে সম্ভাব্য ফলাফলগুলোর সংখ্যার অনুপাত বের করি।

সম্ভাবনার এই তত্ত্বটি 'সম্ভাবনার প্রাচীন তত্ত্ব' (*classical theory of probability*) হিসেবে পরিচিত।

নবম শ্রেণিতে আমরা পর্যবেক্ষণ এবং সংগৃহীত রাশিতথ্যের ভিত্তিতে সম্ভাবনা বের করতে শিখেছি। এটিকে পরিসংখ্যানগত পদ্ধতিতে সম্ভাবনা (*statistical approach of probability*) বলা হয়।

উভয় তত্ত্বেরই কিছু সমস্যা আছে। উদাহরণস্বরূপ এই তত্ত্বগুলো এমন সব ক্রিয়াকলাপ/পরীক্ষায় প্রয়োগ করা যাবে না যেগুলোর অসীম সংখ্যক ফলাফল রয়েছে। প্রাচীন তত্ত্বের ক্ষেত্রে আমরা ফলাফলগুলো সমভাবে সম্ভাব্য ধরে নিয়েছি। মনে রাখতে হবে যে ফলাফলগুলোকে সমভাবে সম্ভাব্য বলা হবে যখন কোনো একটি ফলাফল অন্য আরেকটি ফলাফলের চেয়ে বেশি হওয়ার সম্ভাবনা বেশি থাকে সেটা আমাদের বিশ্বাস করার কোনো কারণ থাকেনা। অন্য ভাবে, আমরা মনে করি যে, সমস্ত ফলাফলের ঘটার সমান সুযোগ (সম্ভাব্যতা) আছে। সুতরাং, সম্ভাব্যতা সংজ্ঞায়িত করতে আমরা সমানভাবে সম্ভাব্য বা সমসম্ভব ফলাফল ব্যবহার করেছি। যুক্তির দিক দিয়ে এটি সঠিক সংজ্ঞা নয়। তাই 1933 সালে রাশিয়ান গণিতবিদ্ এ. এন. কোলমোগোরভ

সম্ভাবনার আরেকটি তত্ত্ব উদ্ভাবন করেন। তিনি 1933 সালে তার প্রকাশিত Foundation of Probability বই-এ সম্ভাব্যতা ব্যাখ্যা করার জন্য কিছু স্বতঃসিদ্ধ প্রয়োগ করেছিলেন এই অধ্যায়ে আমরা সম্ভাবনার স্বতঃ সিদ্ধের অভিগামিতা (*axiomatic approach of probability*) বিষয়ে পড়ব। এই অভিগামিতা বোঝার জন্য আমাদের অবশ্যই কিছু প্রাথমিক পদ, যেমন, সমসম্ভব পরীক্ষা, নমুনাদেশ, ঘটনা ইত্যাদি জানতে হবে। চলো এসব সম্পর্কে পরবর্তী অংশে আলোচনা করি।

## 16.2 সমসম্ভব পরীক্ষা (Random Experiments)

আমরা প্রতিদিন জীবনে এমন অনেক কাজ করি, যার একটি নির্দিষ্ট ফল আছে, কাজটি আমরা যতই পুনরাবৃত্তি করি না কেন। উদাহরণস্বরূপ, কোনো ত্রিভুজ দেওয়া থাকলে, তার তিনটি কোণ না জেনেও আমরা নিশ্চিতভাবে বলে দিতে পারি যে, ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180°।

আমরা এমন অনেক পরীক্ষামূলক কাজও সম্পাদন করি যাদের ফলাফল সমান নাও হতে পারে যখন একই পরীক্ষামূলক অবস্থার অধীনে কাজগুলো পুনরাবৃত্তি করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, যখন একটি মুদ্রা টস্ করা হয়, একটি ‘হেড’ বা ‘টেল’ পাওয়া যেতে পারে, কিন্তু আমরা নিশ্চিত নই যে এই ফলাফলের কোন্‌টি আসলে পাওয়া যাবে। এই ধরনের পরীক্ষাকে সমসম্ভব পরীক্ষা (*random experiments*) বলা হয়।

একটি পরীক্ষাকে ‘সমসম্ভব পরীক্ষা বলা হবে যখন সেটি নীচের দুটি শর্ত সিদ্ধ করবে—

(i) তার একাধিক সম্ভাব্য ফলাফল থাকবে।

(ii) ফলাফল সম্পর্কে আগাম কোনো ভবিষ্যদ্বাণী সম্ভব নয়।

একটি লুডোর ছক্কাকে গড়িয়ে দিলে সেটি একটি সমসম্ভব পরীক্ষা কিনা যাচাই করে দেখা যাক।

এই অধ্যায়ে আমরা পরীক্ষা বলতে সমসম্ভব পরীক্ষা বুঝব যদি কিছু বলা না হয়।

**16.2.1 ফলাফল এবং নমুনা দেশ (*Outcomes and sample space*)** একটি সমসম্ভব পরীক্ষার সম্ভাব্য পরিণামকে তার *ফলাফল* (*outcome*) বলা হয়।

লুডোর ছক্কাকে গড়ানোর পরীক্ষা বিবেচনা করি। এই পরীক্ষার ফলাফলগুলো হবে 1, 2, 3, 4, 5, বা 6, যদি নমুনা ছক্কার উপরের অংশের ফোঁটা (dot) গুলো সম্পর্কে আগ্রহী হই।

ফলাফলগুলোর সেট $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ কে পরীক্ষার নমুনাদেশ (*sample space of the experiment*) বলা হয়।

সুতরাং একটি সমসম্ভব পরীক্ষার সমস্ত সম্ভাব্য ফলাফলগুলোর সেটকে পরীক্ষাটির সঙ্গে যুক্ত নমুনা দেশ বলা হয়। নমুনা দেশ ‘S’ প্রতীক চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

নমুনা দেশের প্রতিটি সমস্যাকে একটি নমুনা বিন্দু (*sample point*) বলা হয়। অন্যভাবে বললে একটি সমসম্ভব পরীক্ষার প্রতিটি ফলাফলকে নমুনা বিন্দু বলা হয়।

এখন আমরা কিছু উদাহরণ বিবেচনা করব।

**উদাহরণ 1** দুটি মুদ্রা (একটি এক টাকার মুদ্রা এবং একটি দু'টাকার মুদ্রা) একবার টস্ করা হল। নমুনা দেশ বের করো।

**সমাধান :** স্পষ্টতই মুদ্রা দুটি ওই অর্থে পার্থক্যযোগ্য যে আমরা প্রথম এবং দ্বিতীয় মুদ্রার কথা বলতে পারি। যেহেতু প্রতিটি মুদ্রায় হেড় (H) বা টেল্ (T) আসতে পারে, তাহলে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হতে পারে—

উভয় মুদ্রায় হেড্ = (H,H) = HH
প্রথম মুদ্রায় হেড্ এবং অন্যমুদ্রায় টেল্ = (H,T) = HT
প্রথম মুদ্রায় টেল্ এবং অন্যমুদ্রাটিতে টেল্ = (T,H) = TH
উভয় মুদ্রায় টেল্ = (T,T) = TT
সুতরাং, নমুনা দেশ S = {HH, HT, TH, TT}

☛ **দ্রষ্টব্য** এই পরীক্ষার ফলাফলগুলো হল H ও T এর ক্রমযুগল সহজবোধ্য হওয়ার জন্যে ক্রম যুগল থেকে কমাগুলো বাদ দেয়া হয়।

**উদাহরণ 2** এক জোড়া লুডোর ছক্কা (একটি নীল এবং অন্যটি লাল) একবার গড়িয়ে দিলে সমসম্ভব পরীক্ষা সম্পর্কিত নমুনা দেশ নির্ণয় করো। নমুনা দেশের পদ সংখ্যাও নির্ণয় করো।

**সমাধান** ধরা যাক নীল রঙের ছক্কাতে '1' এবং লাল ছক্কাটিতে '2' আসল। আমরা এই ফলাফল (1,2) ক্রমজোড় দিয়ে সূচিত করি। একইভাবে যদি '3' আসে নীল ছক্কাটিতে এবং '5' আসে লাল ছক্কাটিতে, তবে এই ফলাফল (3,5) ক্রমজোড় দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

সাধারণভাবে, প্রতিটি ফলাফল $(x, y)$ ক্রমজোড় দ্বারা সূচিত করা যায়, যেখানে '$x$' নীল ছক্কাতে আসা সংখ্যা এবং '$y$' লাল ছক্কাতে আসা সংখ্যাটি সূচিত করে।

সুতরাং, নমুনাদেশটি হবে—

S = {$(x, y)$: $x$ হচ্ছে নীল ছক্কাতে আসা সংখ্যা, এবং $y$ হচ্ছে লাল ছক্কাতে আসা সংখ্যা}।

এই নমুনা দেশের নমুনা বিন্দুগুলোর সংখ্যা $6 \times 6 = 36$ এবং নমুনা দেশটি হল—

{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

**উদাহরণ 3** নিম্নোক্ত প্রতিটি পরীক্ষার উপযুক্ত নমুনা দেশটি বিবৃত করো।

(i) একটি বালকের পকেটে একটি 1 টাকার মুদ্রা, একটি 2 টাকার মুদ্রা এবং একটি 5 টাকার মুদ্রা আছে। সে দুটি মুদ্রা পকেট থেকে বের করল, একটার পর একটা।

(ii) এক ব্যক্তি একটি ব্যস্ত মহাসড়কে এক বছর ধরে দুর্ঘটনার সংখ্যা লিপিবদ্ধ করেন।

**সমাধান** ধরি Q দিয়ে 1 টাকার মুদ্রা H দিয়ে 2 টাকার মুদ্রা এবং R দিয়ে 5 টাকার মুদ্রা সূচিত করে। সে পকেট থেকে প্রথম যে মুদ্রাটি বের করে সেটি তিনটি মুদ্রা Q, H বা R এর মধ্যে যে কোনো একটি হতে পারে। যদি সেটি Q হয় তবে সেই সাপেক্ষে দ্বিতীয়বার যে মুদ্রাটি বের হবে সেটি H বা R হতে পারে। তখন দুটি মুদ্রা বের করার ফলাফল QH বা QR হতে পারে। একইভাবে H এর সাপেক্ষে দ্বিতীয় মুদ্রাটি Q বা R হতে পারে।

সুতরাং ফলাফল হতে পারে HQ বা HR। সর্বশেষে R এর সাপেক্ষে দ্বিতীয় মুদ্রাটি H বা Q হতে পারে। সুতরাং ফলাফল RH বা RQ হতে পারে।

$\therefore$ নমুনা দেশ, S={QH, QR, HQ, HR, RH, RQ}

(ii) পর্যবেক্ষণ বছরে ব্যস্ত মহাসড়কে দুর্ঘটনার সংখ্যা হয় 0 (কোনো দুর্ঘটনা না হওয়ার জন্য) বা 1 বা 2, বা অন্য কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

তাই এই পরীক্ষার সঙ্গো যুক্ত নমুনা দেশ S= {0,1,2,...}

**উদাহরণ 4** একটি মুদ্রা টস্ করা হল, যদি হেড্ পড়ে, তবে আমরা একটি বল এমন একটি ব্যাগ থেকে তুলব যাতে 3টি নীল বল ও 4টি সাদা বল আছে। যদি টেল্ আসে আমরা একটি লুডোর ছক্কা ছুঁড়ে দিই। এই পরীক্ষার নমুনা দেশটি বিবৃত করো।

**সমাধান** ধরে নিই নীল বলগুলো $B_1$, $B_2$, $B_3$ দিয়ে এবং সাদা বলগুলো $W_1$, $W_2$, $W_3$, $W_4$ দিয়ে সূচিত করা হল। তখন এই পরীক্ষার ক্ষেত্রে নমুনা দেশটি হবে—

$$S = \{ HB_1, HB_2, HB_3, HW_1, HW_2, HW_3, HW_4, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}।$$

এখানে $HB_i$ এর অর্থ হচ্ছে মুদ্রাতে 'হেড্' পড়লো এবং $B_i$ বল তোলা হল, $HW_i$ এর অর্থ মুদ্রাতে 'হেড্' পড়লো এবং $W_i$ বল তোলা হল, একইভাবে, T$i$ এর অর্থ মুদ্রাতে 'টেল' আসল এবং ছক্কাতে $i$ সংখ্যাটি আসল।

**উদাহরণ 5** একটি মুদ্রা বারবার টস্ করা হল যতক্ষণ না 'হেড' আসে। এই পরীক্ষাটির নমুনা দেশ বের করো।

**সমাধান** এই পরীক্ষাটিতে 'হেড্' পড়তে পারে প্রথম টসে, বা দ্বিতীয় টসে, বা তৃতীয় টসে এবং এইভাবে চলতে থাকবে যতক্ষণ অবধি না হেড্ আসে। অতএব, কাম্য নমুনা দেশটি হবে—

S= {H, TH, TTH, TTTH, TTTTH,...}

## অনুশীলনী 16.1

নিম্নলিখিত 1 থেকে 7 নং পর্যন্ত পরীক্ষাগুলোর নমুনা দেশ লেখো :

**1.** একটি মুদ্রা তিনবার টস্ করা হল।

**2.** একটি ছক্কা দুবার গড়ানো হল।

**3.** একটি মুদ্রা চারবার টস্ করা হল।

**4.** একটি মুদ্রা টস্ করা হলো এবং একটি ছক্কা গড়ানো হল।

**5.** একটি মুদ্রা টস্ করা হল এবং তারপর একটি ছক্কা গড়ানো হল যখন শুধুমাত্র মুদ্রাতে 'হেড্' আসল।

**6.** 'X' কক্ষে 2 জন বালক ও 2 জন বালিকা এবং 'Y' কক্ষে 1 জন বালক ও 3 জন বালিকা আছে। একটি কক্ষ নির্বাচন করে এবং পরে এ থেকে একজনকে নির্বাচিত করা হলে সেক্ষেত্রে এই পরীক্ষাটির নমুনা দেশ উল্লেখ করো।

**7.** একটি ব্যাগে একটি লাল রঙের এবং একটি নীল রঙের ছক্কা রাখা হল। উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি ছক্কা নিয়ে গড়িয়ে দেওয়া হল। ছক্কাটির রঙ এবং তার উপরিতলে যে সংখ্যাটি আসল সেটি লিপিবদ্ধ করা হল। নমুনা দেশটি উল্লেখ করো।

**8.** বালক-বালিকা বিশিষ্ট দু-সন্তান যুক্ত পরিবারগুলোর পরীক্ষামূলক তথ্য লিপিবদ্ধ করা হল।

(i) যদি আমরা বালক বা বালিকার জন্মের ক্রম জানতে আগ্রহী হই তবে এর নমুনা দেশ কী হবে?

(ii) যদি আমরা পরিবারে মেয়েদের সংখ্যায় আগ্রহী হই তবে নমুনা দেশটি কী হবে?

**9.** একটি বাক্সে 1টি লাল এবং 3টি অভিন্ন সাদা বল রয়েছে। দুটি বল যদি উদ্দেশ্যহীনভাবে প্রতিস্থাপন ছাড়া পরপর তোলা হয় তবে এই পরীক্ষায় নমুনা দেশটি লেখো।

**10.** একটি মুদ্রা টস্ করা হল এবং যদি হেড্ ওঠে তবে পুনরায় মুদ্রাটি টস্ করা হয়। যদি প্রথম টসে টেল ওঠে তবে একটি ছক্কা একবার গড়ানো হয়। নমুনা দেশ নির্ণয় করো।

**11.** অনেকগুলো বাল্‌ব থেকে 3টি বাল্‌ব যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত করা হল। প্রতিটি বাল্‌ব পরীক্ষা করার পর ত্রুটিপূর্ণ বাল্‌বগুলো (D) আর ত্রুটিহীন বাল্‌বগুলো (N) হিসেবে শ্রেণিবদ্ধ করা হয়। এই পরীক্ষার ক্ষেত্রে নমুনা দেশটি লিখ।

**12.** একটি মুদ্রা টস্ করা হয়। যদি হেড্ পড়ে তবে একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হয়। যদি ছক্কাটিতে যুগ্ম সংখ্যা আসে, ছক্কাটি পুনরায় নিক্ষেপ করা হয়। এই পরীক্ষার জন্য নমুনা দেশটি কী হবে?

**13.** চারটি কাগজের স্লিপে 1,2,3 এবং 4 সংখ্যাগুলো পৃথকভাবে লেখা হয়। স্লিপগুলো একটি বাক্সে রাখা হয় এবং পুঙ্খানুপুঙ্খভাবে মিশ্রিত করা হয়। এক ব্যক্তি বাক্স থেকে 2টি স্লিপ পরপর প্রতিস্থাপন ছাড়া তোলেন। এই পরীক্ষার জন্য নমুনা দেশটি বিবৃত করো।

**14.** একটি পরীক্ষাতে একটি ছক্কা গড়ানো হয় এবং ছক্কাটিতে যদি যুগ্ম সংখ্যা ওঠে তবে একটি মুদ্রা একবার টস্ করা হয়। যদি ছক্কাটিতে আসা সংখ্যা অযুগ্ম হয়, তবে মুদ্রাটি দুবার টস করা হয়। এই পরীক্ষার নমুনা দেশটি লেখো।

**15.** একটি মুদ্রা টস্ করা হয়। যদি টেল পড়ে তবে আমরা একটি বাক্স থেকে একটি বল তুলি, যার মধ্যে 2টি লাল ও 3টি কালো বল আছে। যদি হেড্ পড়ে, তবে একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হয়। সেক্ষেত্রে নমুনা দেশটি বের করো।

**16.** একটি লুডোর ছক্কা বারবার নিক্ষেপ করা হয় যতক্ষণ পর্যন্ত না ছয় আসে। এই পরীক্ষার জন্য নমুনা দেশটি কী হবে?

## 16.3 ঘটনা (Event)

আমরা একটি পরীক্ষার সঙ্গে যুক্ত সমসম্ভব পরীক্ষা এবং নমুনা দেশ সম্পর্কে পড়েছি। পরীক্ষা সংশ্লিষ্ট সব প্রশ্নের নমুনা দেশ একটি সার্বজনীন সেট (*universal set*) হিসাবে কাজ করে।

দুটি মুদ্রা দুবার টস্ করার পরীক্ষাটি বিবেচনা করো। এখানে সংশ্লিষ্ট নমুনা দেশটি S = {HH, HT, TH, TT}.

এখন ধরে নাও আমরা সে সমস্ত ফলাফলগুলোর ব্যাপারে আগ্রহী যেগুলোতে কেবল একটি মাত্র হেড উঠে। আমরা দেখি যে HT এবং TH হচ্ছে শুধুমাত্র S এর উপাদান বা নমুনা বিন্দু যা এধরণের অনুরূপ ঘটনা (event) হওয়ার ক্ষেত্র। এই দুটি উপাদান যে সেটটি গঠন করে সেটি হল E = { HT, TH}

আমরা জানি E সেটটি হচ্ছে নমুনা দেশ S এর উপসেট একইভাবে আমরা ঘটনাগুলো এবং S এর উপসেটগুলোর মধ্যে নিম্নলিখিত সাদৃশ্য খুঁজে পাই।

| **ঘটনার বিবরণ** | **S-এর উপসেট** |
| --- | --- |
| টেল এর সংখ্যা ঠিক 2 টি | $A = \{TT\}$ |
| টেল এর সংখ্যা কমপক্ষে 1টি | $B = \{HT, TH, TT\}$ |
| হেড এর সংখ্যা সর্বোচ্চ 1টি | $C = \{HT, TH, TT\}$ |
| দ্বিতীয় টসে হেড থাকবে না | $D = \{HT, TT\}$ |
| সর্বোচ্চ দুটি টেল | $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ |
| দুটির বেশি টেল | $\phi$ |

উপরের আলোচনাটি প্রস্তাব করে যে নমুনাদেশের উপসেট একটি ঘটনার সাথে যুক্ত এবং একটি ঘটনা নমুনা দেশের উপসেটের সাথে যুক্ত। এই হিসেবে আমরা একটি ঘটনাকে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করতে পারি—

**সংজ্ঞা** একটি নমুনা দেশ S-এর যে কোনো উপসেট E কে বলা হয় *একটি ঘটনা*।

**16.3.1 একটি ঘটনা হওয়ার ঘটনা (*Occurrence of an event*)** একটি লুডোর ছক্কার নিক্ষেপের ঘটনা বিবেচনা করি। ধরা যাক E দিয়ে "4 থেকে ছোট সংখ্যা আসার" ঘটনা সূচিত হয়। যদি সত্যিই ছক্কাটিতে '1' উঠে তবে আমরা বলি যে E ঘটনাটি ঘটেছে। প্রকৃতপক্ষে যদি ফলাফল 2 বা 3 হয় তবে আমরা বলি যে E ঘটনা ঘটেছে।

সুতরাং একটি নমুনা দেশ S এর একটি ঘটনা E ঘটেছে বলা হবে যদি পরীক্ষার ফলাফল $\omega$ এমন হয় যে $\omega \in E$। যদি ফলাফল $\omega$ এমন হয় যে $\omega \notin E$, তবে আমরা বলব যে E ঘটনাটি ঘটেনি।

**16.3.2 ঘটনার প্রকারভেদ (*Types of events*)** কোনো ঘটনার বিভিন্ন পদগুলোর উপর ভিত্তি করে বিভিন্ন প্রকারের ঘটনা শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

**1. অসম্ভব এবং নিশ্চিত ঘটনা (Impossible and Sure Events)** শূন্য সেট $\phi$ এবং নমুনা দেশ S দিয়ে ঘটনাকে বর্ণনা করা হয়। প্রকৃতপক্ষে $\phi$ কে একটি অসম্ভব ঘটনা এবং S অর্থাৎ সমগ্র নমুনা দেশটিকেই বলা হয় নিশ্চিত ঘটনা।

এগুলো বোঝার জন্য আমরা একটি ছক্কার গড়ানোর ঘটনা বিবেচনা করি। সংশ্লিষ্ট নমুনা দেশটি হবে—

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ধরা যাক "ছক্কাতে প্রদর্শিত সংখ্যাটি 7 এর গুণিতক" ঘটনাটি হচ্ছে E। তখন এই ঘটনার সাথে সংশ্লিষ্ট নমুনা দেশটি কি লিখতে পারবে?

স্পষ্টতই কোনো ফলাফলই ঘটনাটির প্রদত্ত শর্তকে সিদ্ধ করে না অর্থাৎ নমুনাদেশের কোনো উপাদানই E ঘটনাটি ঘটাকে নিশ্চিত করে না। অতএব আমরা বলি যে শুধুমাত্র শূন্য সেটটিই E ঘটনার সাথে সম্পর্কিত। অন্যভাবে, আমরা বলতে পারি কোনো ছক্কার উপরিতলে কোনো 7 এর গুণিতক হওয়া অসম্ভব তাই, ঘটনা $E = \phi$, একটি অসম্ভব ঘটনা।

এখন আরেকটি ঘটনা F গ্রহণ করা যাক, যা হচ্ছে "অযুগ্ম বা যুগ্ম সংখ্যা আসা"।

স্পষ্টতই F = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = S অর্থাৎ পরীক্ষার সমস্ত ফলাফলগুলো F ঘটনাটি ঘটানো নিশ্চিত করে। সুতরাং ঘটনা F = S, একটি নিশ্চিত ঘটনা।

**2. সরল ঘটনা (Simple Event)** যদি কোনো ঘটনা E এর নমুনা দেশে একটি মাত্র নমুনা বিন্দু থাকে, তবে এটিকে একটি *সরল (বা প্রাথমিক)* ঘটনা বলে।

$n$ স্বতন্ত্র উপাদান যুক্ত কোনো নমুনা দেশে ঠিক $n$ সংখ্যক সরল ঘটনা থাকে। উদাহরণস্বরূপ দুটি মুদ্রার উৎক্ষেপণের পরীক্ষায়, নমুনা দেশটি হল— S={HH, HT, TH, TT}

এই নমুনা দেশের অন্তর্গত 4টি সরল ঘটনা আছে। এইগুলো হল—

$E_1$= {HH}, $E_2$={HT}, $E_3$= { TH} এবং $E_4$={TT}।

**3. যৌগিক ঘটনা (Compound Event)** যদি কোনো ঘটনার একাধিক নমুনা বিন্দু থাকে, তবে এটিকে বলা হয় যৌগিক ঘটনা।

উদাহরণস্বরূপ, "একটি মুদ্রা তিনবার উৎক্ষেপণের" পরীক্ষায়

E: 'ঠিক একটি হেড্ আসার'

F: 'কমপক্ষে একটি হেড্ আসার'

G: 'সর্বোচ্চ একটি হেড্ আসার' ইত্যাদি

সবগুলো যৌগিক ঘটনা এই ঘটনাগুলোর সাথে যুক্ত S এর উপসেটগুলো হচ্ছে—

E={HTT,THT,TTH}

F={HTT,THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH}

G= {TTT, THT, HTT, TTH}

উপরের প্রতিটি উপসেটে একাধিক নমুনা বিন্দু আছে, তাই এইগুলো সবগুলো যৌগিক ঘটনা।

**16.3.3 ঘটনার বীজগণিত (*Algebra of events*)** সেটের অধ্যায়গুলোতে আমরা দুই বা ততোধিক সেটের সংযুক্তির বিভিন্ন পদ্ধতি যেমন, সংযোগ, ছেদ, অন্তর, পূরক সম্পর্কে অধ্যয়ন করেছি। অনুরূপভাবে আমরা দুই বা ততোধিক ঘটনাকে একত্রিত করতে পারি সদৃশ সেট নোটেশান ব্যবহার করে।

ধরা যাক একটি পরীক্ষা নমুনা দেশ S -এর সাথে যুক্ত ঘটনাগুলো হল A, B, C

**1. পূরক ঘটনা (Complementary Event)** প্রতিটি ঘটনা A এর জন্য, সঙ্গাতিপূর্ণভাবে আরেকটি ঘটনা A′ যুক্ত থাকে যাকে A এর পূরক ঘটনা বলে। এটিকে আবার ঘটনা 'A নয়' বা 'A না ঘটা'ও বলা যায়।

উদাহরণস্বরূপ, 'তিনটি মুদ্রার উৎক্ষেপণ' পরীক্ষাটি নিলে সংশ্লিষ্ট নমুনাদেশটি হবে—

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

ধরা যাক, A={HTH, HHT, THH} হচ্ছে 'কেবল একটি টেল্ আসার' ঘটনা।

স্পষ্টত HTT ফলাফলের জন্য A ঘটনাটি ঘটেনি। কিন্তু আমরা বলতে পারি যে, 'A নয়' ঘটনাটি ঘটেছে। তাই A তে নেই এমন প্রতিটি ফলাফলের ক্ষেত্রে আমরা বলি যে 'A নয়' ঘটেছে।

সুতরাং A ঘটনার পূরক ঘটনা 'A নয়' হচ্ছে—

$A' = \{HHH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

বা, $A' = \{\omega : \omega \in S$ এবং $\omega \notin A\} = S - A$।

**2. ঘটনা 'A অথবা B' (The Event 'A or B')** স্মরণ করা যেতে পারে যে দুটি সেট A ও B এর সংযুক্তি $A \cup B$ দিয়ে সূচিত হয় যার উপাদানগুলো A অথবা B বা উভয় সেটেই রয়েছে। যখন সেট A ও B দুটি ঘটনা, একটি নমুনা দেশের সাথে যুক্ত থাকে তখন '$A \cup B$' হচ্ছে 'হয় A বা B বা উভয়' ঘটনা। এই ঘটনা '$A \cup B$' কে 'A বা B'ও বলা যায়।

সুতরাং, ঘটনা 'A বা B' = $A \cup B = \{\omega : \omega \in A$ অথবা $\omega \in B\}$

**3. ঘটনা 'A এবং B' (The Event 'A and B')** আমরা জানি যে দুটি সেট A ও B এর ছেদ $A \cap B$ হচ্ছে সে সমস্ত উপাদানের সেট যারা A ও B উভয়েরই সাধারণ উপাদান অর্থাৎ, যেগুলো 'A ও B' উভয় সেটেই রয়েছে।

যদি A এবং B দুটি ঘটনা হয়, তবে সেট $A \cap B$, 'A এবং B' ঘটনাকে সূচিত করে।

তাই, $A \cap B = \{\omega : \omega \in A$ এবং $\omega \in B\}$

উদাহরণস্বরূপ, 'একটি ছক্কাকে দুবার নিক্ষেপ' পরীক্ষার ক্ষেত্রে, ধরা যাক A হচ্ছে 'প্রথম নিক্ষেপে স্কোর ছয় স্কোর' আসার ঘটনা এবং B হচ্ছে 'দুটি স্কোরের যোগফল কমপক্ষে 11 হওয়ার ঘটনা', তখন

$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$, এবং $B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$

সুতরাং $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$

লক্ষণীয় যে, সেট $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$ যে ঘটনাটি নির্দেশ করে সেটি হল "প্রথম নিক্ষেপে স্কোর ছয় এবং স্কোরগুলোর যোগফল কমপক্ষে 11"।

**4. ঘটনা 'A কিন্তু B নয়' (The Event 'A but not B')** আমরা জানি যে A–B হল সে সমস্ত উপাদানগুলোর সেট যারা A তে আছে কিন্তু B তে নেই। অতএব, সেট A–B দিয়ে 'A কিন্তু B নয়' ঘটনাটিকে সূচিত করা যেতে পারে। আমরা জানি যে, $A - B = A \cap B'$

**উদাহরণ 6** একটি ছক্কা গড়ানোর পরীক্ষা বিবেচনা করো। ধরা যাক একটি মৌলিক সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা A, 'অযুগ্ম সংখ্যা পাওয়ার' ঘটনা B তবে (i) A বা B (ii) A এবং B (iii) A কিন্তু B নয় (iv) 'A নয়' ঘটনাগুলোর উপস্থাপন করে এমন সেটগুলো লেখো।

**সমাধান** এখানে, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 5\}$ এবং $B = \{1, 3, 5\}$

স্পষ্টতই

(i) 'A বা B' = $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

(ii) 'A এবং B' = $A \cap B = \{3,5\}$

(iii) 'A কিন্তু B নয়' = $A - B = \{2\}$

(iv) 'A নয়' = $A' = \{1,4,6\}$

**16.3.4 পরস্পর পৃথক ঘটনা (*Mutually exclusive events*)** একটি ছক্কাকে গড়ানোর পরীক্ষায়, নমুনা দেশটি হল— $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$। এখন 'একটি অযুগ্ম সংখ্যা আসার' ঘটনা A এবং 'একটি যুগ্ম সংখ্যা আসার' ঘটনা বিবেচনা করা হল। স্পষ্টতই A ঘটনাটি B ঘটনাকে বর্জন করে এবং বিপরীতক্রমেও এটি সত্য। অন্য কথায় বললে, এমন কোনো ফলাফল নেই যা একই সাথে A এবং B ঘটনা ঘটাকে নিশ্চিত করে। এখানে

$A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{2, 4, 6\}$

স্পষ্টতই $A \cap B = \phi$, অর্থাৎ, A ও B বিচ্ছেদ সেট।

সাধারণভাবে, দুটি ঘটনা A এবং B কে পরস্পরে পৃথক ঘটনা বলা হয় যদি তাদের মধ্যে যেকোনো একটি ঘটনা অন্য আরেকটি ঘটনাকে বর্জন করে অর্থাৎ যদি তারা একসাথে ঘটতে না পারে, এই ক্ষেত্রে A ও B সেট বিচ্ছেদ সেট।

আবার একটি ছক্কার গড়ানোর পরীক্ষাতে ধরা যাক A দিয়ে 'একটি অযুগ্ম সংখ্যা আসার' এবং B দিয়ে '4 সংখ্যাটির চেয়ে কম সংখ্যা আসার' ঘটনা বিবেচনা করা হয়।

স্পষ্টতই $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{1, 2, 3\}$

এখন $3 \in A$ আবার $3 \in B$

সুতরাং, A ও B পরস্পর পৃথক ঘটনা নয়।

***মন্তব্য :*** একটি নমুনাদেশের সরল ঘটনাগুলো সবসময় পরস্পর পৃথক ঘটনা হয়।

**16.3.5 *সম্পূর্ণ ঘটনাসমূহ* (*Exhaustive events*)** একটি ছক্কা নিক্ষেপের পরীক্ষা বিবেচনা করি। নমুনা দেশটি হবে— $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$। আমরা নিম্নলিখিত ঘটনাগুলোকে সংজ্ঞায়িত করি—

A : '4 এর কম সংখ্যা আসে',

B : '2 এর চেয়ে বড় কিন্তু 5 এর চেয়ে কম সংখ্যা আসে',

এবং C : '4 এর চেয়ে বড় সংখ্যা আসে'।

তখন $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3,4\}$ এবং $C = \{5, 6\}$। আমরা পর্যবেক্ষণ করি,

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\} = S\text{ ।}$$

এরকম ঘটনাগুলো A, B, C কে সম্পূর্ণ ঘটনা বলা হবে। সাধারণত যদি $E_1, E_2, ..., E_n$ একটি নমুনা দেশে S-এর $n$ সংখ্যক ঘটনা হয় এবং $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ হয়, তবে $E_1, E_2, ...., E_n$ কে সম্পূর্ণ ঘটনা বলা হবে। অন্যভাবে, $E_1, E_2, ..., E_n$ কে সম্পূর্ণ ঘটনা বলা হবে যদি অন্তত একটি ঘটনা অবশ্যই ঘটে যখন পরীক্ষাটি সম্পন্ন হয়।

আরও, যদি $E_i \cap E_j = \phi$ যখন $i \neq j$ অর্থাৎ $E_i$ এবং $E_j$ ঘটনাগুলো জোড়ায় জোড়ায় বিচ্ছিন্ন এবং $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$, তখন $E_1, E_2, ..., E_n$ ঘটনাগুলোকে পরস্পর পৃথক এবং সম্পূর্ণ ঘটনা বলা হয়।

আমরা এখন কিছু উদাহরণ বিবেচনা করব—

**উদাহরণ 7** দুটি ছক্কা গড়ানো হল এবং ছক্কা দুটিতে যে সংখ্যা আসে তাদের যোগফল লিপিবদ্ধ করা হয়। এই পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট নিম্নলিখিত ঘটনাগুলো বিবেচনা করা হল।

A : 'যোগফল একটি যুগ্ম সংখ্যা'।

B : 'যোগফল 3 এর গুণিতক'।

C : 'যোগফল 4 এর কম'।

D : 'যোগফল 11 থেকে বেশি'।

এই ঘটনাগুলোর মধ্যে কোন জোড়া পরস্পর পৃথক ঘটনা?

**সমাধান** এখানে নমুনা দেশ S-এ মোট 36টি নমুনা বিন্দু আছে।

নমুনাদেশ, $S = \{(x, y): x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$।

তখন $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$ এবং $D = \{(6, 6)\}$

আমরা পাই, $A \cap B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\} \neq \phi$

সুতরাং, A ও B পরস্পর পৃথক ঘটনা নয়।

একইরকমভাবে $A \cap C \neq \phi$, $A \cap D \neq \phi$, $B \cap C \neq \phi$ এবং $B \cap D \neq \phi$ ।

অতএব, ঘটনা জোড় (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) গুলো পরস্পর পৃথক ঘটনা নয়।

আবার, $C \cap D = \phi$ এবং তাই C এবং D হচ্ছে পরস্পর পৃথক ঘটনা।

**উদাহরণ 8** একটি মুদ্রা তিনবার টস্ করা হলে নিম্নলিখিত ঘটনাগুলো বিবেচনা করো।

A: 'কোনো হেড্ পড়ে না', B: 'ঠিক একটি হেড্ পড়ে', C: 'কমপক্ষে দুটি হেড্ পড়ে'।

এগুলো কি পরস্পর পৃথক এবং সম্পূর্ণ ঘটনা সেট গঠন করে?

**সমাধান** এ পরীক্ষার নমুনা দেশটি হল,

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

এবং A = {TTT}, B = {HTT, THT, TTH}, C = {HHT, HTH, THH, HHH}

এখন $A \cup B \cup C$ = {TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH} = S

সুতরাং, A, B, C হচ্ছে সম্পূর্ণ ঘটনাসমূহ।

আবার, $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$ এবং $B \cap C = \phi$

অতএব, ঘটনাগুলো বিচ্ছিন্ন জোড়, অর্থাৎ তারা পরস্পর পৃথক ঘটনা। সুতরাং A, B, C পরস্পর পৃথক এবং সম্পূর্ণ ঘটনাসমূহের সেট গঠন করে।

## অনুশীলনী 16.2

**1.** একটি ছক্কা গড়ানো হল। ধরা যাক E ঘটনা হচ্ছে 'ছক্কাটিতে 4 পড়ল' এবং F ঘটনা হচ্ছে 'ছক্কাটিতে যুগ্ম সংখ্যা পড়ল'। E এবং F ঘটনা কি পরস্পর পৃথক ঘটনা?

**2.** একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হল। নিম্নলিখিত ঘটনাগুলোর বিবরণ দাও:

(i) A: 7 এর ছোটো একটি সংখ্যা (ii) B: 7 এর বড়ো একটি সংখ্যা

(iii) C: 3 এর একটি গুণিতক (iv) D: 4 এর ছোটো একটি সংখ্যা

(v) E: 4 এর চেয়ে বড়ো একটি যুগ্ম সংখ্যা (vi) F: একটি সংখ্যা যা 3 এর চেয়ে ছোটো নয়

এছাড়াও $A \cup B, A \cap B, B \cup C, E \cap F, D \cap E, A - C, D - E, E \cap F', F'$ নির্ণয় করো।

**3.** একটি পরীক্ষাতে এক জোড়া ছক্কা গড়ানো হল এবং যে সংখ্যাগুলো পড়ল সেগুলো লিপিবদ্ধ করা হল। নিম্নলিখিত ঘটনাসমূহের বিবরণ দাও—

A: সমষ্টি 8 এর চেয়ে বড়ো , B: 2 উঠে যে-কোনো একটি ছক্কাতে

C: সমষ্টি কমপক্ষে 7 এবং 3 এর একটি গুণিতক।

তাদের মধ্যে কোন্ ঘটনাগুলো পরস্পর পৃথক?

**4.** তিনটি মুদ্রা একবার টস্ করা হল। ধরা যাক A ঘটনা হচ্ছে "তিনটি হেড্ পড়ল", B হচ্ছে "দুটি হেড্ ও একটি টেল পড়ল", C ঘটনা হচ্ছে "তিনটি টেল পড়ল" এবং D ঘটনা "একটি হেড্ প্রথম মুদ্রাতে উঠল" কে সূচিত করে তবে কোন্ ঘটনাগুলো

(i) পরস্পর পৃথক (ii) সরল, (iii) যৌগিক ঘটনা?

**5.** তিনটি মুদ্রা টস্ করা হল। নীচের ঘটনাগুলো বর্ণনা করো—

(i) দুটি পরস্পর পৃথক ঘটনা।

(ii) তিনটি পরস্পর পৃথক এবং সম্পূর্ণ ঘটনা।

(iii) দুটি ঘটনা যেগুলো পরস্পর পৃথক ঘটনা নয়।

(iv) দুটি ঘটনা যেগুলো পরস্পর পৃথক কিন্তু সম্পূর্ণ নয়।

(v) তিনটি ঘটনা যেগুলো পরস্পর পৃথক ঘটনা কিন্তু সম্পূর্ণ নয়।

**6.** দুটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হল। তিনটি ঘটনা A, B ও C নিম্নরূপ :

A: প্রথম ছক্কাটিতে একটি যুগ্ম সংখ্যা পাওয়া।

B: প্রথম ছক্কাটিতে একটি অযুগ্ম সংখ্যা পাওয়া।

C: ছক্কা দুটিতে দুটি সংখ্যার সমষ্টি $\leq 5$ পাওয়া।

নিম্নলিখিতগুলো নির্ণয় করো—

(i) $A'$ (ii) B নয় (iii) A বা B

(iv) A এবং B (v) A কিন্তু C নয় (vi) B বা C

(vii) B এবং C (viii) $A \cap B' \cap C'$

**7.** উপরের 6নং প্রশ্নটি অনুসারে সত্য বা মিথ্যা বিবৃত করো: (তোমার উত্তরের স্বপক্ষে কারণ দর্শাও)

(i) A এবং B পরস্পর বিচ্ছিন্ন

(ii) A এবং B পরস্পর বিচ্ছিন্ন ও সম্পূর্ণ ঘটনা

(iii) $A = B'$

(iv) A এবং C পরস্পর পৃথক

(v) A এবং $B'$ পরস্পর পৃথক

(vi) $A'$, $B'$, C পরস্পর পৃথক এবং সম্পূর্ণ ঘটনা।

## 16.4 সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধের অভিগামিতা (Axiomatic Approach to Probability)

পূর্ববর্তী বিভাগে, আমরা সমসম্ভব পরীক্ষা, নমুনা দেশ এবং এই পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট ঘটনাসমূহ বিবেচনা করেছি। আমাদের দৈনন্দিন জীবনে ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা সম্পর্কে অনেক শব্দ ব্যবহার করেছি। সম্ভাবনা তত্ত্ব হচ্ছে কোনো ঘটনা ঘটা বা না ঘটার সুযোগের পরিমাপ করার প্রচেষ্টা।

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে আমরা একটি পরীক্ষার সাথে সম্পর্কিত একটি ঘটনার সম্ভাবনা নির্ধারনের কিছু পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করেছি যেখানে পরীক্ষাটির মোট ফলাফলের সংখ্যা জানা আছে।

স্বতঃসিদ্ধের অভিগামীতা একটি ঘটনার সম্ভাবনা বর্ণনা করার অন্য উপায়। এই অভিগামিতায় কিছু স্বতঃসিদ্ধ বা নিয়ম সম্ভাবনা নির্ধারণ করার জন্য বর্ণনা করা হয়েছে।

ধরা যাক একটি সমসম্ভব পরীক্ষার নমুনা দেশ S। সম্ভাবনা P হল একটি বাস্তব মান যুক্ত অপেক্ষক যার ক্ষেত্র (domain) হচ্ছে S-এর ঘাত সেট (power set) এবং প্রসার (range) হচ্ছে [0,1] বিস্তার যা নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধগুলোকে সিদ্ধ করে

(i) যে কোনো ঘটনা E এর জন্য, $P(E) \geq 0$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) যদি E এবং F পরস্পর পৃথক ঘটনা হয় তবে $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ ।

(iii) নং থেকে এটি বলা যায়, $P(\phi) = 0$। এটি প্রমাণ করার জন্য আমরা ধরে নেই, $F = \phi$ এবং মনে রাখতে হবে E ও $\phi$ বিচ্ছিন্ন ঘটনা। অতএব স্বতঃসিদ্ধ (iii) থেকে আমরা পাই,

$$P(E \cup \phi) = P(E) + P(\phi) \text{ বা, } P(E) = P(E) + P(\phi) \text{ অর্থাৎ } P(\phi) = 0 \text{ ।}$$

ধরা যাক S হচ্ছে নমুনাদেশ যার ফলাফল সমূহ $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, অর্থাৎ $S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধের পদ্ধতিগত সংজ্ঞা হইতে প্রতীয়মান হয় যে,

(i) $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ প্রতিটি $\omega_i \in S$ এর জন্য

(ii) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$

(iii) যেকোনো একটি ঘটনা A এর জন্য, $P(A) = \sum P(\omega_i)$, $\omega_i \in A$।

**দ্রষ্টব্য** এটি উল্লেখ করা যেতে পারে যে, একক সেট $\{\omega_i\}$কে প্রাথমিক ঘটনা বলা হয় এবং চিহ্নিতকরণের সুবিধার জন্য আমরা $P(\omega_i)$ এর জন্য $P(\{\omega_i\})$ লেখি।

উদাহরণস্বরূপ, 'একটি মুদ্রার উৎক্ষেপণ' পরীক্ষাতে আমরা প্রতিটি ফলাফল H ও T এর প্রতিটির জন্য $\frac{1}{2}$ সংখ্যাটি নির্ধারণ করতে পারি।

অর্থাৎ $$P(H) = \frac{1}{2} \text{ এবং } P(T) = \frac{1}{2} \qquad \text{... (1)}$$

স্পষ্টতই এই নির্ধারন উভয় শর্তকেই সিদ্ধ করে অর্থাৎ প্রতিটি সংখ্যা শূন্য থেকে ছোটো নয় নতুবা 1 থেকে বড়ো নয় এবং

$$P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

অতএব, এই ক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি, H এর সম্ভাবনা = $\frac{1}{2}$, এবং T এর সম্ভাবনা = $\frac{1}{2}$

যদি আমরা নেই $P(H) = \frac{1}{4}$ এবং $P(T) = \frac{3}{4}$ ... (2)

এক্ষেত্রে এই বিভাজন কি স্বতঃসিদ্ধ অভিগামিতাকে সিদ্ধ করে?

হ্যাঁ, এ ক্ষেত্রে H এর সম্ভাবনা = $\frac{1}{4}$ এবং T এর সম্ভাবনা = $\frac{3}{4}$.

আমরা দেখি যে, (1) এবং (2) নং উভয় নির্ধারণে H ও T এর সম্ভাবনার জন্য বৈধ।

প্রকৃতপক্ষে আমরা $p$ এবং $(1 - p)$ সংখ্যা দুটিকে উভয় ফলাফলের জন্য নির্ধারণ করতে পারি। যাতে $0 \leq p \leq 1$ এবং $P(H) + P(T) = p + (1 - p) = 1$

এছাড়াও এই নির্ধারণ সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধ অভিগামিতা শর্ত দুটিকে সিদ্ধ করে। তাই আমরা বলতে পারি একটি পরীক্ষার ফলাফলের (অসীম ব্যতীত) সাথে সম্ভাবনার যোগসূত্র করার অনেকগুলো উপায় আছে। আমরা কিছু উদাহরণ বিবেচনা করি।

**উদাহরণ 9** ধরা যাক একটি নমুনা দেশ $S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$। তখন নীচের প্রতিটি ফলাফলের সম্ভাবনার কোন কোন বিভাজনগুলো বৈধ?

| ফলাফল | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ | $\omega_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| (b) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (c) | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| (d) | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{3}{2}$ |
| (e) | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |

**সমাধান** (a) শর্ত (i): প্রতিটি সংখ্যা $p(\omega_i)$ ধনাত্মক এবং 1এর কম।

শর্ত (ii): সম্ভাবনার সমষ্টি

$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

অতএব নির্ধারণটি সংগত।

(b) শর্ত (i): প্রতিটি সংখ্যা $p(\omega_i)$ হয় '0' বা '1'।
শর্ত (ii) সম্ভাবনার সমষ্টি = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1
অতএব, নির্ধারণটি সংগত

(c) শর্ত (i) দুটি সম্ভাবনা $p(\omega_5)$ ও $p(\omega_6)$ ঋণাত্মক, তাই বিভাজনটি বৈধ নয়।

(d) যেহেতু $p(\omega_6) = \frac{3}{2} > 1$, তাই নির্ধারণটি বৈধ নয়।

(e) যেহেতু, সম্ভাবনার সমষ্টি = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 = 2.1, অতএব নির্ধারণটি বৈধ নয়।

**16.4.1 কোনো ঘটনার সম্ভাবনা (*Probability of an event*)** ধরা যাক একটি মেশিনের দ্বারা উৎপাদিত পরপর তিনটি কলমের পরীক্ষা করে ভালো (ত্রুটিপূর্ণ নয়) এবং খারাপ (ত্রুটিপূর্ণ) হিসাবে শ্রেণিভুক্ত করা পরীক্ষাটির সহিত সংশ্লিষ্ট নমুনা দেশ S। আমরা এই পরীক্ষার ফলাফল হিসেবে 0, 1, 2 বা 3টি ত্রুটিপূর্ণ কলম পেতে পারি।

এই পরীক্ষার সাথে যুক্ত নমুনা দেশটি হল—

$$S = \{BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG\},$$

যেখানে B একটি ত্রুটিযুক্ত বা খারাপ কলম এবং G একটি ত্রুটিহীন বা ভালো কলম।

এই পরীক্ষার ফলাফলের জন্য সম্ভাবনাগুলো নিম্নরূপ

| নমুনা বিন্দু : | BBB | BBG | BGB | GBB | BGG | GBG | GGB | GGG |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| সম্ভাবনা : | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

ধরা যাক ঘটনা A: 'ঠিক একটি ত্রুটিযুক্ত কলম' এবং ঘটনা B: অন্ততপক্ষে দুটি ত্রুটিযুক্ত কলম।

অতএব, $A = \{BGG, GBG, GGB\}$ এবং $B = \{BBG, BGB, GBB, BBB\}$

এখন, $$P(A) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A$$

$$= P(BGG) + P(GBG) + P(GGB) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

এবং $$P(B) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B$$

$$= P(BBG) + P(BGB) + P(GBB) + P(BBB) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

আমরা 'একটি মুদ্রা দুবার টস্ করার' আরেকটি পরীক্ষা বিবেচনা করি। এই পরীক্ষার নমুনা দেশ, $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

ধরা যাক নিম্নের সম্ভাবনাগুলো এই ফলাফলের জন্য নির্ধারিত হয়

$$P(HH) = \frac{1}{4},\ P(HT) = \frac{1}{7},\ P(TH) = \frac{2}{7},\ P(TT) = \frac{9}{28}$$

স্পষ্টতই এই নির্ধারণ স্বতঃসিদ্ধতার শর্তকে সিদ্ধ করে। এখন, ধরা যাক E ঘটনার সম্ভাবনা বের করতে হবে যেখানে E হচ্ছে 'উভয় টস্‌ই একই ফলাফল দেয়'।

এখানে, $E = \{HH, TT\}$

এখন, $P(E) = \Sigma\ P(\omega_i)$, সমস্ত $\omega_i \in E$ এর জন্য

$$= P(HH) + P(TT) = \frac{1}{4} + \frac{9}{28} = \frac{4}{7}$$

আবার ঘটনা F : 'ঠিক দুটি হেড্‌' এর ক্ষেত্রে আমরা পাই, $F = \{HH\}$

এবং $P(F) = P(HH) = \frac{1}{4}$

### 16.4.2 সমসম্ভব ফলাফলগুলোর সম্ভাবনা (*Probabilities of equally likely outcomes*)

একটি পরীক্ষার নমুনা দেশ ধরা যাক $S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. ধরা যাক সমস্ত ফলাফলগুলো সমানভাবে ঘটতে পারে অর্থাৎ প্রতিটি সরল ঘটনা ঘটার সুযোগ একই হতে হবে।

অর্থাৎ $P(\omega_i) = p$, যখন সমস্ত $\omega_i \in S$ যেখানে $0 \le p \le 1$

যেহেতু $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$ অর্থাৎ, $p + p + \ldots + p$ ($n$ সংখ্যক বার) $= 1$

অথবা, $np = 1$ অর্থাৎ, $p = \frac{1}{n}$

ধরা যাক, S হচ্ছে একটি নমুনা দেশ এবং E হচ্ছে একটি ঘটনা যেমন $n(S) = n$ এবং $n(E) = m$ । যদি প্রতিটি ফলাফল সমানভাবে ঘটার সম্ভাবনা থাকে তবে লেখা যায়,

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{E এর অনুকূলে ফলাফলের সংখ্যা}}{\text{মোট সম্ভাব্য ফলাফল}}$$

**16.4.3 *'A'* অথবা *'B'* ঘটনার সম্ভাবনা (*Probability of the event 'A or B'*)** এখন 'A অথবা B' ঘটনার সম্ভাবনা বের করতে হবে। অর্থাৎ $P(A \cup B)$।

ধরা যাক, $A = \{HHT, HTH, THH\}$ এবং $B = \{HTH, THH, HHH\}$ যদি দুটি ঘটনা 'একটি মুদ্রার তিনবার টস্‌ করার' সাথে সংশ্লিষ্ট হয় তবে স্পষ্টতই $A \cup B = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

এখন $P(A \cup B) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) + P(HHH)$

যদি সমস্ত ফলাফলগুলো সমানভাবে সম্ভাব্য হয় তখন

$$P(A\cup B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

আবার, $P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}$

এবং $P(B) = P(HTH) + P(THH) + P(HHH) = \frac{3}{8}$

সুতরাং, $P(A) + P(B) = \frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}$

এটি স্পষ্ট যে, $P(A\cup B) \neq P(A) + P(B)$

HTH ও THH বিন্দুগুলো A এবং B উভয়ের ক্ষেত্রেই সাধারণ। P(A) + P(B) গণনাতে HTH ও THH, অর্থাৎ $A\cap B$ এর উপাদানগুলোর সম্ভাবনা দুবার অন্তর্ভূক্ত করা হয়। অতএব, সম্ভাবনা $P(A\cup B)$ সম্ভাবনা পাওয়ার জন্য P(A) + P(B) থেকে $A\cap B$ এর নমুনা বিন্দুগুলোর সম্ভাবনা বাদ দিতে হবে।

অর্থাৎ, $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-\sum P(\omega_i), \forall\omega_i \in A\cap B$

$= P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

তাই, আমরা পর্যবেক্ষণ করি, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

সাধারণত, যদি একটি সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত যেকোনো দুটি ঘটনা A এবং B হয়, তবে কোনো ঘটনার সম্ভাবনার সংজ্ঞা হতে পাই,

$$P(A\cup B)=\sum p(\omega_i), \forall\omega_i \in A\cup B \text{ ।}$$

যেহেতু, $A\cup B=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$,

আমরা পাই,

$P(A\cup B) = \left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(A-B)\right]+\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in A\cap B\right]+\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in B-A\right]$

(কারণ A–B, $A\cap B$ এবং B – A পরস্পর পৃথক) ... (1)

আবার, $P(A)+P(B)=\left[\sum p(\omega_i)\ \forall\omega_i\in A\right]+\left[\sum p(\omega_i)\ \forall\omega_i\in B\right]$

$= \left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(A-B)\cup(A\cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(B-A)\cup(A\cap B)\right]$

$= \left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(A-B)\right]+\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(A\cap B)\right]+\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(B-A)\right]+$

$\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(A\cap B)\right]$

$= P(A\cup B)+\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in A\cap B\right]$ [(1) ব্যবহার করে]

$= P(A\cup B)+P(A\cap B)$ ।

অতএব, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

**বিকল্পভাবে**, এটি নিম্নরূপে প্রমাণ করা যায় :

$A \cup B = A \cup (B - A)$, যেখানে A এবং $B - A$ পরস্পর পৃথক,

এবং $B = (A \cap B) \cup (B - A)$, যেখানে $A \cap B$ এবং $B - A$ পরস্পর পৃথক।

সম্ভাবনার (iii) নং স্বত:সিদ্ধ ব্যবহার করে পাই,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \quad \ldots (2)$$

এবং

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A) \quad \ldots (3)$$

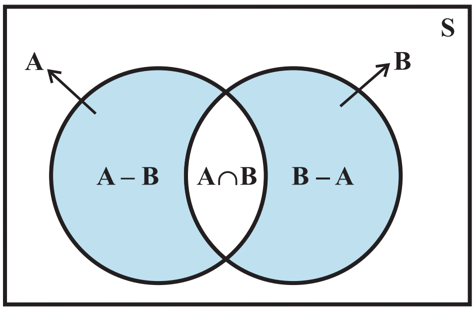
(2) থেকে (3) বিয়োগ করে পাই,

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

বা,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

উপরের ফলটি নিম্নের ভেনচিত্র (Venn Diagram) (চিত্র 16.1) ব্যবহার করে আরও যাচাই করা যেতে




**চিত্র 16.1**

পারে।

যদি A ও B দুটি বিচ্ছিন্ন সেট হয় অর্থাৎ তারা পরস্পর পৃথক ঘটনা হয়, তবে $A \cap B = \phi$

অতএব, $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

সুতরাং, দুটি পরস্পর পৃথক ঘটনা A ও B এর জন্য আমরা পাই,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , যা সম্ভাবনার (iii) নং স্বত:সিদ্ধ।

**16.4.4 *'A নয়' ঘটনার সম্ভাবনা (Probability of event 'not A')*** 1 থেকে 10 পর্যন্ত নম্বর সম্বলিত দশটি তাসের একটি সারি থেকে একটি তাস তোলার পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট ঘটনাটি ধরা যাক A = {2, 4, 6, 8} স্পষ্টতই নমুনাদেশটি হচ্ছে S = {1, 2, 3, ...,10}

যদি সবগুলো ফলাফল 1, 2, ...,10 সমানভাবে সম্ভাব্য হিসেবে ধরা হয় তবে প্রতিটির সম্ভাবনা হবে $\frac{1}{10}$

এখন $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8)$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

আরও 'A নয়' ঘটনা $= A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

এখন, $P(A') = P(1) + P(3) + P(5) + P(7) + P(9) + P(10)$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

অতএব, $P(A') = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = 1 - P(A)$

আরও, আমরা জানি যে, $A'$ এবং $A$ হচ্ছে পরস্পর পৃথক এবং সম্পূর্ণ ঘটনা অর্থাৎ,

$A \cap A' = \phi$ এবং $A \cup A' = S$

বা $P(A \cup A') = P(S)$

এখন $P(A) + P(A') = 1$, [(ii) ও (iii) নং স্বত:সিদ্ধ অনুযায়ী]

বা $P(A') = P(A \text{ নয়}) = 1 - P(A)$

অন্যথায় বিবৃত না হওয়া পর্যন্ত আমরা সমানভাবে সম্ভাব্য কিছু উদাহরণ এবং অনুশীলনী বিবেচনা করব।

**উদাহরণ 10** ভালোভাবে মেশানো 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে একটি তাস টানা হয়। যদি প্রতিটি ফলাফল সমানভাবে সম্ভাব্য হয় তবে সম্ভাবনা নির্ণয় কর যেখানে তাসটি,

(i) একটি রুইতন (diamond) (ii) টেক্কা (ace) নয়

(iii) একটি কালো রংয়ের (black card) অর্থাৎ, একটি চিড়তন (club) বা একটি ইস্কাবন (spade)

(iv) রুইতন নয় (v) কালো রং এর তাস নয়।

**সমাধান :** ভালোভাবে মেশানো 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে একটি তাস টানা হয়, তখন সম্ভাব্য ফলাফলের সংখ্যা 52 ।

(i) ধরা যাক A হল 'একটি রুইতন তাস টানার' ঘটনা। স্পষ্টতই A সেটের পদ সংখ্যা হল 13 ।

সুতরাং, $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

অর্থাৎ, রুইতন তাস হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{4}$

(ii) ধরা যাক B হল 'টানা তাসটি একটি টেক্কা'

অতএব, 'টানা তাসটি একটি টেক্কা নয়' ঘটনাটি হওয়া উচিত $B'$।

আমরা জানি যে $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{52} = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

(iii) ধরা যাক C ঘটনাটি হল 'টানা তাসটি একটি কালো রংয়ের তাস'।

সুতরাং, C তে মোট সদস্য সংখ্যা = 26

অর্থাৎ, $P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

তাই, কালো তাস হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{1}{2}$ ।

(iv) আমরা ধরে নিই, উপরের (i) নং-এ A হল 'টানা তাসটি একটি রুইতন' হওয়ার ঘটনা। অতএব 'টানা তাসটি একটি রুইতন না হওয়ার' ঘটনাকে A' বা 'A নয়' দ্বারা সূচিত করা যায়।

এখন P(A নয়) = $1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(v) 'টানা তাসটি কালো রংয়ের নয়' ঘটনাটি C' বা 'C নয়' দ্বারা সূচিত করা যায়।

আমরা জানি যে, P(C নয়) = $1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

অতএব তাসটি কালো না হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{1}{2}$

**উদাহরণ 11** একটি ব্যাগে 9টি গোলাকার চাকতি (disc) আছে, যার মধ্যে 4টি লাল, 3টি নীল এবং 2টি হলুদ রংয়ের। চাকতিগুলো সবগুলো সমান আকার ও আকৃতির। একটি চাকতি ব্যাগ থেকে যথেচ্ছভাবে তোলা হয়। চাকতিটি— (i) লাল, (ii) হলুদ, (iii) নীল, (iv) নীল নয়, (v) হয় লাল বা নীল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

**সমাধান** মোট চাকতির সংখ্যা 9টি, অতএব মোট ফলাফলের সংখ্যা = 9 ।

ধরা যাক A, B, C ঘটনাগুলো নিম্নরূপে সূচিত করা হয়,

A: 'চাকতিটি লাল রংয়ের'

B: 'চাকতিটি হলুদ রংয়ের'

C: 'চাকতিটি নীল রংয়ের'.

(i) লাল রংয়ের চাকতির সংখ্যা = 4 অর্থাৎ $n$ (A) = 4

তাই, $P(A) = \frac{4}{9}$

(ii) হলুদ রংয়ের চাকতির সংখ্যা = 2 অর্থাৎ $n$ (B) = 2

অতএব, $P(B) = \frac{2}{9}$

(iii) নীল রংয়ের চাকতির সংখ্যা = 3 অর্থাৎ $n$(C) = 3

অতএব, $P(C) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(iv) স্পষ্টতই 'নীল রংয়ের নয়' ঘটনাটি হচ্ছে 'C নয়'. আমরা জানি যে, P(C নয়) = 1 – P(C)

অতএব, P(C নয়) = $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(v) 'হয় লাল বা নীল' ঘটনাটিকে 'A বা C' দ্বারা বর্ণনা করা যায়,, যেহেতু, A এবং C ঘটনা দুটি পরস্পর পৃথক, তাই আমরা পাই,

$$P(A \text{ বা } C) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

**উদাহরণ 12** দু-জন ছাত্রছাত্রী অনিল এবং অসীমা একটি পরীক্ষাতে বসে। অনিলের পরীক্ষাটিতে যোগ্যতা অর্জন করার সম্ভাবনা 0.05 এবং অসীমার যোগ্যতা অর্জন করার সম্ভাবনা 0.10। উভয়ের পরীক্ষাটিতে যোগ্যতা অর্জন করার সম্ভাবনা 0.02। তবে নিম্নলিখিতগুলোর সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

(a) অনিল এবং অসীমা উভয়েই পরীক্ষায় যোগ্যতা অর্জন করবে না ।

(b) অন্ততঃপক্ষে তাদের মধ্যে একজন পরীক্ষাতে যোগ্যতা অর্জন করবে না এবং,

(c) কেবলমাত্র একজন তাদের মধ্যে যোগ্যতা অর্জন করবে।

**সমাধান** ধরা যাক E এবং F দ্বারা দুটি ঘটনা যথাক্রমে 'অনিল এর পরীক্ষাতে যোগ্যতা অর্জন করা' এবং 'অসীমা এর পরীক্ষাটিতে যোগ্যতা অর্জন করাকে সূচিত করে। দেওয়া আছে,

$P(E) = 0.05$, $P(F) = 0.10$ এবং $P(E \cap F) = 0.02$।

তখন,

(a) 'অনিল এবং অসীমা উভয়েই পরীক্ষাতে যোগ্যতা অর্জন করে না' ঘটনাটিকে $E' \cap F'$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

যেহেতু, $E'$ হচ্ছে 'E নয়' অর্থাৎ অনিল পরীক্ষায় যোগ্যতা অর্জন করে না এবং $F'$ হচ্ছে 'F নয়' অর্থাৎ অসীমা পরীক্ষায় যোগ্যতা অর্জন করবে না।

আবার, $E' \cap F' = (E \cup F)'$ (De Morgan-এর সূত্র দ্বারা)

এখন, $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

বা, $P(E \cup F) = 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$

সুতরাং, $P(E' \cap F') = P(E \cup F)' = 1 - P(E \cup F) = 1 - 0.13 = 0.87$

(b) P (কমপক্ষে তাদের মধ্যে একজন পরীক্ষায় যোগ্যতা অর্জন করবে না)

= 1 – P (উভয়েই যোগ্যতা অর্জন করবে না)

= 1 – 0.02 = 0.98

(c) ‘কেবল তাদের মধ্যে একজন পরীক্ষায় যোগ্যতা অর্জন করবে’ ঘটনাটি হয় (অনিল যোগ্যতা অর্জন করবে এবং অসীমা যোগ্যতা অর্জন করবে না) বা (অনিল যোগ্যতা অর্জন করবে না এবং অসীমা যোগ্যতা অর্জন করবে) ঘটার মতো একটি ঘটনা অর্থাৎ, $E \cap F'$ বা $E' \cap F$, যেখানে $E \cap F'$ এবং $E' \cap F$ পরস্পর পৃথক ঘটনা।

সুতরাং, P(কেবলমাত্র একজন তাদের মধ্যে যোগ্যতা অর্জন করবে)

$= P(E \cap F'$ অথবা $E' \cap F)$

$= P(E \cap F') + P(E' \cap F) = P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F)$

$= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11$

**উদাহরণ 13** দু-জন পুরুষ ও দু-জন মহিলা থেকে দু-জনের একটি কমিটি নির্বাচিত হয়। এখন কমিটিতে (i) পুরুষ না থাকার, (ii) একজন পুরুষ থাকার, (iii) দু-জন পুরুষ থাকার সম্ভাবনা কী হবে ?

**সমাধান** পুরুষ ও মহিলার মোট সংখ্যা = 2 + 2 = 4, এদের মধ্য হতে দু-জনকে ${}^4C_2$ উপায়ে নির্বাচিত করা যায়।

(i) দু-জনের কমিটিতে কোনো পুরুষ থাকবে না অর্থাৎ কমিটিতে দু-জন মহিলা থাকবে।

দু-জন মহিলা থেকে দুজনকে ${}^2C_2 = 1$ উপায়ে নির্বাচিত করা যায়।

সুতরাং, $P(\text{পুরুষ নয়}) = \frac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \frac{1 \times 2 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{6}$

(ii) কমিটিতে 1 জন পুরুষ অর্থাৎ অন্য 1 জন মহিলা। একজন পুরুষকে 2 জনের থেকে ${}^2C_1$ উপায়ে এবং একজন মহিলাকে 2 জনের থেকে ${}^2C_1$ উপায়ে নির্বাচিত করা যায়। একত্রিতভাবে উভয়কে ${}^2C_1 \times {}^2C_1$ উপায়ে নির্বাচিত করা যায়।

সুতরাং, $P(\text{একজন পুরুষ}) = \frac{{}^2C_1 \times {}^2C_1}{{}^4C_2} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$

(iii) দু-জন পুরুষ ${}^2C_2$ উপায়ে নির্বাচিত করা যায়।

অর্থাৎ, $P(\text{দু-জন পুরুষ}) = \frac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \frac{1}{{}^4C_2} = \frac{1}{6}$

## অনুশীলনী 16.3

1. নিম্নলিখিত নমুনা দেশ $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ এর ফলাফলগুলোর কোনটির জন্য নির্ধারিত সম্ভাবনাগুলো যুক্তিযুক্ত নয়।

| বিভাজন | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 0.1 | 0.01 | 0.05 | 0.03 | 0.01 | 0.2 | 0.6 |
| (b) | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ |
| (c) | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 |
| (d) | – 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | – 0.2 | 0.1 | 0.3 |
| (e) | $\frac{1}{14}$ | $\frac{2}{14}$ | $\frac{3}{14}$ | $\frac{4}{14}$ | $\frac{5}{14}$ | $\frac{6}{14}$ | $\frac{15}{14}$ |

**2.** একটি মুদ্রা দুবার টস্ করা হল। কমপক্ষে একটি টেল্ পড়ার সম্ভাবনা কী হবে?

**3.** একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হল। নিম্নলিখিত ঘটনাগুলোর সম্ভাবনা নির্ণয় করো :

(i) একটি মৌলিক সংখ্যা পড়ার,
(ii) 3 বা 3 এর বেশি একটি সংখ্যা পড়ার,
(iii) এক বা একের কম একটি সংখ্যা পড়ার,
(iv) 6 এর বেশি কোনো সংখ্যা পড়ার,
(v) 6 এর কম কোনো সংখ্যা পড়ার।

**4.** 52টি তাসের একটি প্যাকেট হতে একটি তাস নির্বাচিত করা হল—

(a) নমুনা দেশে কয়টি বিন্দু আছে?
(b) তাসটি একটি ইস্কাবনের টেক্কা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।
(c) তাসটি (i) একটি টেক্কা, (ii) কালো রঙের তাস হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

**5.** একটি মুদ্রা তার এক পৃষ্ঠে 1 চিহ্নিত আছে ও অপর পৃষ্ঠে 6 চিহ্নিত করা এবং একটি ঝোঁক শূন্য ছক্কা উভয়কেই টস্ করা হল। প্রাপ্ত সংখ্যা দুটির সমষ্টি (i) 3; (ii) 12 পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

**6.** শহরের কাউন্সিলে চারজন পুরুষ এবং ছয় জন মহিলা আছে। যদি একজন কাউন্সিল সদস্য যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত করা হয়, তবে তিনি একজন মহিলা হবেন তার সম্ভাবনা কত?

**7.** একটি ঝোঁকশূন্য মুদ্রা চারবার টস্ করা হল। এক ব্যক্তি হেড্ পড়লে 1 টাকা অর্জন করে এবং টেল্ পড়লে 1.50 টাকা লোকসান করে।
চারবার টসের পর এ নমুনা দেশ হতে তুমি কত রকম বিভিন্ন পরিমাণ অর্থ উপার্জন করতে পার এবং প্রতিটি ক্ষেত্রে প্রাপ্ত অর্থের সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

**8.** তিনটি মুদ্রা একবার টস্ করা হল। এখন,

(i) 3টি হেড্ (ii) 2টি হেড্ (iii) কমপক্ষে 2টি হেড্
(iv) সর্বোচ্চ 2টি হেড্ (v) কোন হেড্ নয় (vi) 3টি টেল্
(vii) ঠিক দুটি টেল্ (viii) কোনো টেল্ নয়, (ix) সর্বোচ্চ দুটি টেল্
পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

**9.** যদি কোনো ঘটনা ‘A’ ঘটার’ সম্ভাবনা $\frac{2}{11}$ হয়, তবে ‘A নয়’ ঘটার সম্ভাবনা কত?

**10.** ‘ASSASSINATION’ শব্দটি হতে একটি অক্ষর যথেচ্ছভাবে পছন্দ করা হল, তবে ঐ অক্ষরটি (i) একটি স্বরবর্ণ, (ii) একটি ব্যাঞ্জনবর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা বের করো।

**11.** একটি লটারিতে এক ব্যক্তি 1 থেকে 20 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যা হতে 6টি বিভিন্ন সংখ্যা যথেচ্ছভাবে পছন্দ করলে এবং যদি এই ছয়টি সংখ্যা লটারি কমিটি কর্তৃক স্থিরীকৃত 6টি সংখ্যার সঙ্গে ইতিপূর্বেই মেলানো থাকে, তবে সে পুরস্কারটি জিতে নেয়। খেলাটিতে পুরস্কারটি জেতার সম্ভাবনা কত ? [**সঙ্কেত :** সংখ্যার ক্রম গুরুত্বপূর্ণ নয়]

**12.** নিম্নলিখিত সম্ভাবনা P(A) এবং P(B) ধারাবাহিকভাবে সংজ্ঞায়িত কিনা তা পরীক্ষা করো।

(i) $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.7,\ P(A \cap B) = 0.6$

(ii) $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$

**13.** নিম্নলিখিত টেবিলের শূন্যস্থানগুলো পূরণ করো :

| | **P(A)** | **P(B)** | **P(A ∩ B)** | **P(A ∩ B)** |
|---|---|---|---|---|
| (i) | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{15}$ | . . . |
| (ii) | 0.35 | . . . | 0.25 | 0.6 |
| (iii) | 0.5 | 0.35 | . . . | 0.7 |

**14.** প্রদত্ত যে, $P(A) = \frac{3}{5}$ এবং $P(B) = \frac{1}{5}$। যদি A ও B পরস্পর পৃথক ঘটনা হয় তবে, P(A বা B) নির্ণয় করো।

**15.** যদি E ও F দুটি ঘটনা এমন হয় যে, $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$ এবং P(E এবং F) = $\frac{1}{8}$, তবে, (i) P(E বা F), (ii) P(E নয় এবং F নয়) নির্ণয় করো।

**16.** E ও F ঘটনা দুটি এরূপ হয় যে P(E নয় বা F নয়) = 0.25, তবে E ও F পরস্পর পৃথক হবে কিনা বিবৃত করো।

**17.** A ও B ঘটনা দুটি এরূপ যেখানে P(A) = 0.42, P(B) = 0.48 এবং P(A এবং B) = 0.16। তবে, (i) P(A নয়), (ii) P(B নয়) এবং (iii) P(A বা B) নির্ধারণ করো।

**18.** কোনো স্কুলের একাদশ শ্রেণিতে ছাত্রছাত্রীদের 40% গণিতে এবং 30% জীববিদ্যা নিয়ে পড়াশোনা করে। তাদের মধ্যে 10% গণিত ও জীববিদ্যা উভয় বিষয়েই পড়াশোনা করে। ক্লাস থেকে একজনকে যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত করলে, সে গণিত বা জীববিদ্যা নিয়ে পড়াশোনা করলে তার সম্ভাবনা বের করো।

**19.** দুটি পরীক্ষার ভিত্তিতে গ্রেড করা একটি প্রবেশিকা পরীক্ষায়, যথেচ্ছভাবে পছন্দ করা একজন ছাত্রের প্রথম পরীক্ষাটিতে উত্তীর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা 0.8 এবং দ্বিতীয় পরীক্ষাটিতে উত্তীর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা 0.7। তাদের মধ্যে কমপক্ষে যেকোনো একটিতে উত্তীর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা 0.95। উভয় পরীক্ষাতে উত্তীর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কী হবে?

**20.** হিন্দি ও ইংরেজি বিষয়ের চূড়ান্ত পরীক্ষাতে একজন ছাত্রের উত্তীর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা 0.5 এবং কোনো বিষয়েই উত্তীর্ণ না হওয়ার সম্ভাবনা 0.1। যদি ইংরেজি পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা 0.75 হয়, তবে হিন্দি পরীক্ষাতে উত্তীর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কী হবে?

**21.** 60 জন শিক্ষার্থীর একটি ক্লাসে NCC এর জন্য 30 জন NSS এর জন্য 32 জন এবং 24 জন NCC এবং NSS উভয়ের জন্য বাছাই করে। যদি একজন শিক্ষার্থী যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত করা যায় তবে সম্ভাবনা নির্ণয় করো যখন—

(i) শিক্ষার্থীটি NCC বা NSS কে বাছাই করে।

(ii) শিক্ষার্থীটি NCC বা NSS কোনটিকেই বাছাই করে না।

(iii) শিক্ষার্থীটি NSS কে বাছাই করে কিন্তু NCC কে নয়।

## *বিবিধ উদাহরণমালা*

**উদাহরণ 14** বীণা তার ছুটির সময় চারটি শহরে (A, B, C এবং D) যথেচ্ছভাবে পরিদর্শন করতে যায়। সম্ভাবনা কী হবে যখন সে

(i) B এর পূর্বে A ?

(ii) B এর পূর্বে A এবং C এর পূর্বে B ?

(iii) A প্রথমে এবং B শেষে ?

(iv) A হয় প্রথম বা দ্বিতীয় ?

(v) B এর ঠিক পূর্বে A শহর পরিদর্শন করে?

**সমাধান** বীণা যে ক্রমে চারটি শহর A, B, C, বা D পরিদর্শন করতে পারে সেই বিন্যাস (ক্রম) সংখ্যা 4! অর্থাৎ, $n$ (S) = 24।

যেহেতু এই পরীক্ষার নমুনা দেশের মোট পদ সংখ্যা 24 ও এই ফলাফলগুলো সবগুলোই সমানভাবে সম্ভাব্য ধরা হয়। এই পরীক্ষার জন্য নমুনা দেশটি হয়

S = {ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB
BACD, BADC, BDAC, BDCA, BCAD, BCDA
CABD, CADB, CBDA, CBAD, CDAB, CDBA
DABC, DACB, DBCA, DBAC, DCAB, DCBA}

(i) ধরা যাক, 'সে B এর পূর্বে A পরিদর্শন করে' ঘটনাটি E দিয়ে সূচিত হয়,

সুতরাং, E = {ABCD, CABD, DABC, ABDC, CADB, DACB
ACBD, ACDB, ADBC, CDAB, DCAB, ADCB}

অতএব, $$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$

(ii) ধরা যাক 'বীণা B এর পূর্বে A এবং C এর পূর্বে B পরিদর্শন করে' ঘটনাটিকে F দিয়ে সূচিত হয়।
এখানে, F = {ABCD, DABC, ABDC, ADBC}

সুতরাং, $$P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$$

শিক্ষার্থীদের (iii), (iv) এবং (v)নং এর ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয় করার পরামর্শ দেয়া হচ্ছে।

**উদাহরণ 15** সম্ভাবনা বের করো যখন 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে 7টি তাস একযোগে নেয়া হয় তার মধ্যে (i) সবগুলো সাহেব (King), (ii) 3টি সাহেব, (iii) কমপক্ষে 3টি সাহেব হবে।

**সমাধান** মোট সম্ভাব্য উপায় সংখ্যা = ${}^{52}C_7$

(i) 4টি সাহেবের একযোগে উঠার সংখ্যা = ${}^{4}C_4 \times {}^{48}C_3$ (অন্য 3টি তাস অবশ্যই অবশিষ্ট 48টি তাস থেকে পছন্দ করতে হবে)

অতএব, P (এক যোগে 4টি সাহেব থাকবে) = $\dfrac{{}^{4}C_4 \times {}^{48}C_3}{{}^{52}C_7} = \dfrac{1}{7735}$

(ii) 3টি সাহেব ও 4টি সাহেব নয় এ ধরনের তাস হাতে থাকার সংখ্যা = ${}^{4}C_3 \times {}^{48}C_4$

সুতরাং, P (3টি সাহেব) = $\dfrac{{}^{4}C_3 \times {}^{48}C_4}{{}^{52}C_7} = \dfrac{9}{1547}$

(iii) P(কমপক্ষে 3টি সাহেব) = P(3টি সাহেব বা 4টি সাহেব)

= P(3টি সাহেব) + P(4টি সাহেব)

$= \dfrac{9}{1547} + \dfrac{1}{7735} = \dfrac{46}{7735}$

**উদাহরণ 16** যদি A, B, C তিনটি ঘটনা একটি সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত থাকে তবে প্রমাণ করো যে—

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

**সমাধান** বিবেচনা করা যাক, $E = B \cup C$

অতএব,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E)$$
$$= P(A) + P(E) - P(A \cap E) \quad \text{... (1)}$$

এখন,

$$P(E) = P(B \cup C)$$
$$= P(B) + P(C) - P(B \cap C) \quad \text{... (2)}$$

আরও, $A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

[সেট এর ক্ষেত্রে সংযোগের উপর ছেদ এর বণ্টন সূত্র ব্যবহার করে]

অতএব, $P(A \cap E) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$

$$= P(A\cap B)+P(A\cap C) - P[A\cap B\cap C] \quad \dots (3)$$

(1) নং এ (2) ও (3) ব্যবহার করিয়া, আমরা পাই,

$$P[A\cup B\cup C]=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)$$
$$- P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

**উদাহরণ 17** একটি রিলে দৌড় প্রতিযোগিতায় মোট 5টি দল A, B, C, D ও E রয়েছে।

(a) A, B এবং C যদি যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় স্থানে শেষ করে, সেটির সম্ভাবনা কী হবে?

(b) A, B ও C যদি প্রথম তিনজন হিসেবে শেষ করে (যে কোনো ক্রমে) তবে সম্ভাবনা কী হয়? (ধরে নিতে হবে শেষ করার সবগুলো ক্রম সমানভাবে সম্ভাব্য)

**সমাধান** যদি আমরা ক্রম অনুযায়ী শেষ প্রথম দিকের তিনটি স্থানের সবগুলো ক্ষেত্রকে নিয়ে গঠিত নমুনা দেশ বিবেচনা করি তাবে আমরা পাই, ${}^5P_3$, অর্থাৎ, $\frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$টি নমুনা বিন্দু, প্রতিটির সম্ভাবনা $\frac{1}{60}$ ।

(a) A, B এবং C যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় স্থানে শেষ করে। এর জন্য কেবলমাত্র একটি শেষ করার ক্রম আছে যেটি হল ABC ।

অতএব, P(A, B ও C যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, ও তৃতীয় স্থানে শেষ করবে) = $\frac{1}{60}$ ।

(b) A, B এবং C প্রথম তিনজন শেষ করে, তবে A, B, C এর জন্য মোট বিন্যাস হবে 3! অতএব এই ঘটনার সাথে যুক্ত মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা হবে 3! টি

তাই, P (A, B ও C প্রথম তিনজনে শেষ করবে) $= \frac{3!}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

## অধ্যায় 16 এর বিবিধ অনুশীলনী

**1.** একটি বাক্সে 10টি লাল রঙের, 20টি নীল রঙের এবং 30টি সবুজ রঙের মার্বেল আছে। বাক্স হতে 5টি মার্বেল তোলা হলে সম্ভাবনা কী হবে যখন—

(i) সবগুলো নীল রঙের হবে। (ii) কমপক্ষে একটি সবুজ রঙের হবে।

**2.** 4টি তাস ভালোভাবে মেশানো 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে তোলা হয়। 3টি রুইতন (diamond) ও একটি ইস্কাবন (spade) হওয়ার সম্ভাবনা কী হবে?

**3.** একটি ছক্কার দুটি তলের প্রতিটিতে '1', তিনটি তলের প্রতিটিতে '2' সংখ্যাটি এবং একটি তলে '3' সংখ্যাটি আছে। যদি ছক্কাটি একবার গড়ানো হয়, তবে

(i) P(2) (ii) P(1 বা 3) (iii) P(3 নয়) নির্ণয় করো।

**4.** কোনো একটি লটারিতে 10,000 টিকেট বিক্রয় হল এবং 10টি সমান সংখ্যক পুরস্কার দেয়া হল। কোনো পুরস্কার না পাওয়ার সম্ভাবনা কী হবে যদি তুমি (a) একটি টিকেট, (b) দুটি টিকেট, (c) 10টি টিকেট কিনে থাক?

**5.** 100 জন ছাত্রছাত্রীর মধ্যে 40 ও 60 জনের দুটি বিভাগ গঠন করা হল। যদি তুমি ও তোমার বন্ধু এই 100 জন ছাত্রছাত্রীর মধ্যে হও তবে সম্ভাবনা কী হবে যদি

(a) তোমরা উভয়েই একই বিভাগে থাক?

(b) তোমরা দু-জনে দুটি ভিন্ন বিভাগে থাক?

**6.** তিনজন ব্যক্তির উদ্দেশ্যে তিনটি চিঠি লেখা হল এবং তাদের প্রত্যেকের উদ্দেশ্যে একটি খামে ঠিকানা লিখে চিঠিগুলো খামের মধ্যে যথেচ্ছভাবে রাখা হল যাতে প্রতিটি খামে ঠিক একটি চিঠি থাকে। কমপক্ষে একটি চিঠি একটি সঠিক খামে রাখার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

**7.** A এবং B দুটি ঘটনা হলে, যেখানে $P(A) = 0.54$, $P(B) = 0.69$ এবং $P(A \cap B) = 0.35$. তবে (i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A' \cap B')$ (iii) $P(A \cap B')$ (iv) $P(B \cap A')$ নির্ণয় করো।

**8.** একটি কোম্পানির কর্মচারীদের মধ্যে থেকে ম্যানেজিং কমিটির জন্য 5 জনকে নির্বাচিত করা হয়। 5 জন ব্যক্তির বিশদ বিবরণ নীম্নে দেয়া হল :

| ক্রম সংখ্যা | নাম | লিঙ্গা | বয়স (বৎসর) |
|---|---|---|---|
| 1. | হরিশ | পুং | 30 |
| 2. | রোহণ | পুং | 33 |
| 3. | শীতল | স্ত্রী | 46 |
| 4. | এলিস | স্ত্রী | 28 |
| 5. | সেলিম | পুং | 41 |

এই গ্রুপ থেকে একজন ব্যক্তি মুখপাত্র হিসাবে কাজ করার জন্য যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত হন। মুখপাত্র হয়তো পুরুষ বা 35 বছরের বেশি বয়স্ক হবার সম্ভাবনা কত?

**9.** 0, 1, 3, 5 এবং 7 অঙ্কগুলো হতে চার অঙ্কবিশিষ্ট 5000 থেকে বেশি একটি সংখ্যা গঠন করা হলে, গঠিত সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো যেখানে (i) অঙ্কগুলো পুণরাবৃত্তি করা হয়, (ii) অঙ্কগুলোর পুনরাবৃত্তি সম্ভব নয়।

**10.** একটি স্যুটকেসের নম্বর লকের 4টি চাকা আছে। প্রতিটি দশটি অঙ্কের সহিত অর্থাৎ 0 হইতে 9 পর্যন্ত লেবেলযুক্ত। লক্‌টি কোনো পুনরাবৃত্তি ছাড়া চারটি অঙ্কের একটি ক্রম দিয়ে খোলে। একজন ব্যক্তির সঠিক ক্রম দিয়ে স্যুটকস্‌টি খোলার সম্ভাবনা কী হবে?

## সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে আমরা সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধ তত্ত্বের ব্যাপারে পড়াশোনা করলাম। এই অধ্যায়ের বিশেষ বৈশিষ্ট্যগুলি হল নিম্নরূপ :

- ***নমুনা দেশ* (*Sample space*) :** সমস্ত সম্ভাব্য ফলাফলগুলির সেট
- ***নমুনা বিন্দু* (*Sample points*) :** নমুনা দেশের সদস্য সমূহ
- ***ঘটনা* (*Event*) :** নমুনা দেশের একটি উপসেট
- ***অসম্ভব ঘটনা* (*Impossible event*) :** শূন্য সেট
- ***নিশ্চিত ঘটনা* (*Sure event*) :** সমগ্র নমুনা দেশ
- ***পূরক ঘটনা বা ঘটনাটি না ঘটা* (*Complementary event or 'not event'*) :** সেট A′ বা S – A
- ***ঘটনা* A *বা* B (*Event* A *or* B) :** সেট $A \cup B$
- ***ঘটনা* A *এবং* B (*Event* A *and* B) :** সেট $A \cap B$
- ***ঘটনা* 'A *এবং* B *নয়*' (*Event* A *and* not B) :** সেট A – B
- ***পরস্পর পৃথক ঘটনা* (*Mutually exclusive event*) :** A ও B পরস্পর পৃথক ঘটনা হয় যদি $A \cap B = \phi$
- ***সম্পূর্ণ এবং পরস্পর পৃথক ঘটনা* (*Exhaustive and mutually exclusive events*) :** $E_1, E_2, ..., E_n$ পরস্পর পৃথক এবং সম্পূর্ণ ঘটনা হবে যদি $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ এবং $E_i \cap E_j = \phi \ \forall\, i \neq j$
- ***সম্ভাবনা* (*Probability*) :** $\omega_i$ নমুনা বিন্দুর সহিত সংযুক্ত $P(\omega_i)$ এমন একটি সংখ্যা যাতে

  (i) $0 \le P(\omega_i) \le 1$  (ii) $\sum P(\omega_i)$ যখন সবগুলো $\omega_i \in S = 1$

  (iii) $P(A) = \sum P(\omega_i)$ সমস্ত $\omega_i \in A$ এর জন্য। $P(\omega_i)$ সংখ্যাটিকে $\omega_i$ ফলাফলের সম্ভাবনা বলা হয়

- ***সমভাবে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো* (*Equally likely outcomes*) :** সব ফলাফলগুলো সমান সম্ভাবনা যুক্ত।
- ***একটি ঘটনার সম্ভাবনা* (*Probability of an event*) :** সমভাবে সম্ভাব্য ফলাফল যুক্ত একটি সসীম নমুনা দেশের অন্তর্গত কোনো ঘটনার সম্ভাবনা, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$, যেখানে $n(A)$ = A সেটের সদস্য সংখ্যা, $n(S)$ = S সেটের সদস্য সংখ্যা।

- যদি A ও B দুটি ঘটনা হয়, তবে

$$P(A \text{ বা } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ এবং } B)$$

অনুরূপে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- যদি A ও B পরস্পর পৃথক ঘটনা হয়, তবে $P(A \text{ বা } B) = P(A) + P(B)$
- যদি A কোনো একটি ঘটনা হয়, তবে $P(A \text{ নয়}) = 1 - P(A)$

## ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

গণিতের অন্যান্য অনেক শাখার মতোই সম্ভাবনা তত্ত্বটি ব্যবহারিক বিবেচ্য বিষয় হিসেবে বিবর্তিত হয়ে এসেছে। এই সম্ভাবনা তত্ত্বটির উৎপত্তি ষোড়শ শতাব্দিতে হয়েছিল যখন একজন ইতালিয়ন চিকিৎসক তথা গণিতজ্ঞ Jerome Cardan (1501–1576) এই বিষয়ে তাঁর প্রথম পুস্তক "Book on Games of Chance" (Biber de Ludo Aleae) লেখেন। এটি 1663 সালে তাঁর মৃত্যুর পর প্রকাশিত হয়েছিল।

1654 সালে, Chevalier de Metre নামক এক জুয়াড়ি পাশা সংক্রান্ত কিছু সমস্যা নিয়ে সুপ্রসিদ্ধ ফরাসী দার্শনিক ও গণিতজ্ঞ Blaise Pascal (1623–1662) এর কাছে আসেন। Pascal এই ধরনের সমস্যার প্রতি রুচি দেখাতে লাগালেন এবং বিখ্যাত ফরাসি গণিতজ্ঞ Pierre de Fermat (1601–1665) এর সাথে আলোচনা করেন। Pascal এবং Fermat উভয়েই স্বাধীনভাবে সমস্যার সমাধান করেন। Pascal এবং Fermat ছাড়াও Christian Huygenes (1629–1665), একজন ডাচ্, J. Bernoulli (1654–1705), De Moivre (1667–1754), একজন ফরাসি Pierre Laplace (1749–1827), একজন ফরাসি ও রাশিয়ান P. L Chebyshev (1821–1897), A. A Markov (1856–1922) এবং A. N Kolmogorove (1903–1987) সবাই সম্ভাবনা তত্ত্ব সম্পর্কে বিশেষ অবদান আহ্বান রেখে গেছেন। সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধ তত্ত্বের সহিত Kolmogorovএর কৃতিত্ব জড়িত। 1933 সালে প্রকাশিত তাঁর পুস্তক 'Foundations of Probability'এ সম্ভাবনাকে সেট অপেক্ষক হিসেবে উপস্থাপন করলেন যা এক সর্বোত্তম বিবেচনা বলে খ্যাত।

পরিশিষ্ট 1

# অসীম শ্রেণি (INFINITE SERIES)

## A.1.1 ভূমিকা

অধ্যায় 9-এ অনুক্রম (Sequence) এবং শ্রেণি (Series) এর যে আলোচনা হয়েছে তা থেকে বলা যায়, অসীম সংখ্যক পদযুক্ত একটি অণুক্রম $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ কে *অসীম অণুক্রম* (*infinite sequence*) এবং এর নির্দেশিত সমষ্টি অর্থাৎ $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ কে অসীম অণুক্রমের সহিত যুক্ত *অসীম শ্রেণি* (*infinte series*) বলা হয়।

এই শ্রেণিটি সিগমা চিহ্ন ব্যবহার করে সংক্ষেপে প্রকাশ করা যেতে পারে

অর্থাৎ, $a_1 + a_2 + a_3 + . \;. \;. + a_n + . \;. \;. = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

এই অধ্যায়ে আমরা কিছু বিশেষ ধরনের শ্রেণি সম্বন্ধে পড়বো যা বিভিন্ন সমস্যামূলক পরিস্থিতিতে প্রয়োজন হতে পারে।

## A.1.2 যেকোনো সূচকের জন্য দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem for any Index)

অধ্যায় 8-এ আমরা দ্বিপদ উপপাদ্য নিয়ে আলোচনা করেছি যেখানে সূচক একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ছিল। এই বিভাগে আমরা এই উপপাদ্যের অধিক সাধারণ রূপ নিয়ে বর্ণনা করবো যেখানে সূচক একটি সমগ্র সংখ্যা হবে সেটি অপরিহার্য নয়। এটি একটি বিশেষ ধরনের অসীম শ্রেণি যাকে আমরা *দ্বিপদ শ্রেণি* (*Binomial Series*) বলবো। আমরা কিছু উদাহরণের সাহায্যে এর প্রয়োগ সম্পর্কে ব্যাখ্যা করবো।

আমরা জানি যে, সূত্রটি $(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, x + . \;. \;. + {}^nC_n\, x^n$

এখানে, $n$ একটি অ-ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। পর্যবেক্ষণ করে দেখা যায়, যদি আমরা সূচক $n$ কে ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বা ভগ্নাংশ দিয়ে প্রতিস্থাপন করি তবে সমবায় ${}^nC_r$ এর কোনো অর্থ হয় না।

আমরা এখন একটি দ্বিপদ উপপাদ্য বর্ণনা করব (প্রমান ছাড়া), যেটি একটি অসীম শ্রেণি দেবে যেখানে সূচক একটি ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ কিন্তু সমগ্র সংখ্যা নয়।

### উপপাদ্য

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + ...$$

এই সূত্রটি সিদ্ধ হয় যখন $|x| < 1$।

**মন্তব্য** 1. মনোযোগের সাথে দেখো যে $|x| < 1$ শর্তটি, অর্থাৎ, $-1 < x < 1$ অপরিহার্য যেখানে $m$ একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা একটি ভগ্নাংশ। উদাহরণস্বরূপ, $x = -2$ ও $m = -2$ নিয়ে আমরা পাই,

$$(1-2)^{-2} = 1+(-2)(-2)+\frac{(-2)(-3)}{1.2}(-2)^2+...$$

বা, $1 = 1 + 4 + 12 + \ldots$

যা সম্ভব নয়।

2. দেখো যে, $(1+x)^m$ এর বিস্তৃতিতে অসীম সংখ্যক পদ আছে, যেখানে $m$ একটি ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা অথবা একটি ভগ্নাংশ।

ধরি
$$(a+b)^m = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$

$$= a^m\left[1+m\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+...\right]$$

$$= a^m + ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+...$$

এই বিস্তৃতিটি বৈধ হবে যখন $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ বা সমতুল্যভাবে যখন $|b| < |a|$।

$(a + b)^m$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি হল—

$$\frac{m(m-1)(m-2)...(m-r+1)a^{m-r}b^r}{1.2.3...r}$$

আমরা নীচে দ্বিপদ উপপাদ্যের কিছু বিশেষ দৃষ্টান্ত দিচ্ছি যেখানে আমরা ধরেছি $|x| < 1$, এগুলো শিক্ষার্থীদের জন্য অনুশীলনী হিসেবে উপস্থাপিত হল :

1. $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$
2. $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
3. $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$
4. $(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

**উদাহরণ 1** বিস্তৃত করো $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, যখন $|x| < 2$।

**সমাধান** আমরা জানি,

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}\left(\frac{-x}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1.2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\ldots$$

$$= 1+\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{32}+\ldots$$

## A.1.3 অসীম গুণোত্তর শ্রেণি (Infinite Geometric Series)

অধ্যায় 9 এর 9.3 অনুচ্ছেদে একটি অণুক্রম $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ কে গুণোত্তর প্রগতি (Geometric progression বা G.P) বলা হয় যদি $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (ধ্রুবক) যখন $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$। বিশেষভাবে, যদি আমরা $a_1 = a$, নিই, তখন লব্ধ অনুক্রম $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ কে একটি আদর্শ গুণোত্তর প্রগতি হিসেবে নেওয়া হয়, যেখানে $a$ হল প্রথম পদ এবং $r$ হল গুণোত্তর প্রগতিটির সাধারণ অনুপাত।

পূর্বে আমরা সসীম শ্রেণি $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ এর যোগফল বের করার সূত্র সম্বন্ধে আলোচনা করেছি, যা নিম্নে দেওয়া হল—

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} \text{।}$$

এই অনুচ্ছেদে আমরা অসীম গুণোত্তর শ্রেণি $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ এর যোগফল বের করার সূত্রটি বিবৃত করবো এবং উদাহরণ এর সাহায্যে এটি ব্যাখ্যা করবো।

চলো আমরা একটি গুণোত্তর প্রগতি, $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$ বিবেচনা করি।

এখানে, $a = 1, r = \frac{2}{3}$। আমরা পাই,

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \qquad \ldots (1)$$

চলো আমরা $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ এর ধর্ম সম্পর্কে অধ্যয়ন করি যেখানে $n$ এর মান বৃহৎ থেকে বৃহত্তর হতে থাকে।

| $n$ | 1 | 5 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ | 0.6667 | 0.1316872428 | 0.01734152992 | 0.00030072866 |

আমরা পর্যবেক্ষণ করি যে, $n$ এর মান যখন বৃহৎ থেকে বৃহত্তর হতে থাকে তখন $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ এর মান প্রায় শূন্যের নিকট থেকে নিকটতরে এসে যায়। গাণিতিকভাবে, আমরা বলি যে, যখন $n$ এর মান যথেষ্ট পরিমাণ বৃহৎ হয় তখন $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ এর মান যথেষ্ট পরিমাণে ক্ষুদ্র হয়। অন্য কথায়, যখন $n \to \infty, \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \to 0$। ফলস্বরূপ আমরা দেখতে পাই অসীম সংখ্যক পদের যোগফল S = 3 হবে।

সুতরাং, অসীম গুণোত্তর প্রগতি $a, ar, ar^2, \ldots$ এর জন্য, যদি সাধারণ অনুপাত $r$ এর সাংখ্যিক মান 1 এর কম হয় তবে,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

এক্ষেত্রে, $r^n \to 0$ যখন $n \to \infty$ যেহেতু $|r|<1$ এবং তখন $\dfrac{ar^n}{1-r} \to 0$।

অতএব, $S_n \to \dfrac{a}{1-r}$ যখন $n \to \infty$।

সাংকেতিকভাবে, অসীম গুণোত্তর শ্রেণির অসীম সমষ্টিকে S দ্বারা সূচিত করলে,

আমরা পাই, $S = \dfrac{a}{1-r}$

উদাহরণস্বরূপ,

(i) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$

(ii) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{2^3} + \ldots = \dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

**উদাহরণ 2** নীচের গুণোত্তর প্রগতির অসীম সমষ্টি নির্ণয় করো:

$$\frac{-5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{-5}{64}, \ldots.$$

**সমাধান** এখানে $a = \frac{-5}{4}$ এবং $r = -\frac{1}{4}$ । এছাড়াও $|r| < 1$ ।

অতএব অসীম সমষ্টি হল $\dfrac{\frac{-5}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{-5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1$ ।

## A.1.4 সূচকীয় শ্রেণি (Exponential Series)

Leonhard Euler (1707 – 1783), বিখ্যাত স্যুইস গণিতবিদ 1748 সালে তাঁর ক্যালকুলাস পাঠ্যের মধ্যে $e$ সংখ্যাটিকে উত্থাপন করেন। বৃত্তের সম্পর্কিত পড়াশোনায় যেমন $\pi$ সংখ্যাটির ব্যবহার আছে ঠিক তেমনি ক্যালকুলাস সংক্রান্ত ক্ষেত্রে '$e$' সংখ্যাটিও খুব প্রয়োজনীয়।

নিম্নে সংখ্যার অসীম শ্রেণিটি বিবেচনা করি,

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \qquad \ldots (1)$$

(1) এ প্রদত্ত শ্রেণিটির সমষ্টি $e$ দ্বারা সূচিত হয়।

চলো আমরা এই $e$ এর মান বের করি।

যেহেতু (1)নং শ্রেণিটির প্রতিটি পদ ধনাত্মক, তাই ইহা স্পষ্ট যে তার সমষ্টিও ধনাত্মক হবে।

দুটি সমষ্টি বিবেচনা করি,

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \qquad \ldots (2)$$

এবং $$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots.+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots \qquad \ldots (3)$$

লক্ষ করো যে,

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{6} \text{ এবং } \frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}, \text{ যা থেকে পাই } \frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{4!}=\frac{1}{24} \text{ এবং } \frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}, \text{ যা থেকে পাই } \frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}$$

$$\frac{1}{5!}=\frac{1}{120} \text{ এবং } \frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}, \text{ যা থেকে পাই } \frac{1}{5!}<\frac{1}{2^4}$$

সুতরাং, সাদৃশ্য অনুযায়ী আমরা বলতে পারি যে,

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ যখন } n > 2$$

আমরা পর্যবেক্ষণ করি যে (2)নং এর প্রতিটি পদ (3)নং এর প্রতিটি অনুরূপ পদ থেকে ছোটো,

তাই, $$\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) < \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right) \quad \ldots (4)$$

(4)নং এর উভয়পক্ষে $\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)$ যোগ করে পাই,

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\right)$$

$$< \left\{\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)\right\} \quad \ldots (5)$$

$$= \left\{1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)\right\}$$

$$= 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+2 = 3$$

(5)নং এর বামপক্ষ (1)নং শ্রেণিটিকে প্রকাশ করে। অতএব, $e < 3$ এবং আরও $e > 2$ এবং তাই $2 < e < 3$ ।

**মন্তব্য** $x$ চলরাশিযুক্ত সূচক শ্রেণিকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে,

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

**উদাহরণ 3** $e^{2x+3}$ কে $x$ এর ঘাতের শ্রেণি হিসেবে বিস্তৃত করে $x^2$ এর সহগ নির্ণয় করো।

**সমাধান** আমরা জানি,

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

এই সূচক শ্রেণিটিতে $x$ কে $(2x+3)$ দিয়ে প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$e^{2x+3} = 1+\frac{(2x+3)}{1!}+\frac{(2x+3)^2}{2!}+\ldots$$

এখানে, সাধারণ পদ হচ্ছে, $\dfrac{(2x+3)^n}{n!} = \dfrac{(3+2x)^n}{n!}$ ।

এটিকে দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তৃতি করে পাই,

$$\frac{1}{n!}\left[3^n + {}^nC_1 3^{n-1}(2x) + {}^nC_2 3^{n-2}(2x)^2 + \ldots + (2x)^n\right] ।$$

এখানে $x^2$ এর সহগ হবে $\dfrac{{}^nC_2 3^{n-2} 2^2}{n!}$

অতএব সমগ্র শ্রেণিটিতে $x^2$ এর সহগ হলো

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{{}^nC_2 3^{n-2}2^2}{n!} = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)3^{n-2}}{n!}$$

$$= 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{(n-2)!} \quad [n! = n\,(n-1)\,(n-2)! \text{ ব্যবহার করে}]$$

$$= 2\left[1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\ldots\right]$$

$$= 2e^3 ।$$

অতএব, $e^{2x+3}$ এর বিস্তৃতিতে $x^2$ এর সহগ হবে $2e^3$

বিকল্পভাবে, $e^{2x+3} = e^3 \,.\, e^{2x}$

$$= e^3\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots\right]$$

সুতরাং, $e^{2x+3}$ এর বিস্তৃতিতে $x^2$ এর সহগ হল $e^3.\dfrac{2^2}{2!}=2e^3$

**উদাহরণ 4** $e^2$ এর মান নির্ণয় করো, এক দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানে।

**সমাধান** $x$ যুক্ত সূচক শ্রেণির সূত্রটি ব্যবহার করে পাই,

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

$x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \ldots$$

$$= 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{4}{45} + \ldots$$

$\geq$ প্রথম সাতটি পদের যোগফল $\geq 7.355$

অপরপক্ষে, আমরা পাই,

$$e^2 < \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right) + \frac{2^5}{5!}\left(1 + \frac{2}{6} + \frac{2^2}{6^2} + \frac{2^3}{6^3} + \ldots\right)$$

$$= 7 + \frac{4}{15}\left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots\right) = 7 + \frac{4}{15}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right) = 7 + \frac{2}{5} = 7.4$$

সুতরাং, $e^2$, 7.355 এবং 7.4 এর মধ্যে অবস্থিত। অতএব, $e^2$ এর এক দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান হল 7.4।

### A.1.5 লগারিদমিক শ্রেণি (Logarithmic Series)

আরেকটি খুব গুরুত্বপূর্ণ শ্রেণি হল লগারিদমিক শ্রেণি যা একটি অসীম শ্রেণি রূপে প্রকাশ করা যায়। আমরা প্রমাণ ব্যতীত নীচের ফলাফল বিবৃত করি এবং এর প্রয়োগ একটি উদাহরণের সাহায্যে বিশ্লেষণ করি।

**উপপাদ্য** যদি $|x| <$ হয়, তখন

$$\log_e(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

উপরের ডানপক্ষের শ্রেণিটিকে লগারিদমিক শ্রেণি বলে (*logarithmic series*)।

**দ্রষ্টব্য** $\log_e(1+x)$ এর বিস্তৃতিটি $x = 1$ এর জন্য বৈধ হয়। $\log_e(1+x)$ এর বিস্তৃতিতে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

**উদাহরণ 5** যদি $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের দুটি বীজ $\alpha$, $\beta$ হয় তবে প্রমাণ করো যে,

$$\log_e\left(1 + px + qx^2\right) = (\alpha + \beta)x - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{3}x^3 - \ldots$$

**সমাধান** ডানপক্ষ $= \left[\alpha x - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{3} - \ldots\right] + \left[\beta x - \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 x^3}{3} - \ldots\right]$

$$= \log_e(1 + \alpha x) + \log_e(1 + \beta x)$$

$$= \log_e\left(1 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta x^2\right)$$

$$= \log_e\left(1 + px + qx^2\right)$$ = বামপক্ষ।

এখানে আমরা $\alpha + \beta = p$ এবং $\alpha\beta = q$ ব্যবহার করেছি। আমরা এটি দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত বীজদ্বয় হতে জানি। আমরা আরও ধরেছি যে $|\alpha x| < 1$ এবং $|\beta x| < 1$ ।

— ❖ —

পরিশিষ্ট 2

# গাণিতিক মডেলিং (MATHEMATICAL MODELLING)

## A.2.1 ভূমিকা

বিগত কয়েক শতাব্দীর উন্নতির ফলস্বরূপ বিজ্ঞান, অর্থনীতি, ম্যানেজমেন্ট প্রভৃতি বিভিন্ন ক্ষেত্র থেকে উদ্ভুত বাস্তব জীবন সংক্রান্ত সমস্যাবলির সমাধানের জন্য গাণিতিক পদ্ধতির ব্যবহারের প্রয়োজনীয়তা দেখা দিয়েছে। এই সব বাস্তব জীবন সংক্রান্ত সমস্যাবলির সমাধানের জন্য গণিতের বহুল ব্যবহারের অন্যতম কারণ হচ্ছে ডিজিটাল কম্পিউটারের গণনা করার পদ্ধতি ও ক্ষমতার উন্নতি যার সাহায্যে বড়ো ও জটিল সমস্যা সহজেই সমাধান করা যায়। বাস্তব জীবনের সমস্যাবলিকে গাণিতিক ভাষায় অনুবাদের মাধ্যমে সমাধান করা হয়। এই অনুবাদের পদ্ধতিই হল গাণিতিক মডেলিং।

এখানে বিভিন্ন উদাহরণের সাহায্যে এই পদ্ধতিতে যুক্ত ধাপগুলোর সাথে তোমাদের পরিচয় করাব। প্রথমে গাণিতিক মডেলিং কী সে সম্পর্কে জানব এবং পরে এই পদ্ধতিতে ব্যবহৃত বিভিন্ন ধাপগুলো সম্পর্কে আলোচনা করব।

## A.2.2 প্রাথমিক ধারণা (Preliminaries)

বিশ্বকে বুঝতে একটি অপরিহার্য মাধ্যম হল গাণিতিক মডেলিং। প্রাচীন কালে চৈনিক, মিশরীয়, ভারতীয়, ব্যবিলনীয় এবং গ্রিকরা তাদের গাণিতিক জ্ঞানের মাধ্যমে জাগতিক ঘটনাগুলোর ব্যাখ্যা ও পূর্বাভাস জানাতেন। স্থপতি, কারিগর এবং কারুশিল্পীদের অধিকাংশ কাজই ছিল জ্যামিতিক নীতির উপর নির্ভরশীল।

ধরা যাক, একজন আমিন (ক্ষেত্রপরিমাপক) একটি কেল্লার উচ্চতা পরিমাপ করতে চায়। ফিতার-সাহায্যে এর উচ্চতা পরিমাপ করা যথেষ্ট কষ্টসাধ্য। তাই এর জন্য প্রয়োজন উচ্চতা পরিমাপের সঙ্গো সম্পর্কিত অন্য কারণগুলো বের করা।

ত্রিকোণমিতির জ্ঞানের সাহায্যে তিনি যদি কেল্লাটির শীর্ষের উন্নতিকোণ এবং এটিরপাদবিন্দু থেকে তিনি যেখানে দাড়িয়ে আছেন তার দূরত্ব জানতে পারেন তাহলে তিনি কেল্লাটির উচ্চতা পরিমাপ করতে পারবেন।

তাই এখন তার কাজ হল কেল্লাটির শীর্ষের উন্নতি কোণ এবং পাদবিন্দু থেকে তার অবস্থানের দূরত্ব পরিমাপ করা। এ দুটিই খুব সহজে পরিমাপযোগ্য। তাই যদি উন্নতিকোণ $40°$ এবং দূরত্ব 450 মিটার হয় তাহলে সমস্যাটি উদাহরণ-1 এ বর্ণিত উপায়ে সমাধান করা যাবে।

**উদাহরণ 1** ভূমিতে অবস্থিত O বিন্দু থেকে একটি কেল্লার শীর্ষের উন্নতিকোণ 40° এবং তার পাদবিন্দুর দূরত্ব 450 মিটার হলে কেল্লাটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

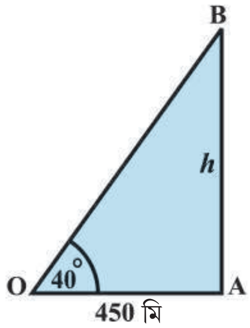
**সমাধান** আমরা বিভিন্ন ধাপে এর সমাধান করব।

**ধাপ 1** আমরা প্রথমে প্রকৃত সমস্যাটি অনুধাবন করব। এখানে একটি প্রদত্ত কেল্লার উচ্চতা পরিমাপ করতে হবে। ধরা যাক, উচ্চতা হল $h$। প্রদত্ত O বিন্দু থেকে কেল্লাটির পাদবিন্দুর দূরত্ব হল 450 মিটার। ধরা যাক দূরত্ব হল $d$, তাহলে $d = 450$ মিটার। আমরা জানি উন্নতি কোণ $\theta$ হল 40°।

প্রকৃত সমস্যাটি হল প্রদত্ত দূরত্ব $d$ ও উন্নতিকোণ $\theta$ এর সাহায্যে কেল্লাটির উচ্চতা $h$ নির্ণয় করতে হবে।

**ধাপ 2** সমস্যাটিতে তিনটি রাশি উল্লেখ করা হয়েছে যেমন উচ্চতা, দূরত্ব ও উন্নতিকোণ।

তাই এই তিনটি রাশির মধ্যে একটি সম্পর্ক আমাদের জানা প্রয়োজন। নিচে বর্ণিত উপায়ে জ্যামিতির সাহায্যে আমরা তা পেতে পারি (চিত্র 1)।



চিত্র 1

AB কেল্লাটিকে প্রকাশ করে। কেল্লাটির পাদবিন্দু থেকে O বিন্দুর অনুভূমিক দূরত্ব হল OA । ∠AOB হল উন্নতি কোণ। তাহলে,

$$\tan\theta = \frac{h}{d} \text{ বা } h = d\tan\theta \qquad \dots (1)$$

এটি হল $\theta$, $h$ ও $d$ এর মধ্যে সম্পর্কযুক্ত সমীকরণ।

**ধাপ 3** $h$ নির্ণয় করার জন্য আমরা সমীকরণ (1) - এর সমাধান করব। এক্ষেত্রে $\theta = 40°$ এবং $d = 450$ মিটার। তাহলে $h = \tan 40° \times 450 = 450 \times 0.839 = 377.6$ মিটার

**ধাপ 4** তাহলে আমরা পেলাম কেল্লাটির উচ্চতা প্রায় 378 মিটার। আমরা এখন দেখব কীভাবে বিভিন্ন ধাপগুলো সমস্যাটির সমাধানে ব্যবহার করা হল।

প্রথম ধাপে আমরা প্রকৃত সমস্যাটি অনুধাবন করলাম এবং জানলাম এর সঙ্গে তিনটি রাশি যুক্ত, যেমন উচ্চতা, দূরত্ব ও উন্নতি কোণ। অর্থাৎ, এই ধাপে প্রকৃত সমস্যাটি অনুধাবন করে তিনটি রাশি চিহ্নিত করলাম।

দ্বিতীয় ধাপে আমরা জ্যামিতির সাহায্য নিলাম এবং চিত্র-1 এ বর্ণিত উপায়ে সমস্যাটি প্রকাশ করলাম। তারপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে $h = d\tan\theta$ সম্পর্কটি পেলাম।

এই ধাপে আমরা সমস্যাটিকে একটি গাণিতিক রূপ দিলাম। অর্থাৎ একটি বাস্তব সমস্যার সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করলাম।

তৃতীয় ধাপে গাণিতিক সমস্যাটির সমাধান করে $h$=377.6 মিটার পেলাম। অর্থাৎ, আমরা *সমস্যাটির সমাধান পেলাম।* শেষ ধাপে সমস্যাটির সমাধানটিকে ব্যাখ্যা করা হল এবং বলা হল যে কেল্লাটির উচ্চতা প্রায় 378 মিটার। আমরা তাকে বলতে পারি, *বাস্তব জীবন সংক্রান্ত সমস্যার গাণিতিক সমাধানের ব্যাখ্যা*।

বাস্তবিক পক্ষে এই ধাপগুলো গণিতবিদ্‌রা বিভিন্ন বাস্তব জীবন সংক্রান্ত সমস্যার সমাধানে ব্যবহার করে থাকেন। "বিভিন্ন পরিস্থিতির সমাধানে কেন গণিত প্রয়োজন"—এই প্রশ্নটি আমরা বিবেচনা করব।

এখানে এমন কতগুলো উদাহরণ তুলে ধরা হল যেখানে বিভিন্ন পরিস্থিতি জানতে গণিত বিশেষভাবে ব্যবহৃত হয়।

1. মানবদেহ বা অন্য প্রাণীর দেহে অক্সিজেন ও অন্যান্য পুষ্টিকর পদার্থ চলাচলে সঠিক রক্তপ্রবাহ প্রয়োজন। রক্ত নালীতে কোনো বাধা বা এর বৈশিষ্টে কোনো পরিবর্তন দেখা দিলে রক্ত প্রবাহে পরিবর্তন দেখা দেয় এমনকি মৃত্যুও ঘটতে পারে। এখানে সমস্যাটি হল রক্তপ্রবাহ ও রক্তনালির বৈশিষ্ট্যের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা।

2. ক্রিকেটে থার্ড আম্পায়ার এল বি ডাব্লিউ নির্ণয়ের জন্য বলের প্রক্ষেপপথ দেখে থাকেন। তিনি ধরে নেন যে সেখানে ব্যাটস্‌ম্যান নেই। ব্যাটস্‌ম্যানের পায়ে এসে বলটি আঘাত করার পূর্ব পর্যন্ত বলটি যে পথ অতিক্রম করে তার উপর ভিত্তি করেই গাণিতিক সমীকরণ নির্ণয় করা হয়। এল বি ডাব্লিউ নির্ণয়ের জন্য এই মডেলটিই ব্যবহার করা হয়।

3. আবহাওয়াবিদ্যা বিভাগ আবহাওয়া সংক্রান্ত কোনো তথ্য দেওয়ার জন্য গাণিতিক মডেলের সাহায্য নেন। কিছু কিছু রাশি যেগুলো আবহাওয়া পরিবর্তনের জন্য দায়ী সেগুলো হল তাপমাত্রা, বায়ুচাপ, জলীয়বাষ্প, বায়ু-প্রবাহের গতি ইত্যাদি। এই রাশিগুলো পরিমাপের জন্য বিভিন্ন যন্ত্রের সাহায্য নেওয়া হয় যেমন তাপমাত্রা পরিমাপের জন্য থার্মোমিটার, বায়ুচাপ পরিমাপের জন্য ব্যারোমিটার, জলীয় বাষ্পের পরিমাপের জন্য হাইগ্রোমিটার এবং বায়ু প্রবাহের গতির পরিমাপের জন্য অ্যানিমোমিটার। দেশের বিভিন্ন প্রান্ত থেকে তথ্যগুলো নিয়ে কম্পিউটারের সাহায্যে এদের বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা করা হয়।

4. কৃষি বিভাগ ভারতবর্ষের বিভিন্ন উৎপাদিত শস্যগুলোর মধ্যে ধান উৎপাদনের পরিমাণ নির্ণয় করতে চায়। বিজ্ঞানীরা কিছু উৎপাদন ক্ষেত্র নির্দিষ্ট করে সেখান থেকে একর পিছু গড় উৎপাদন নির্ণয় করে রাশিবিজ্ঞানের কিছু পদ্ধতি ব্যবহার করে ধানের গড় উৎপাদন নির্ণয় করা হয়।

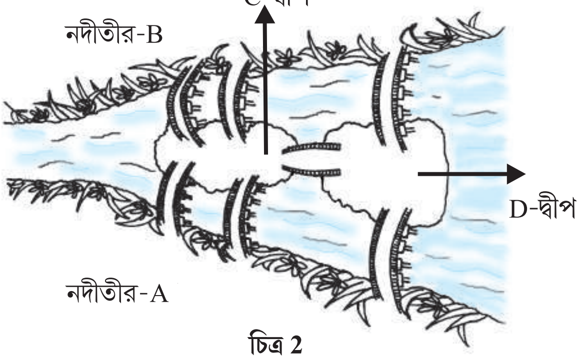
এ ধরনের সমস্যা সমাধানে গণিতবিদ্‌রা কীভাবে সাহায্য করতে পারেন? তারা সেই বিষয়ের বিশেষজ্ঞদের সঙ্গে বসতে পারেন যেমন প্রথম উদাহরণে উল্লেখিত বিষয়ের সমাধানের জন্য শারীরবিদ্‌দের সাহায্যে কোনো গাণিতিক প্রতিরূপ দেয়া যেতে পারে। এর মধ্যে একটি বা তার বেশি সমীকরণ বা অসমীকরণ থাকতে পারে যাকে বলা হয় **গাণিতিক মডেলিং**। তারপর মডেলটিকে সমাধান করে প্রকৃত সমস্যাটির সমাধান ও বিশ্লেষণ করা যেতে পারে। এই পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা করার পূর্বে গাণিতিক মডেলিং কী সেই

সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করব।

গাণিতিক মডেলিং কোনো ঘটনাকে প্রকাশ করে।

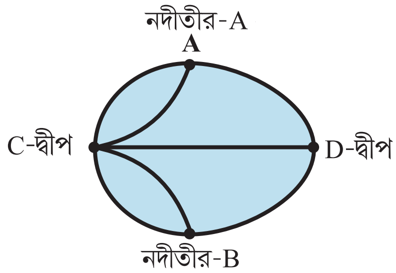
নীচের উদাহরণে একটি মজাদার জ্যামিতিক মডেল তুলে ধরা হল।

**উদাহরণ 2** (ব্রিজ সমস্যা) প্রেগেল নদীর ধারে কনিগস্‌বার্গ শহর যা অষ্টাদশ শতাব্দীতে জার্মান শহর হিসেবে থাকলেও বর্তমানে রাশিয়াতে অবস্থিত। নদীটিতে দুটি দ্বীপ দুই পাড়ের শহরের সঙ্গে সাতটি সেতুর সাহায্যে সংযুক্ত (চিত্র 2)।




**চিত্র 2**

প্রতিটি সেতুকে একবার ব্যবহার করে মানুষ শহরটি ঘুরে আসতে চেষ্টা করত। কিন্তু দেখা গেল এটি একটি কঠিন সমস্যা। সুইডেনের গণিতবিদ্ লিওনার্ড অয়লার সমস্যাটি সম্পর্কে অবহিত হলেন। 1736 সালে অয়লার প্রমাণ করলেন যে এভাবে হেঁটে আসা অসম্ভব। তিনি এটি প্রমাণ করার জন্য একধরনের চিত্র যাকে বলা হয় **নেটওয়ার্ক** তা আবিষ্কার করেন। এর মধ্যে ছিল শীর্ষবিন্দু (যেখানে রেখাগুলো মিলিত হয়) এবং বৃত্তচাপ (রেখা) (lines) (চিত্র 3)।

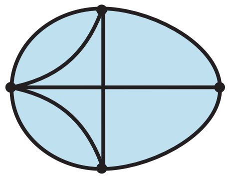



**চিত্র 3**

তিনি দুটি নদীর তীর ও দুটি দ্বীপের জন্য চারটি ডট (শীর্ষ বিন্দু) ব্যবহার করেন। এগুলোকে A, B এবং C, D দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। সাতটি রেখা (বৃত্তচাপ) হল সাতটি সেতু। তোমরা দেখতে পাচ্ছ 3টি সেতু (বৃত্তচাপ)নদীতীর A এর সঙ্গে যুক্ত এবং 3টি নদীতীর B এর সঙ্গে যুক্ত। 5টি সেতু (বৃত্তচাপ) দ্বীপ C এর সঙ্গে এবং তিনটি সেতু দ্বীপ D এর সঙ্গে যুক্ত। দেখা যাচ্ছে যে, প্রতিটি শীর্ষবিন্দুতে বিজোড় সংখ্যক বৃত্তচাপ হয়েছে, তাই তাদেরকে বলা হয় বিজোড় শীর্ষবিন্দু (একটি জোড় শীর্ষবিন্দুতে জোড় সংখ্যক বৃত্তচাপ যুক্ত থাকবে)।

মনে রাখতে হবে সমস্যাটি হল প্রতিটি সেতু একবার ব্যবহার করে শহরটিকে ঘুরে আসতে হবে। অয়লার এর নেটওয়ার্কে এটি হল প্রতিটি বৃত্তচাপ একবার ব্যবহার করে সবকটি শীর্ষবিন্দু ঘুরে আসা। অয়লার প্রমাণ করলেন যে এটি সম্ভব নয়। কারণ হিসেবে তিনি দেখলেন বিজোড় শীর্ষবিন্দুর জন্য তোমাকে যাত্রার শুরু বা শেষ ঐ শীর্ষবিন্দুতে করতে হবে (নিজে চিন্তা করো)। যেহেতু এক্ষেত্রে যাত্রার একটিই শুরু এবং একটিই সমাপ্তি তাই প্রতিটি বৃত্তচাপ স্পর্শ করতে হলে দুইটি মাত্র বিজোড় শীর্ষবিন্দু থাকতে হবে। যেহেতু এই সমস্যাটিতে চারটি বিজোড় শীর্ষবিন্দু রয়েছে তাই এটি অসম্ভব।

অয়লার এই প্রমাণটি করার পর কনিগস্‌বার্গের এই সেতুগুলোর নীচ দিয়ে অনেক জল গড়িয়ে গেছে। 1875 সালে নদীটির A ও B তীর দুটি যুক্ত করার জন্য একটি অতিরিক্ত সেতু তৈরি হয় (চিত্র 4)। প্রতিটি সেতু একবার ব্যবহার করে এখন কী কনিগস্‌বার্গ শহরটি ঘুরে আসা সম্ভব? এখনকার পরিস্থিতি চিত্র-4 এর মতো। নতুন সেতুটি যুক্ত হওয়ায় A ও B উভয়ই জোড় শীর্ষবিন্দুতে পরিণত হয়েছে। যদিও D এবং C এর ডিগ্রি বিজোড়। তাই এবার প্রতিটি সেতু একবার ব্যবহার করে কনিগস্‌বার্গ শহরটি ঘুরে আসা সম্ভব। এই নেটওয়ার্কের আবিস্কার একটি নতুন বিষয়ের জন্ম দেয় যাকে বলা হয় **গ্রাফ থিওরি**। এটি রেলের নেটওয়ার্কের পরিকল্পনা ও ম্যাপিং এর মত অন্যান্য অনেক দিকে ব্যবহৃত হয় (চিত্র-4)।



চিত্র 4

## A.2.3 গাণিতিক মডেলিং কী?

এখানে আমরা গাণিতিক মডেলকে সংজ্ঞায়িত করব এবং উদাহরণের সাহায্যে এর বিভিন্ন অবস্থাগুলো ব্যাখ্যা করব।

**সংজ্ঞা** বাস্তব জীবনের কোনো সমস্যাকে গাণিতিক রূপ প্রদানের একটি প্রচেষ্টা হল গাণিতিক মডেলিং। ***কিছু শর্ত সাপেক্ষে পাকৃতিক ঘটনা সমূহকে গণিতে রূপান্তরকেই বলে গাণিতিক মডেলিং। গাণিতিক মডেলিং মৌলিক বিজ্ঞান ব্যতিত চারুকলা থেকে নেওয়া শিক্ষা সম্পর্কিত একটি কৌশল ছাড়া কিছুই নয়।*** এখন এর সঙ্গে যুক্ত বিভিন্ন পদ্ধতিগলো সম্পর্কে আমরা জানব। চারটি ধাপ এই পদ্ধতিতে রয়েছে। উদাহরণ হিসেবে সরল দোলকের গতি সংক্রান্ত মডেলটিকে আমরা বিবেচনা করছি।

### সমস্যাটির উপলব্ধি :

এখানে সরল দোলকের গতির পদ্ধতিটি জানা প্রয়োজন। সরল দোলক আমাদের সবার পরিচিত। একটি দড়ি যার একপ্রান্তে একটি ভর আর অন্য প্রান্তটি একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে স্থির থাকলে এটি দোলক হিসেবে পরিগণিত হবে। আমরা জানি যে, সরল দোলকের গতি হল পর্যায়বৃত্ত। এর পর্যায় কাল নির্ভর করে দড়িটির দৈর্ঘ্য ও অভিকর্ষজ ত্বরণের উপর। এখন দোলন কাল নির্ণয় করা আমাদের প্রয়োজন। এর উপর ভিত্তি করে সমস্যাটির একটি বিবৃতি এভাবে দেওয়া যেতে পারে :

**বিবৃতি** একটি সরল দোলকের দোলন কাল আমরা কীভাবে নির্ণয় করতে পারি?

পরবর্তী ধাপটি হল সূত্রাকারে প্রকাশ করা।

**সূত্রাকারে ব্যক্তকরণ (Formulation)** এতে দুইটি প্রধান ধাপ রয়েছে।

**1. প্রয়োজনীয় কারণগুলোর সনাক্তকরণ (Identifying the relevant factors)** এই পর্যায়ে আমরা

সমস্যাটির সঙ্গে কী কী রাশি যুক্ত রয়েছে তা খুঁজে বের করব। যেমন এই দোলকের সমস্যাটির ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় রাশিগুলো হল, দোলনকাল (T), ভর ($m$), এবং দোলকের যে বিন্দু থেকে রাশিটি ঝুলানো হয়েছে সেই বিন্দু থেকে ভরটির কেন্দ্রের দৈর্ঘ্য ($l$) । এখানে দড়িটির দৈর্ঘ্যকে দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য হিসেবে এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ ($g$) কে ধ্রুবক ধরা হয়েছে।

তাই আমরা এই সমস্যাটির চারটি প্রচল রাশি চিহ্নিত করেছি। এখন আমাদের লক্ষ্য T নির্ণয় করা। এর জন্য আমাদের প্রয়োজন দোলন কালকে প্রভাবিত করে এমন সব প্রচল রাশির বিষয়ে জানা, যা কোনো সাধারণ পরীক্ষার মাধ্যমে তুলে ধরা যায়।

আমরা বিভিন্ন ভরের দুটি ধাতব বল দুটি সমান দৈর্ঘ্যের দড়ির সঙ্গে যুক্ত করে পরীক্ষাটি করি। আমরা দোলন কাল পরিমাপ করি। পর্যবেক্ষণ করি যে, ভরের তারতম্যের জন্য দোলনকালের তেমন কোনো উল্লেখযোগ্য পরিবর্তন হয় না। এবারে আমরা এই পরীক্ষাটিই দুটি সমান ভরের বল নিয়ে করি কিন্তু দড়ি দুটি বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের নেওয়া হল। দেখা গেল যে, দোলনকাল দোলকের দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভরশীল।

এর থেকে বোঝা গেল যে, দোলনকাল নির্ণয়ের জন্য ভর $m$ অপরিহার্য নয় যেখানে দৈর্ঘ্য $l$ একটি অপরিহার্য প্রচল রাশি।

পরবর্তী পর্যায়ে যাওয়ার আগে ***অপরিহার্য প্রচল*** খুজে বের করার পদ্ধতিটি খুবই প্রয়োজন।

**2. গাণিতিক বর্ণনা (Mathematical description)** চিহ্নিত প্রচলগুলোর সাহায্যে কোনো সমীকরণ বা অসমীকরণ অথবা কোনো জ্যামিতিক চিত্র খুজে বের করা এই পর্যায়ের সঙ্গে যুক্ত।

সরল দোলকের পরীক্ষাটির ক্ষেত্রে $l$ এর বিভিন্ন মানের জন্য T এর মান বের করা হয়েছে। এই মানগুলোর সাহায্যে একটি লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়েছে, যা একটি অধিবৃত্তকে প্রকাশ করে। এর থেকে T ও $l$ এর মধ্যের সম্পর্কটিকে প্রকাশ করা যায়।

$$\mathrm{T}^2 = kl \qquad \ldots (1)$$

দেখা যায় $k = \dfrac{4\pi^2}{g}$ ; তাহলে সমীকরণটি হল

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \ldots (2)$$

সমীকরণ (2)-ই হল সমস্যাটির গাণিতিক সূত্র।

**সমাধান নির্ণয় (Finding the solution)** গাণিতিক সূত্র থেকে খুব কমই সরাসরি উত্তর পাওয়া যায়। অধিকাংশ ক্ষেত্রেই প্রাপ্ত সমীকরণ-এর সমাধান করে অথবা কোনো উপপাদ্য প্রয়োগ করে সমাধান নির্ণয় করা হয়। সরল দেলকের এই সমস্যাটির সমাধান (2) নং সমীকরণের উপর নির্ভরশীল।

দুইটি ভিন্ন দোলকের দুইটি ভিন্ন দৈর্ঘ্যের জন্য দোলনকাল নীচের 1নং সারণিতে দেওয়া হল।

**সারণি 1**

| $l$ | 225 সেমি | 275 সেমি |
|---|---|---|
| T | 3.04 সেকেন্ড | 3.36 সেকেন্ড |

সারণি থেকে দেখা যায়, $l = 225$ সেমি এর জন্য T = 3.04 সেকেন্ডে এবং $l = 275$ সেমি এর জন্য T =3.6 3.36 সেকেন্ড।

## ব্যাখ্যা /যুক্তিগ্রাহ্যতা (Interpretation/Validation)

কোনো একটি বাস্তব জীবনের সমস্যার প্রয়োজনীয় বৈশিষ্ট্যসমূহ জানার প্রয়াসই হল গাণিতিক মডেলিং। অনেক সময় পরিস্থিতিকে কোনো আদর্শ প্রসঙ্গের সঙ্গে তুলনা করে কোনো আদর্শ সমীকরণ পাওয়া যায়। এটি তখনই কার্যকরী হয় যখন এর সাহায্যে আমরা সবকিছু ব্যাখ্যা করতে পারি। অন্যথা আমরা তা পরিত্যাগ করি অথবা এর উন্নতি সাধন করি এবং এরপর আবার তার পরীক্ষা করি। অন্যভাবে বলা যায়, ***কোনো বাস্তব সমস্যার জানা বিষয় সমূহের উপর ভিত্তি করে প্রাপ্ত গাণিতিক মডেলের ফলাফলের তুলনামূলক আলোচনার মাধ্যমে মডেলটির কার্যকারিতা পরিমাপ করতে পারি। এই পদ্ধতিটিই হল মডেলের যুক্তিগ্রাহ্যতা।*** সরল দোলকের ক্ষেত্রে আমরা কিছু কিছু পরীক্ষার সাহায্যে দোলনকাল বের করতে পারি। পরীক্ষাগুলোর ফলাফল সারণি-2 তে দেওয়া হল।

**সারণি 2**

চারটি বিভিন্ন দোলকের পরীক্ষা থেকে প্রাপ্ত দোলন কাল

| ভর (গ্রাম) | দৈর্ঘ্য (সেমি) | সময় (সেকেন্ড) |
|---|---|---|
| 385 | 275<br>225 | 3.371<br>3.056 |
| 230 | 275<br>225 | 3.352<br>3.042 |

এখন, আমরা সারণি-2 থেকে প্রাপ্ত মানগলোর সঙ্গে সারণি-1 এর মানগুলোর তুলনা করি।

পর্যবেক্ষিত মান ও গণনাকৃত মান -এর অন্তরফলই হল ত্রুটি।

যেমন, যখন $l = 275$ সেমি এবং ভর $m = 385$ গ্রাম,

$$\text{ত্রুটি} = 3.371 - 3.36 = 0.011$$

যা খুব ক্ষুদ্র এবং তাই মডেলটি গ্রহণযোগ্য।

একবার মডেলটি গ্রহণ করা হলে, আমাদেরকে মডেলটি ব্যাখ্যা করতে হবে। ***বাস্তব অবস্থার পরিপ্রেক্ষিতে সমাধানটি বর্ণনা করার পদ্ধতিকে বলা হয় মডেল-এর ব্যাখ্যাকরণ।*** এই ক্ষেত্রে আমরা নিম্নলিখিত উপায়ে সমাধানটি ব্যাখ্যা করতে পারি :

(a) দোলনকাল দোলকের দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সঙ্গে সরলভেদে থাকে।

(b) এটি অভিকর্ষজ ত্বরণের বর্গমূলের সঙ্গো ব্যাস্তভেদে থাকে।

এই মডেলটি সম্পর্কে আমাদের যুক্তিগ্রাহ্যতা এবং ব্যাখ্যা থেকে বোঝা যায় গাণিতিক মডেলিং হল ব্যবহারিক (বা পর্যবেক্ষিত) মান সমূহের সঙ্গো ঘনিষ্ট সম্বন্ধযুক্ত। কিন্তু আমরা দেখলাম যে, পর্যবেক্ষিত মান ও গণনাকৃত মানের মধ্যে সামান্য ত্রুটি রয়েছে। এর অন্যতম কারণ হল আমরা দড়ির ভর ও মাধ্যমের বাধাকে উপেক্ষা করেছি। সুতরাং এরকম পরিস্থিতিতে আমরা আরো ভালো মডেল আশা করতে পারি।

এ থেকে আমরা একটি গুরুত্বপূর্ণ পর্যবেক্ষণ করলাম। বাস্তব পৃথিবীকে উপলব্ধি করা ও তাকে বর্ণনা করা খুব কঠিন কাজ। আমরা শুধুমাত্র একটি বা দুইটি কারণ ঠিকঠাকভাবে বের করতে পারি যা পুরো পরিস্থিতিকে প্রভাবিত করে। তারপর ঘটনাটি সম্পর্কে তথ্য পাওয়া যায় এমন কোনো মডেল পাওয়ার চেস্টা করি। আমরা সাধারণ সব ঘটনা এই মডেল ব্যবহার করে আলোচনা করি আর আশা রাখি যাতে করে আরও ভালো মডেল তৈরি করা যায়।

এখন মডেলিং এর এই পদ্ধতিটির সারাংশ লিপিবদ্ধ করি।

(a) সূত্রাকারে ব্যক্তকরণ (b) সমাধান (c) ব্যাখ্যা বা যুক্তিগ্রাহ্যতা

পরবর্তী উদাহরণটিতে মডেলিং -এ কীভাবে অসমীকরণের সমাধানের জন্য লেখচিত্র ব্যবহার করা হয় তা দেখানো হয়েছে।

**উদাহারণ 3** একটি ফার্মহাউস প্রতিদিন 800 কেজি বিশিষ ধরনের খাদ্যশস্য সরবরাহ করে। দানাশস্য ও সয়াবিনের মিশ্রনে তৈরি এই বিশেষ প্রকারের খাদ্যের উপাদানগুলো নিম্নরূপ :

**সারণি 3**

| উপকরণ | প্রতিকেজিতে পুষ্টিকারক দ্রব্যের উপস্থিতি প্রোটিন | প্রতিকেজিতে পুষ্টিকারক দ্রব্যের উপস্থিতি ফাইবার | দাম প্রতি কেজিতে |
|---|---|---|---|
| দানা শস্য | .09 | .02 | 10 টাকা |
| সয়াবীন | .60 | .06 | 20 টাকা |

নিয়মানুযায়ী বিশেষ খাদ্যে থাকবে কমপক্ষে 30% প্রোটিন ও সর্বোচ্চ 5% ফাইবার। এই খাদ্যমিশ্রনের প্রতিদিনকার সর্বনিম্ন খরচ নির্ণয় করো।

**সমাধান ধাপ 1** দানাশস্য ও সয়াবিনের সাহয্যে তৈরি খাদ্যের প্রতিদিনকার সর্বনিম্ন দাম বের করাই এখানে উদ্দেশ্য। সুতরাং, যে সমস্ত চলরাশি ব্যবহার করা হয়েছে তারা হল—

$x$ = দানাশস্যের পরিমান

$y$ = সয়াবিনের পরিমান

$z$ = দাম

**ধাপ 2** সারণি-3 -এর শেষস্তম্ভ থেকে $z, x, y$ এর মধ্যে যে সম্পর্ক রয়েছে সেই সমীকরণটি হল—

$$z = 10x + 20y \quad \ldots (1)$$

নিম্নলিখিত বাধাগুলোর সাহায্যে $z$ কে ক্ষুদ্রতম আকারে প্রকাশ করতে হবে:

(a) দানাশস্য ও সয়াবিনের সাহায্যে তৈরি খাদ্যের পরিমাণ কমপক্ষে 800 কেজি।

অর্থাৎ, $x + y \geq 800$ ... (2)

(b) সারণি 3 এর প্রথম স্তম্ভে প্রদত্ত খাদ্যে প্রোটিনের পরিমাণ কমপক্ষে 30% হবে।

অর্থাৎ, $0.09x + 0.6y \geq 0.3\ (x + y)$ ... (3)

(c) সারণি-3 এর দ্বিতীয় স্তম্ভে প্রদত্ত খাদ্যে ফাইবার থাকবে সর্বোচ্চ 5% ।

অর্থাৎ, $0.02x + 0.06\ y \leq 0.05\ (x + y)$ ... (4)

$x$ ও $y$ এর সহগগুলোকে একসঙ্গো করে (2), (3), (4) কে সরল করা হল।

সমস্যাটিকে এখন নিম্নলিখিতভাবে গাণিতিক আকারে লেখা যায় ।

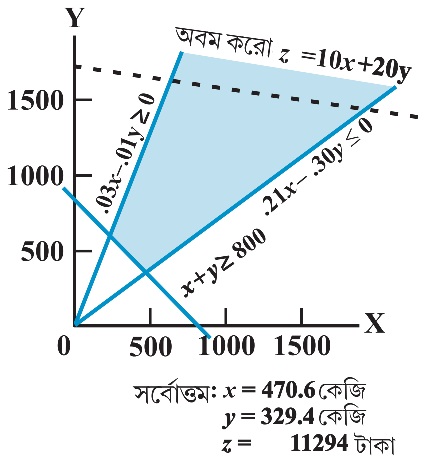
**বিবৃতি** $z$ কে অবম করো যখন বাধাগোষ্ঠী হয়—

$$x + y \geq 800$$
$$0.21x - .30y \leq 0$$
$$0.03x - .01y \geq 0$$

**ধাপ 3** এটিকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করা যায়। চিত্র 5 এর ছায়াবৃত অঞ্চলটিই হল প্রদত্ত অসমীকরণ গুলোর সম্ভাব্য সমাধান।

লেখচিত্র থেকে এটি পরিষ্কার যে, (470.6,329.4) বিন্দুতে অর্থাৎ, $x = 470.6$ এবং $y = 329.4$ -এ অবম মান রয়েছে।

এর থেকে $z$ এর যে মান পাওয়া যায় তা হল




চিত্র 5

$z = 10 \times 470.6 + 20 \times 329.4 = 11294$

এটি হল গাণিতিক সমাধান।

**ধাপ 4** সমাধানটিকে এভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে "দানাশস্য ও সয়াবিনের মিশ্রণে তৈরি বিশেষ প্রকার খাদ্যে পুষ্টির বিচারে যে পরিমাণ প্রোটিন ও ফাইবার রয়েছে তার দামের অবম মান হবে 11294 টাকা এবং যদি 470.6 কেজি দানাশস্য ও 329.4 কেজি সয়াবিন ব্যবহার করি তাহলে আমরা এই অবম মান পাই"।

পরবর্তী উদাহরণে আমরা কোনো নির্দিষ্ট সময়ে একটি দেশের জনসংখ্যা বিষয়ক মডেল নিয়ে আলোচনা করব।

**উদাহরণ 4** ধরা যাক, জনসংখ্যা নিয়ন্ত্রণ দপ্তর জানতে চায় কোনো দেশের লোক সংখ্যা 10 বছর পর কত হবে।

**ধাপ 1 সূত্রাকারে ব্যক্তকরণ** প্রথমেই লক্ষ করা যায় যে, সময়ের সঙ্গে জনসংখ্যার পরিবর্তন ঘটে এবং জন্মের কারণে এটি বাড়ে ও মৃত্যুর কারণে কমে। কোনো নির্দিষ্ট সময়ে আমরা জনসংখ্যা বের করতে চাই। ধরি $t$ সময়কে (বছরে) নির্দেশ করে। তাহলে $t$ এর মান হল 0, 1, 2, ......, $t=0$ হল বর্তমান সময়, $t=1$ হল পরবর্তী বছর ইত্যাদি। যেকোনো সময় $t$ এর জন্য, $p(t)$ কোনো একটি নির্দিষ্ট বছরের জনসংখ্যাকে নির্দেশ করে।

ধরা যাক, আমরা কোনো একটি বছরের যেমন $t_0 = 2006$ এর জনসংখ্যা নির্ণয় করতে চাই। আমরা কীভাবে করব। আমরা 1 জানুয়ারী, 2005 এর জনসংখ্যা বের করি।

ঐ বছরে যতজনের জন্ম হয়েছে তার সংখ্যা যোগ করি এবং যতজনের মৃত্যু হয়েছে তার সংখ্যা বিয়োগ করি। ধরি $\mathrm{B}(t)$ হল $t$ ও $t+1$ এর মধ্যবর্তী 1 বছরের জন্মের সংখ্যা এবং $\mathrm{D}(t)$ হল $t$ ও $t+1$ এর মধ্যবর্তী 1 বছরের মৃত্যুর সংখ্যা।

তাহলে আমরা যে সম্পর্কটি পাই, তা হল

$$\mathrm{P}(t+1) = \mathrm{P}(t) + \mathrm{B}(t) - \mathrm{D}(t)$$

এখন আমরা কয়েকটি অনুমান ও সংজ্ঞা ঠিক করি

1. $\dfrac{\mathrm{B}(t)}{\mathrm{P}(t)}$ কে বলা হয় $t$ ও $t+1$ সময়ের অন্তরালে *জন্মের হার*।

2. $\dfrac{\mathrm{D}(\mathrm{t})}{\mathrm{P}(\mathrm{t})}$ কে বলা হয় $t$ ও $t+1$ সময়ের অন্তরালে *মৃত্যুর হার*।

### অনুমানসমূহ

1. প্রতিটি অন্তরালে জন্মের হার সমান। একইভাবে প্রতিটি অন্তরালে মৃত্যুর হারও সমান। তার মানে একটি ধ্রুবক $b$ হল জন্মের হার এবং একটি ধ্রুবক $d$ হল মৃত্যুর হার, তাহলে প্রতিটি $t \geq 0$ এর জন্য

$$b = \frac{\mathrm{B}(t)}{\mathrm{P}(t)} \text{ এবং } d = \frac{\mathrm{D}(t)}{\mathrm{P}(t)} \qquad \dots (1)$$

2. অন্যকোনো উপায়ে জনসংখ্যার পরিবর্তন ঘটবে না অর্থাৎ জনসংখ্যা পরিবর্তনের একমাত্র কারণ হল জন্ম ও মৃত্যু।

ফলে (1) ও (2) নং অনুমান থেকে আমরা পাই, প্রতিটি $t \geq 0$, এর জন্য

$$P(t+1) = P(t) + B(t) - D(t)$$
$$= P(t) + bP(t) - dP(t)$$
$$= (1+b-d)\,P(t) \qquad \ldots (2)$$

(2) এ $t = 0$ বসিয়ে পাই,

$$P(1) = (1+b-d)P(0) \qquad \ldots (3)$$

(2) নং সমীকরণে $t = 1$ বসিয়ে পাই,

$$P(2) = (1+b-d)\,P(1)$$
$$= (1+b-d)(1+b-d)\,P(0) \quad \text{(সমীকরণ 3 ব্যবহার করে)}$$
$$= (1+b-d)^2\,P(0)$$

এইভাবে অগ্রসর হয়ে আমরা পাই,

$$P(t) = (1+b-d)^t\,P(0) \qquad \ldots (4)$$

$t = 0, 1, 2, \ldots$ এর জন্য।

$(1+b-d)$ ধ্রুবকটিকে প্রায়ই সংক্ষেপে $r$ দিয়ে প্রকাশ করা হয় এবং এটিকে বলা হয় *বৃদ্ধির হার* । এই মডেলটিকে প্রথম জনপ্রিয় করার সুবাদে রবার্ট মালথুস এর নামানুসারে এটিকে *মালথুসিয়ান প্রচল* বলা হয়।

(4) নং সমীকরণকে $r$ এর সাহায্যে লেখা যায়,

$$P(t) = P(0)r^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots (5)$$

$P(t)$ একটি সূচক *অপেক্ষকের* উদাহরণ।

$cr^t$ আকার বিশিষ্ট কোনো অপেক্ষককে, যেখানে $c$ ও $r$ ধ্রুবক, বলা হয় *সূচক অপেক্ষক*।

সমীকরণ (5) হল প্রদত্ত সমস্যার গাণিতিক সূত্রাকরণ।

**ধাপ 2 – সমাধান**

ধরা যাক বর্তমান জনসংখ্যা হল 250,000,000 এবং $b = 0.02$ ও $d = 0.01$

10 বছর পর জনসংখ্যা কত হবে? আমরা সূত্র ব্যবহার করে P(10) নির্ণয় করতে পারি।

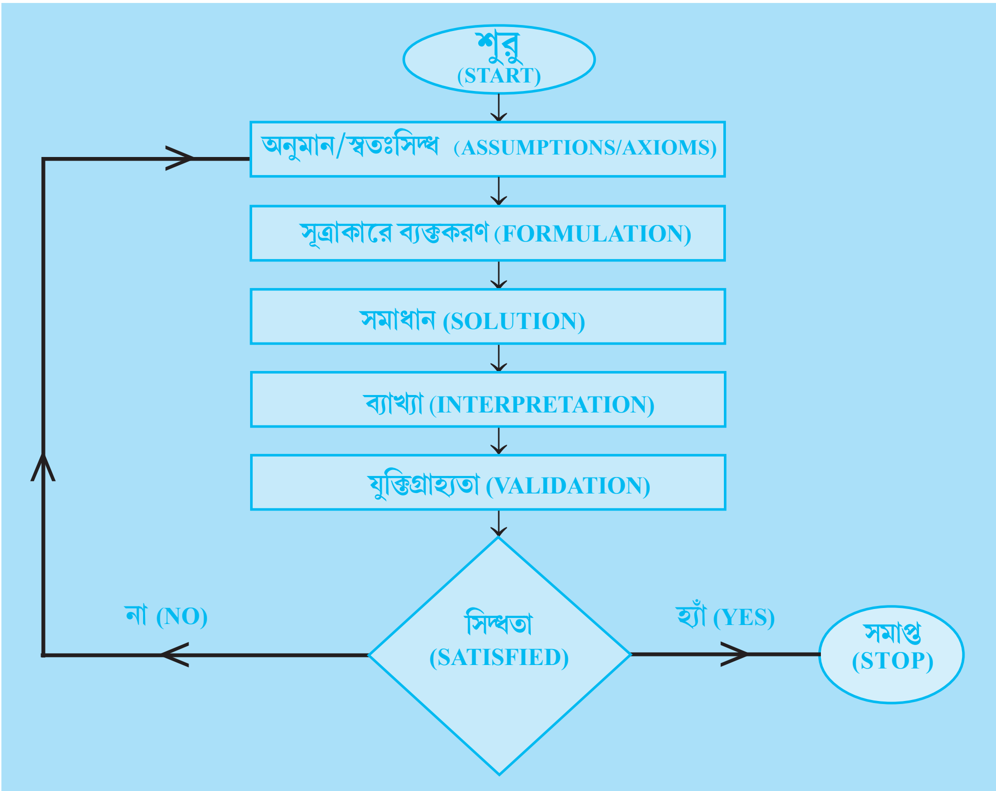
$$P(10) = (1.01)^{10}\,(250{,}000{,}000)$$
$$= (1.104622125)\,(250{,}000{,}000)$$
$$= 276{,}155{,}531.25$$

**ধাপ 3 ব্যাখ্যা ও যুক্তিগ্রাহ্যতা**

স্বাভাবিক ভাবেই এই উত্তরটি অসংগত কেননা লোকসংখ্যা 0.25 হতে পারে না। তাই আমরা কাছাকাছি একটি মান নেব যেমন লোকসংখ্যা হবে 276,155,531 (প্রায়)। এখানে আমরা প্রকৃত মান পাচ্ছি না কারণ কয়েকটি অনুমান সাপেক্ষে গাণিতিক মডেলটি তৈরি করা হয়েছে।

তাহলে উপরের উদাহরণগুলোর সাহায্যে দেখা যায় বিভিন্ন পরিস্থিতিতে কীভাবে বিভিন্ন গাণিতিক মডেল ব্যবহার করা হয়। যদিও অনুমান ও নিকটতম মানের সাপেক্ষে বাস্তব সমস্যার একটি সরলতম রূপ হল গাণিতিক মডেলিং।

স্বভাবতই সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন হল আমাদের ঠিক করতে হবে মডেলটি 'ভালো' না 'ভালো নয়' অর্থাৎ যখন ফলাফলটিকে বাস্তবের সঙ্গে মিলিয়ে দেখা হয় তখন স্থির করতে হবে এটি কতটা ন্যায়সঙ্গত। যদি মডেলটি প্রকৃত ফলাফল না দেয় তাহলে আমাদের প্রতিবন্ধকতাগুলো বের করতে হবে। হয়তো এর জন্য আমাদের নতুন সূত্রের সাহায্যে নিতে হবে, নতুনভাবে দক্ষতার সাথে গণিতের ব্যবহার করতে হবে এবং নতুনভাবে মূল্যায়ন করতে হবে। এভাবেই নিচের ফ্লো-চার্টে বর্ণিত উপায়ে গাণিতিক মডেলকে প্রকাশ করা যায়।



# উত্তরমালা

## অনুশীলনী 1.1

**1.** (i), (iv), (v), (vi), (vii) এবং (viii) হল সেটসমূহ।

**2.** (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\in$ (v) $\in$ (vi) $\notin$

**3.** (i) A = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 } (ii) B = {1, 2, 3, 4, 5}
(iii) C = {17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80} (iv) D = {2, 3, 5}
(v) E = {T, R, I, G, O, N, M, E, Y} (vi) F = {B, E, T, R}

**4.** (i) $\{ x : x = 3n, n \in \mathrm{N}$ এবং $1 \le n \le 4 \}$ (ii) $\{ x : x = 2^n, n \in \mathrm{N}$ এবং $1 \le n \le 5 \}$
(iii) $\{ x : x = 5^n, n \in \mathrm{N}$ এবং $1 \le n \le 4 \}$ (iv) $\{ x : x$ হল একটি যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$
(v) $\{ x : x = n^2, n \in \mathrm{N}$ এবং $1 \le n \le 10 \}$

**5.** (i) A = {1, 3, 5, . . . } (ii) B = {0, 1, 2, 3, 4 }
(iii) C = { –2, –1, 0, 1, 2 } (iv) D = { L, O, Y, A }
(v) E = { ফেব্রুয়ারি, এপ্রিল, জুন, সেপ্টেম্বর, নভেম্বর }
(vi) F = $\{b, c, d, f, g, h, j \}$

**6.** (i) $\leftrightarrow$ (c) (ii) $\leftrightarrow$ (a) (iii) $\leftrightarrow$ (d) (iv) $\leftrightarrow$ (b)

## অনুশীলনী 1.2

**1.** (i), (iii), (iv)

**2.** (i) সসীম (ii) অসীম (iii) সসীম (iv) অসীম (v) সসীম

**3.** (i) অসীম (ii) সসীম (iii) অসীম (iv) সসীম (v) অসীম

**4.** (i) হ্যাঁ (ii) না (iii) হ্যাঁ (iv) না

**5.** (i) না (ii) হ্যাঁ **6.** B= D, E = G

## অনুশীলনী 1.3

**1.** (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\subset$ (iv) $\not\subset$ (v) $\not\subset$ (vi) $\subset$
(vii) $\subset$

**2.** (i) মিথ্যা (ii) সত্য (iii) মিথ্যা (iv) সত্য (v) মিথ্যা (vi) সত্য

**3.** (i), (v), (vii), (viii), (ix), (xi)

**4.** (i) $\phi, \{ a \}$ (ii) $\phi, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \}$
(iii) $\phi, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 1, 3 \}, \{ 2, 3 \}, \{ 1, 2, 3 \}$ (iv) $\phi$

**5.** 1

**6.** (i) $(-4, 6]$ (ii) $(-12, -10)$ (iii) $[0, 7)$
(iv) $[3, 4]$

**7.** (i) $\{ x : x \in \mathbf{R}, -3 < x < 0 \}$ (ii) $\{ x : x \in \mathbf{R}, 6 \le x \le 12 \}$
(iii) $\{ x : x \in \mathbf{R}, 6 < x \le 12 \}$ (iv) $\{ x \in \mathbf{R} : -23 \le x < 5 \}$ **9.** (iii)

## অনুশীলনী 1.4

**1.** (i) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 5\}$ (ii) $A \cup B = \{a, b, c, e, i, o, u\}$

(iii) $A \cup B = \{x : x = 1, 2, 4, 5$ অথবা 3 এর গুণিতক$\}$

(iv) $A \cup B = \{x : 1 < x < 10, x \in N\}$ (v) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

**2.** হ্যাঁ, $A \cup B = \{a, b, c\}$ **3.** B

**4.** (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (iii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(iv) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(vi) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (vii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

**5.** (i) $X \cap Y = \{1, 3\}$ (ii) $A \cap B = \{a\}$ (iii) $\{3\}$ (iv) $\phi$ (v) $\phi$

**6.** (i) $\{7, 9, 11\}$ (ii) $\{11, 13\}$ (iii) $\phi$ (iv) $\{11\}$

(v) $\phi$ (vi) $\{7, 9, 11\}$ (vii) $\phi$

(viii) $\{7, 9, 11\}$ (ix) $\{7, 9, 11\}$ (x) $\{7, 9, 11, 15\}$

**7.** (i) B (ii) C (iii) D (iv) $\phi$

(v) $\{2\}$ (vi) $\{x : x$ হল একটি অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যা$\}$

**8.** (iii)

**9.** (i) $\{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$ (ii) $\{3, 9, 15, 18, 21\}$ (iii) $\{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$

(iv) $\{4, 8, 16, 20)$ (v) $\{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$ (vi) $\{5, 10, 20\}$

(vii) $\{20\}$ (viii) $\{4, 8, 12, 16\}$ (ix) $\{2, 6, 10, 14\}$

(x) $\{5, 10, 15\}$ (xi) $\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\}$ (xii) $\{5, 15, 20\}$

**10.** (i) $\{a, c\}$ (ii) $\{f, g\}$ (iii) $\{b, d\}$

**11.** অমুলদ সংখ্যার সেট। **12.** (i) মিথ্যা (ii) মিথ্যা (iii) সত্য (iv) সত্য

## অনুশীলনী 1.5

**1.** (i) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ (ii) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (iii) $\{7, 8, 9\}$

(iv) $\{5, 7, 9\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4\}$ (vi) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

**2.** (i) $\{d, e, f, g, h\}$ (ii) $\{a, b, c, h\}$ (iii) $\{b, d, f, h\}$

(iv) $\{b, c, d, e)$

**3.** (i) $\{x : x$ হল একটি অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$

(ii) $\{x : x$ হল একটি যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$

(iii) $\{x : x \in \mathbf{N}$ এবং $x$, 3 এর গুণিতক নয়$\}$

(iv) $\{x : x$ হল একটি ধনাত্মক যৌগিক সংখ্যা অথবা $x = 1]$

(v) $\{x : x$ হল একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, যা 3 অথবা 5 দ্বারা বিভাজ্য নয়$\}$
(vi) $\{x : x \in \mathbf{N}$ এবং $x$ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়$\}$
(vii) $\{x : x \in \mathbf{N}$ এবং $x$ একটি পূর্ণঘন সংখ্যা নয়$\}$
(viii) $\{x : x \in \mathbf{N}$ এবং $x \neq 3\}$ (ix) $\{x : x \in \mathbf{N}$ এবং $x \neq 2\}$
(x) $\{x : x \in \mathbf{N}$ এবং $x < 7\}$ (xi) $\{x : x \in \mathbf{N}$ এবং $x \leq \frac{9}{2}\}$

6. $A'$ হল সব সমবাহু ত্রিভুজের সেট।
7. (i) U (ii) A (iii) $\phi$ (iv) $\phi$

## অনুশীলনী 1.6

1. 2 2. 5 3. 50 4. 42
5. 30 6. 19 7. 25, 35 8. 60

## *অধ্যায় 1 এর বিবিধ অনুশীলনী*

1. $A \subset B,\ A \subset C,\ B \subset C,\ D \subset A,\ D \subset B,\ D \subset C$
2. (i) মিথ্যা (ii) মিথ্যা (iii) সত্য (iv) মিথ্যা (v) মিথ্যা
(vi) সত্য
7. মিথ্যা 12. আমরা ধরে নিতে পারি, $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{2, 3\}$
13. 325 14. 125 15. (i) 52, (ii) 30 16. 11

## অনুশীলনী 2.1

1. $x = 2$ এবং $y = 1$ 2. $A \times B$ -তে পদ সংখ্যা হল 9।
3. $G \times H = \{(7, 5), (7, 4), (7, 2), (8, 5), (8, 4), (8, 2)\}$
$H \times G = \{(5, 7), (5, 8), (4, 7), (4, 8), (2, 7), (2, 8)\}$
4. (i) মিথ্যা
$P \times Q = \{(m, n), (m, m), (n, n), (n, m)\}$
(ii) সত্য
(iii) সত্য
5. $A \times A = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$
$A \times A \times A = \{(-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1)\}$
6. $A = \{a, b\}, B = \{x, y\}$
8. $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$
$A \times B$ -তে উপসেট থাকবে $2^4 = 16$ টি।
9. $A = \{x, y, z\}$ এবং $B = \{1,2\}$

**10.** $A = \{-1, 0, 1\}$, $A \times A$ -এর বাকি পদগুলো হল—
$(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (1, 1)$

## অনুশীলনী 2.2

**1.** $R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$
R এর ক্ষেত্র $= \{1, 2, 3, 4\}$
R এর প্রসার $= \{3, 6, 9, 12\}$
R এর উপক্ষেত্র $= \{1, 2, ..., 14\}$

**2.** $R = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$
R এর ক্ষেত্র $= \{1, 2, 3\}$
R এর প্রসার $= \{6, 7, 8\}$

**3.** $R = \{(1, 4), (1, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)\}$

**4.** (i) $R = \{(x, y) : y = x - 2,$ যেখানে $x = 5, 6, 7\}$
(ii) $R = \{(5,3), (6,4), (7,5)\}$। R এর ক্ষেত্র $= \{5, 6, 7\}$, R এর প্রসার $= \{3, 4, 5\}$

**5.** (i) $R = \{(1, 1), (1,2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2\ 4), (2, 6), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (3, 3), (3, 6)\}$
(ii) R এর ক্ষেত্র $= \{1, 2, 3, 4, 6\}$
(iii) R এর প্রসার $= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

**6.** R এর ক্ষেত্র $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5,\}$
R এর প্রসার $= \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

**7.** $R = \{(2, 8), (3, 27), (5, 125), (7, 343)\}$

**8.** A থেকে B এর সম্বন্ধের সংখ্যা $= 2^6$

**9.** R এর ক্ষেত্র $= \mathbf{Z}$
R এর প্রসার $= \mathbf{Z}$

## অনুশীলনী 2.3

**1.** (i) হ্যাঁ, ক্ষেত্র $= \{ 2, 5, 8, 11, 14, 17 \}$, প্রসার $= \{ 1 \}$
(ii) হ্যাঁ, ক্ষেত্র $= \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \}$, প্রসার $= \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$
(iii) না।

**2.** (i) ক্ষেত্র $= \mathbf{R}$, প্রসার $= (-\infty, 0]$
(ii) অপেক্ষকের ক্ষেত্র $= \{x : -3 \le x \le 3\}$
অপেক্ষকের প্রসার $= \{x : 0 \le x \le 3\}$

**3.** (i) $f(0) = -5$ (ii) $f(7) = 9$ (iii) $f(-3) = -11$

**4.** (i) $t(0) = 32$ (ii) $t(28) = \frac{412}{5}$ (iii) $t(-10) = 14$ (iv) 100

**5.** (i) প্রসার $= (-\infty, 2)$ (ii) প্রসার $= [2, \infty)$ (iii) প্রসার $= \mathbf{R}$

## অধ্যায় 2 এর বিবিধ অনুশীলনী

**2.** 2.1 **3.** অপেক্ষকের ক্ষেত্র হল 6 এবং 2 ব্যতীত বাস্তব সংখ্যার সেট।

**4.** ক্ষেত্র $= [1, \infty)$, প্রসার $= [0, \infty)$

**5.** ক্ষেত্র $= \mathbf{R}$, প্রসার $=$ অ-ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা

**6.** প্রসার = যেকোনো ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা $x$, যেখানে $0 \le y <$ ।

**7.** $(f+g)\,x = 3x - 2$ **8.** $a = 2, b = -1$ **9.** (i) না (ii) না (iii) না

$(f-g)\,x = -x + 4$

$$\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{x+1}{2x-3},\quad x \ne \frac{3}{2}$$

**10.** (i) হ্যাঁ, (ii) না **11.** না **12.** $f$ এর প্রসার $= \{3, 5, 11, 13\}$

## অনুশীলনী 3.1

**1.** (i) $\frac{5\pi}{36}$ (ii) $-\frac{19\pi}{72}$ (iii) $\frac{4\pi}{3}$ (iv) $\frac{26\pi}{9}$

**2.** (i) $39° 22' 30''$ (ii) $-229° 5' 29''$ (iii) $300°$ (iv) $210°$

**3.** $12\pi$ **4.** $12° 36'$ **5.** $\frac{20\pi}{3}$ **6.** $5 : 4$

**7.** (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{7}{25}$

## অনুশীলনী 3.2

**1.** $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{cosec} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \sec x = -2, \tan x = \sqrt{3}, \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**2.** $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{3}, \cos x = -\frac{4}{5}, \sec x = -\frac{5}{4}, \tan x = -\frac{3}{4}, \cot x = -\frac{4}{3}$

**3.** $\sin x = -\frac{4}{5}, \operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}, \cos x = -\frac{3}{5}, \sec x = -\frac{5}{3}, \tan x = \frac{4}{3}$

**4.** $\sin x = -\frac{12}{13}, \operatorname{cosec} x = -\frac{13}{12}, \cos x = \frac{5}{13}, \tan x = -\frac{12}{5}, \cot x = -\frac{5}{12}$

**5.** $\sin x = \frac{5}{13}, \operatorname{cosec} x = \frac{13}{5}, \cos x = -\frac{12}{13}, \sec x = -\frac{13}{12}, \cot x = -\frac{12}{5}$

**6.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **7.** 2 **8.** $\sqrt{3}$ **9.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **10.** 1

## অনুশীলনী 3.3

**5.** (i) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $2-\sqrt{3}$

## অনুশীলনী 3.4

**1.** $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

**2.** $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

**3.** $\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

**4.** $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

**5.** $x = \frac{n\pi}{3}$ বা $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$

**6.** $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$, বা $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

**7.** $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$, বা $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$

**8.** $x = \frac{n\pi}{2}$, বা $\frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, n \in \mathbf{Z}$

**9.** $x = \frac{n\pi}{3}$, বা $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

## *অধ্যায় 3 এর বিবিধ অনুশীলনী*

**8.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 2$

**9.** $\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2}$

**10.** $\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}, \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, 4+\sqrt{15}$

## অনুশীলনী 5.1

**1.** 3 **2.** 0 **3.** $i$ **4.** $14+28\,i$

**5.** $2-7\,i$ **6.** $-\frac{19}{5}-\frac{21i}{10}$ **7.** $\frac{17}{3}+i\frac{5}{3}$ **8.** $-4$

**9.** $-\frac{242}{27}-26i$ **10.** $\frac{-22}{3}-i\frac{107}{27}$ **11.** $\frac{4}{25}+i\frac{3}{25}$ **12.** $\frac{\sqrt{5}}{14}-i\frac{3}{14}$

**13.** $i$ **14.** $\frac{-7\sqrt{2}}{2}\,i$

## অনুশীলনী 5.2

**1.** $2, \frac{-2\pi}{3}$ **2.** $2, \frac{5\pi}{6}$ **3.** $\sqrt{2}\left(cos\frac{-\pi}{4}+i\,sin\frac{-\pi}{4}\right)$

**4.** $\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$ **5.** $\sqrt{2}\left(cos\frac{-3\pi}{4}+i\,sin\frac{-3\pi}{4}\right)$

**6.** $3\,(\cos\pi+i\sin\pi)$ **7.** $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ **8.** $cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}$

## অনুশীলনী 5.3

**1.** $\pm\sqrt{3}\,i$ **2.** $\frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{4}$ **3.** $\frac{-3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$ **4.** $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{-2}$

**5.** $\frac{-3\pm\sqrt{11}\,i}{2}$ **6.** $\frac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$ **7.** $\frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}$ **8.** $\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{34}\,i}{2\sqrt{3}}$

**9.** $\frac{-1\pm\sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)}\,i}{2}$ **10.** $\frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}$

## অধ্যায় 5 এর বিবিধ অনুশীলনী

**1.** $2-2i$ **3.** $\dfrac{307+599i}{442}$

**5.** (i) $\sqrt{2}\left(cos\dfrac{3\pi}{4}+i\, sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, (ii) $\sqrt{2}\left(cos\dfrac{3\pi}{4}+i\, sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

**6.** $\dfrac{2}{3}\pm\dfrac{4}{3}i$ **7.** $1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ **8.** $\dfrac{5}{27}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{27}i$ **9.** $\dfrac{2}{3}\pm\dfrac{\sqrt{14}}{21}i$

**10.** $\sqrt{2}$ **12.** $(i)\dfrac{-2}{5}, (ii)\, 0$ **13.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{3\pi}{4}$ **14.** $x = 3, y = -3$

**15.** 2 **17.** 1 **18.** 0 **20.** 4

## অনুশীলনী 6.1

**1.** (i) $\{1, 2, 3, 4\}$ (ii) $\{... -3, -2, -1, 0, 1,2,3,4\}$

**2.** (i) কোনো সমাধান নেই। (ii) $\{... -4, -3\}$

**3.** (i) $\{... -2, -1, 0, 1\}$ (ii) $(-\infty, 2)$

**4.** (i) $\{-1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ (ii) $(-2, \infty)$

**5.** $(-4, \infty)$ **6.** $(-\infty, -3)$ **7.** $(-\infty, -3]$ **8.** $(-\infty, 4]$

**9.** $(-\infty, 6)$ **10.** $(-\infty, -6)$ **11.** $(-\infty, 2]$ **12.** $(-\infty, 120]$

**13.** $(4, \infty)$ **14.** $(-\infty, 2]$ **15.** $(4, \infty)$ **16.** $(-\infty, 2]$

**17.** $x < 3$, 

**18.** $x \geq -1$, 


**19.** $x > -1$, 

**20.** $x \geq -\dfrac{2}{7}$, 

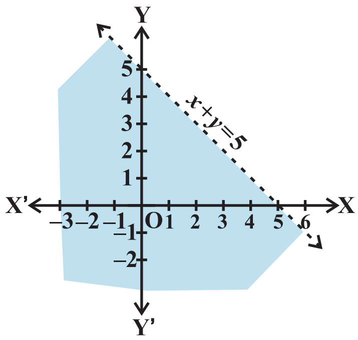

**21.** 35 এর বৃহত্তর অথবা সমান **22.** 82 এর বৃহত্তর অথবা সমান

**23.** (5,7), (7,9) **24.** (6,8), (8,10), (10,12)

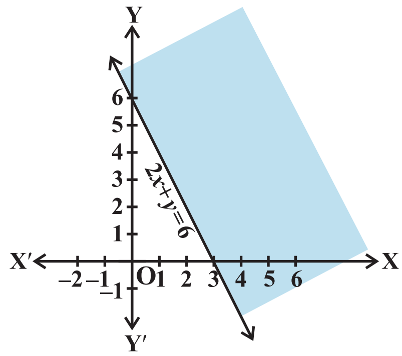
**25.** 9 সেমি **26.** 8 এর বৃহত্তর অথবা সমান কিন্তু 22 এর ক্ষুদ্রতর অথবা সমান।

## অনুশীলনী 6.2

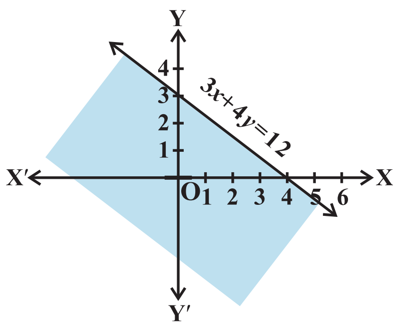
**1.**



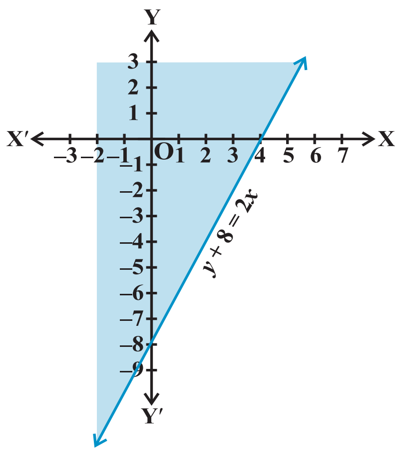

**2.**



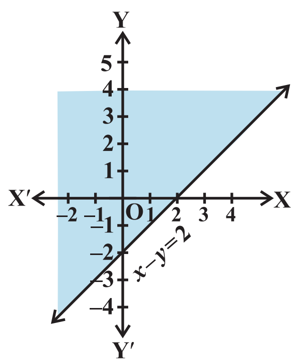

**3.**



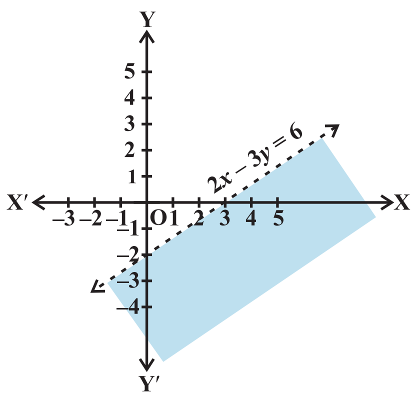

**4.**



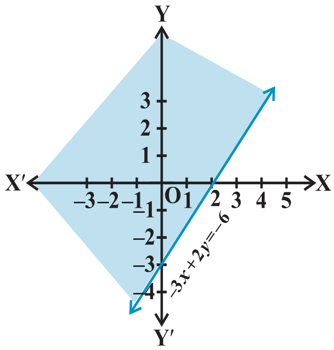

**5.**



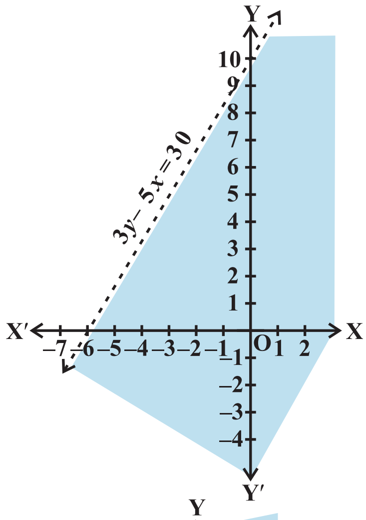

**6.**



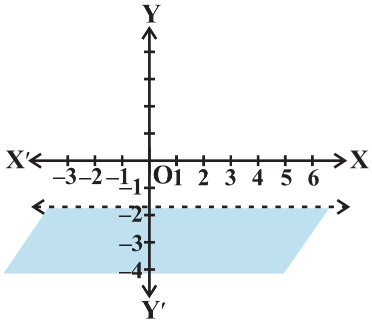
**7.**



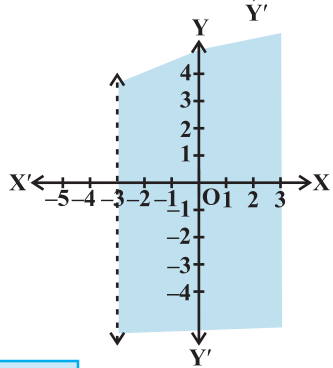

**8.**




**9.**

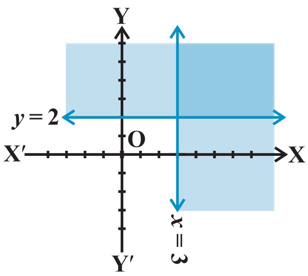


**10.**

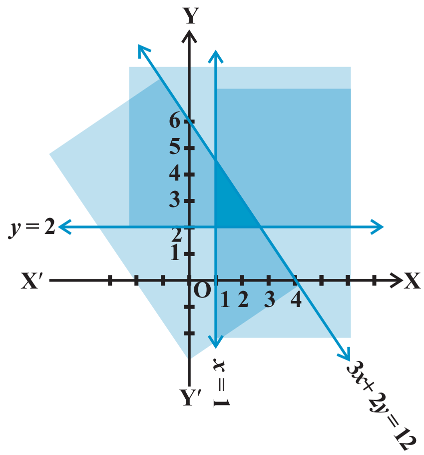


## অনুশীলনী 6.3

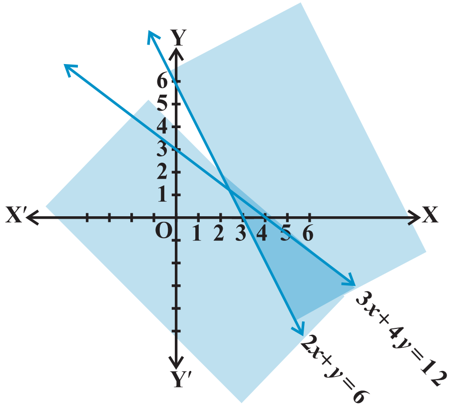
**1.**



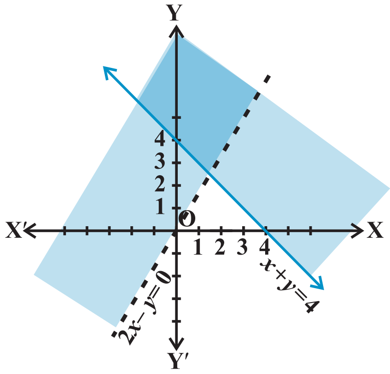

**2.**



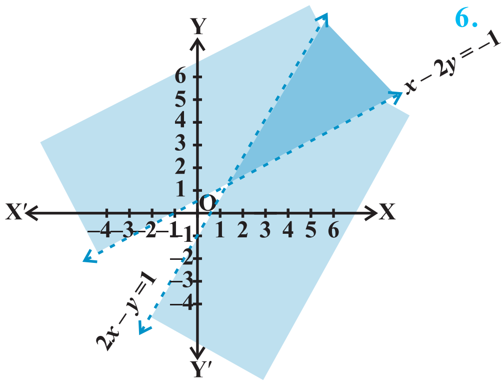
**3.**



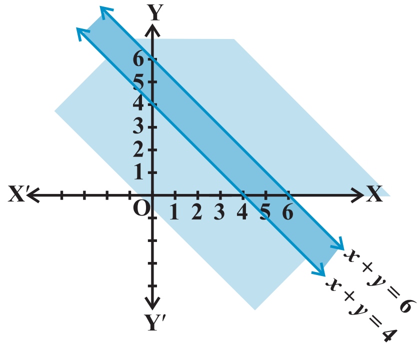

**4.**



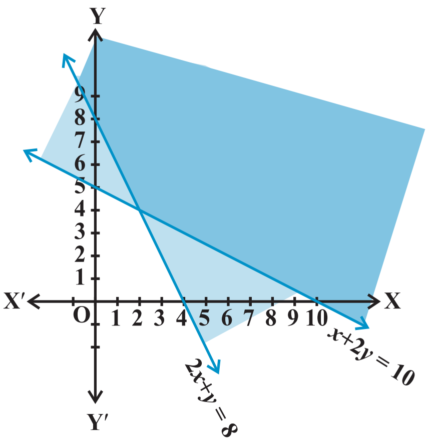

**5.**



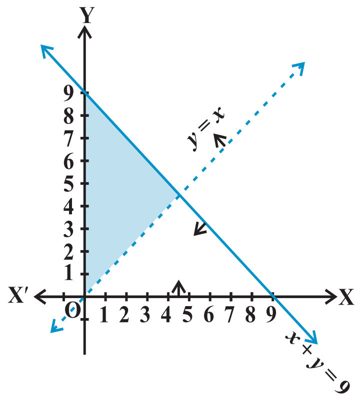

**6.**



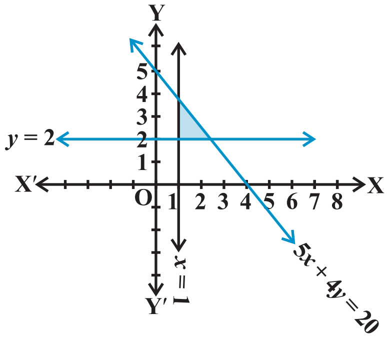

**7.**



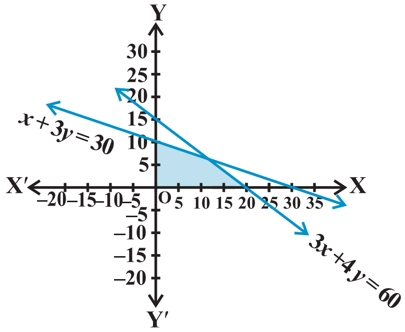

**8.**



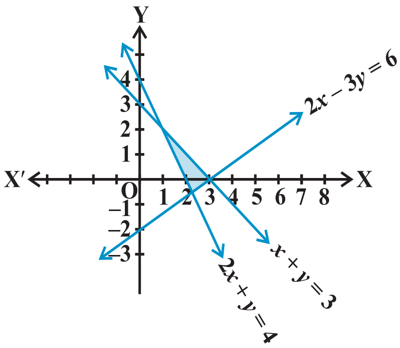
9.



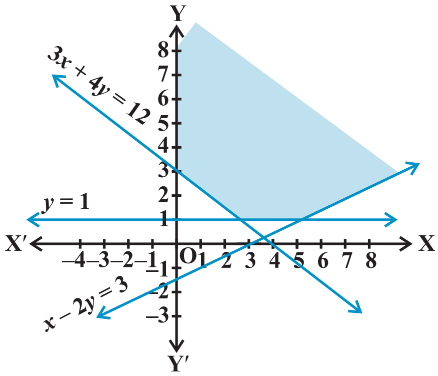

10.



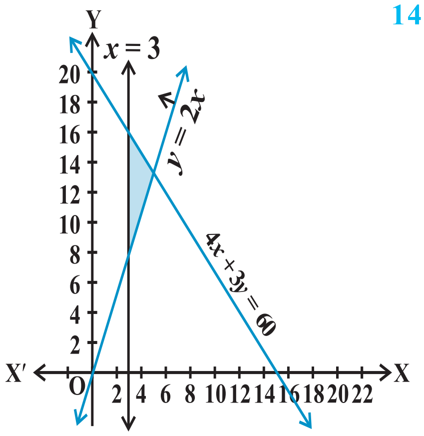

11.



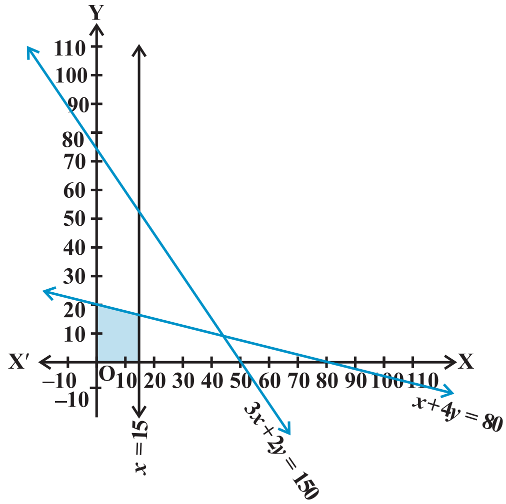

12.



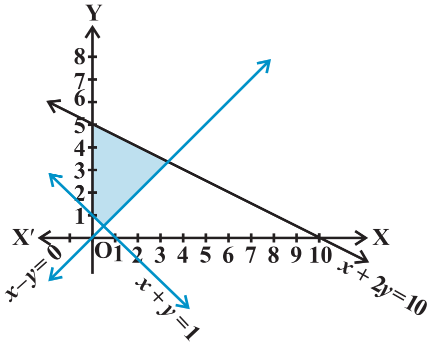

13.




14.



**15.**




## *অধ্যায় 6 এর বিবিধ অনুশীলনী*

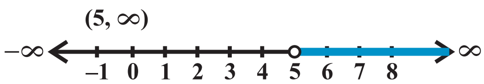
**1.** [2, 3] **2.** (0, 1] **3.** [– 4, 2]

**4.** (– 23, 2] **5.** $\left(\frac{-80}{3}, \frac{-10}{3}\right]$ **6.** $\left[1, \frac{11}{3}\right]$

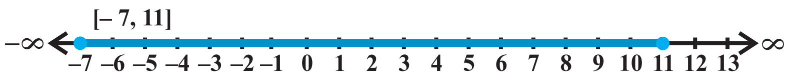
**7.** (–5, 5)


**8.** (–1, 7)


**9.** (5, ∞)




**10.** [– 7, 11]




**11.** 20°C এবং 25°C এর মধ্যে

**12.** 320 লিটারের বেশি কিন্তু 1280 লিটারের কম।

**13.** 562.5 লিটারের বেশি কিন্তু 900 লিটারের কম।

**14.** $9.6 \le MA \le 16.8$

## অনুশীলনী 7.1

**1.** (i) 125, (ii) 60 **2.** 108 **3.** 5040 **4.** 336

**5.** 8 **6.** 20

## অনুশীলনী 7.2

1. (i) 40320, (ii) 18
2. 30, না
3. 28
4. 64
5. (i) 30, (ii) 15120

## অনুশীলনী 7.3

1. 504
2. 4536
3. 60
4. 120, 48
5. 56
6. 9
7. (i) 3, (ii) 4
8. 40320
9. (i) 360, (ii) 720, (iii) 240
10. 33810
11. (i) 1814400, (ii) 2419200, (iii) 25401600

## অনুশীলনী 7.4

1. 45
2. (i) 5, (ii) 6
3. 210
4. 40
5. 2000
6. 778320
7. 3960
8. 200
9. 35

## *অধ্যায় 7 এর বিবিধ অনুশীলনী*

1. 3600
2. 1440
3. (i) 504, (ii) 588, (iii) 1632
4. 907200
5. 120
6. 50400
7. 420
8. ${}^{4}C_{1} \times {}^{48}C_{4}$
9. 2880
10. ${}^{22}C_{7} + {}^{22}C_{10}$
11. 151200

## অনুশীলনী 8.1

1. $1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$
2. $\dfrac{32}{x^5} - \dfrac{40}{x^3} + \dfrac{20}{x} - 5x + \dfrac{5}{8}x^3 - \dfrac{x^5}{32}$
3. $64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x + 729$
4. $\dfrac{x^5}{243} + \dfrac{5x^3}{81} + \dfrac{10}{27}x + \dfrac{10}{9x} + \dfrac{5}{3x^3} + \dfrac{1}{x^5}$
5. $x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \dfrac{15}{x^2} + \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{1}{x^6}$
6. 884736
7. 11040808032
8. 104060401
9. 9509900499
10. $(1.1)^{10000} > 1000$
11. $8(a^3b + ab^3)$; $40\sqrt{6}$
12. $2(x^6 + 15x^4 + 15x^2 + 1)$, 198

## অনুশীলনী 8.2

1. 1512
2. – 101376
3. $(-1)^r \, {}^6C_r . x^{12-2r} . y^r$
4. $(-1)^r \, {}^{12}C_r . x^{24-r} . y^r$
5. – 1760 $x^9y^3$
6. 18564
7. $\frac{-105}{8}x^9; \frac{35}{48}x^{12}$
8. 61236 $x^5y^5$
10. $n = 7; r = 3$
12. $m = 4$

## অধ্যায় 8-এর বিবিধ অনুশীলনী

1. $a = 3; b = 5; n = 6$
2. $a = \frac{9}{7}$
3. 171
5. $396\sqrt{6}$
6. $2a^8 + 12a^6 - 10a^4 - 4a^2 + 2$
7. 0.9510
8. $n = 10$
9. $\frac{16}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{32}{x^3}+\frac{16}{x^4}-4x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{16}-5$
10. $27x^6 - 54ax^5 + 117a^2x^4 - 116a^3x^3 + 117a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6$

## অনুশীলনী 9.1

1. 3, 8, 15, 24, 35
2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$
3. 2, 4, 8, 16 এবং 32
4. $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ এবং $\frac{7}{6}$
5. 25, –125, 625, –3125, 15625
6. $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{21}{2}, 21$ এবং $\frac{75}{2}$
7. 65, 93
8. $\frac{49}{128}$
9. 729
10. $\frac{360}{23}$
11. 3, 11, 35, 107, 323; 3 + 11 + 35 + 107 + 323 + ...
12. $-1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{24}, \frac{-1}{120}; -1+\left(\frac{-1}{2}\right)+\left(\frac{-1}{6}\right)+\left(\frac{-1}{24}\right)+\left(\frac{-1}{120}\right)+\ldots$

**13.** 2, 2, 1, 0, –1; 2 + 2 + 1 + 0 + (–1) + ...

**14.** $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ এবং $\frac{8}{5}$

## অনুশীলনী 9.2

**1.** 1002001
**2.** 98450
**4.** 5 অথবা 20
**6.** 4
**7.** $\frac{n}{2}(5n+7)$
**8.** $2q$
**9.** $\frac{179}{321}$
**10.** 0
**13.** 27
**14.** 11, 14, 17, 20 এবং 23
**15.** 1
**16.** 14
**17.** 245 টাকা
**18.** 9

## অনুশীলনী 9.3

**1.** $\frac{5}{2^{20}}, \frac{5}{2^n}$
**2.** 3072
**4.** – 2187
**5.** (a) 13 তম পদ, (b) 12 তম পদ, (c) 9 তম পদ
**6.** ± 1
**7.** $\frac{1}{6}\left[1-(0.1)^{20}\right]$
**8.** $\frac{\sqrt{7}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3^{\frac{n}{2}}-1\right)$
**9.** $\frac{\left[1-(-a)^n\right]}{1+a}$
**10.** $\frac{x^3\left(1-x^{2n}\right)}{1-x^2}$
**11.** $22+\frac{3}{2}\left(3^{11}-1\right)$
**12.** $r=\frac{5}{2}$ অথবা $\frac{2}{5}$ ; পদগুলো হল $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$ অথবা $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$
**13.** 4
**14.** $\frac{16}{7}; 2; \frac{16}{7}\left(2^n-1\right)$
**15.** 2059
**16.** $\frac{-4}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{-16}{3}, \ldots$ অথবা 4, – 8, 16, – 32, 64, ...
**18.** $\frac{80}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{8}{9}n$
**19.** 496
**20.** $r$R
**21.** 3, –6, 12, –24
**26.** 9 এবং 27
**27.** $n=\frac{-1}{2}$
**30.** 120, 480, 30 $(2^n)$
**31.** 500 $(1.1)^{10}$ টাকা
**32.** $x^2 - 16x + 25 = 0$

## অনুশীলনী 9.4

**1.** $\frac{n}{3}(n+1)(n+2)$
**2.** $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

**3.** $\frac{n}{6}(n+1)\left(3n^2+5n+1\right)$ **4.** $\frac{n}{n+1}$ **5.** 2840

**6.** $3n\,(n+1)\,(n+3)$ **7.** $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

**8.** $\frac{n(n+1)}{12}\left(3n^2+23n+34\right)$

**9.** $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+2\left(2^n-1\right)$ **10.** $\frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$

### *অধ্যায় 9 -এর বিবিধ অনুশীলনী*

**2.** 5, 8, 11 **4.** 8729 **5.** 3050 **6.** 1210
**7.** 4 **8.** 160; 6 **9.** ± 3 **10.** 8, 16, 32
**11.** 4 **12.** 11

**21.** (i) $\frac{50}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{5n}{9}$ , (ii) $\frac{2n}{3}-\frac{2}{27}\left(1-10^{-n}\right)$ **22.** 1680

**23.** $\frac{n}{3}\left(n^2+3n+5\right)$ **25.** $\frac{n}{24}\left(2n^2+9n+13\right)$

**27.** 16680 টাকা **28.** 39100 টাকা **29.** 43690 টাকা **30.** 17000 টাকা; 20,000
**31.** 5120 টাকা **32.** 25 দিন

### অনুশীলনী 10.1

**1.** $\frac{121}{2}$ বর্গ একক।

**2.** (0, $a$), (0, – $a$) এবং $\left(-\sqrt{3}a,0\right)$ অথবা(0, $a$), (0, – $a$), এবং $\left(\sqrt{3}a,0\right)$

**3.** (i) $|y_2-y_1|$, (ii) $|x_2-x_1|$ **4.** $\left(\frac{15}{2},0\right)$ **5.** $-\frac{1}{2}$

**7.** $-\sqrt{3}$ **8.** $x = 1$ **10.** 135°

**11.** 1 এবং 2, অথবা $\frac{1}{2}$ এবং 1, অথবা – 1 এবং –2, অথবা $-\frac{1}{2}$ এবং – 1 **14.** $\frac{1}{2}$ ,104.5 কোটি

## অনুশীলনী 10.2

**1.** $y = 0$ এবং $x = 0$ **2.** $x - 2y + 10 = 0$ **3.** $y = mx$

**4.** $\left(\sqrt{3}+1\right)x-\left(\sqrt{3}-1\right)y=4\left(\sqrt{3}-1\right)$ **5.** $2x + y + 6 = 0$

**6.** $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ **7.** $5x + 3y + 2 = 0$

**8.** $\sqrt{3}x+y=10$ **9.** $3x - 4y + 8 = 0$ **10.** $5x - y + 20 = 0$

**11.** $(1 + n)x + 3(1 + n)y = n + 11$ **12.** $x + y = 5$

**13.** $x + 2y - 6 = 0,\ 2x + y - 6 = 0$

**14.** $\sqrt{3}x+y-2=0$ এবং $\sqrt{3}x+y+2=0$ **15.** $2x - 9y + 85 = 0$

**16.** $L=\dfrac{192}{90}(C-20)+124.942$ **17.** 1340 লিটার। **19.** $2kx + hy = 3kh$

## অনুশীলনী 10.3

**1.** (i) $y=-\dfrac{1}{7}x+0, -\dfrac{1}{7}, 0$; (ii) $y=-2x+\dfrac{5}{3}, -2, \dfrac{5}{3}$; (iii) $y = 0x + 0, 0, 0$

**2.** (i) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}=1, 4, 6;$ (ii) $\dfrac{x}{\frac{3}{2}}+\dfrac{y}{-2}=1, \dfrac{3}{2}, -2;$

(iii) $y=-\dfrac{2}{3}$, $y$-অক্ষের সহিত ছেদিতাংশ $= -\dfrac{2}{3}$ এবং $x$-অক্ষের সহিত কোনো ছেদিতাংশ নেই।

**3.** (i) $x \cos 120° + y \sin 120° = 4, 4, 120°$ (ii) $x \cos 90° + y \sin 90° = 2, 2, 90°$;

(iii) $x \cos 315° + y \sin 315° = 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 315°$ **4.** 5 একক

**5.** $(-2, 0)$ এবং $(8, 0)$ **6.** (i) $\dfrac{65}{17}$ একক, (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|\dfrac{p+r}{l}\right|$ একক

**7.** $3x - 4y + 18 = 0$ **8.** $y + 7x = 21$ **9.** $30°$ এবং $150°$

**10.** $\dfrac{22}{9}$

**12.** $\left(\sqrt{3}+2\right)x+\left(2\sqrt{3}-1\right)y=8\sqrt{3}+1$ অথবা $\left(\sqrt{3}-2\right)x+\left(1+2\sqrt{3}\right)y=-1+8\sqrt{3}$

**13.** $2x + y = 5$ **14.** $\left(\frac{68}{25}, -\frac{49}{25}\right)$ **15.** $m = \frac{1}{2}, c = \frac{5}{2}$

**17.** $y - x = 1, \sqrt{2}$

## অধ্যায় 10 এর বিবিধ অনুশীলনী

**1.** (a) 3, (b) $\pm$ 2, (c) 6 অথবা 1 **2.** $\frac{7\pi}{6}, 1$

**3.** $2x - 3y = 6, -3x + 2y = 6$ **4.** $\left(0, -\frac{8}{3}\right), \left(0, \frac{32}{3}\right)$

**5.** $\frac{|\sin(\phi - \theta)|}{2\left|\sin\frac{\phi - \theta}{2}\right|}$ **6.** $x = -\frac{5}{22}$ **7.** $2x - 3y + 18 = 0$

**8.** $k^2$ বর্গ একক **9.** 5 **11.** $3x - y = 7, \quad x + 3y = 9$

**12.** $13x + 13y = 6$ **14.** 1 : 2 **15.** $\frac{23\sqrt{5}}{18}$ একক

**16.** রেখাটি $x$ - অক্ষের সমান্তরাল অথবা $y$ - অক্ষের সমান্তরাল

**17.** $x = 1, \quad y = 1$ **18.** $(-1, -4)$ **19.** $\frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$

**21.** $18x + 12y + 11 = 0$ **22.** $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ **24.** $119x + 102y = 125$

## অনুশীলনী 11.1

**1.** $x^2 + y^2 - 4y = 0$ **2.** $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

**3.** $36x^2 + 36y^2 - 36x - 18y + 11 = 0$ **4.** $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

**5.** $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0$ **6.** $c(-5, 3), r = 6$

**7.** $c(2, 4), r = \sqrt{65}$ **8.** $c(4, -5), r = \sqrt{53}$ **9.** $c\left(\frac{1}{4}, 0\right); r = \frac{1}{4}$

**10.** $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$ **11.** $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$

**12.** $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$

**13.** $x^2 + y^2 - ax - by = 0$ **14.** $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 5$

**15.** বৃত্তের ভিতরে; যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্র থেকে বিন্দুটির দূরত্ব, বৃত্তের ব্যাসার্ধ থেকে কম।

## অনুশীলনী 11.2

**1.** F (3, 0), অক্ষ — $x$ - অক্ষ, নিয়ামক $x = -3$, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 12

**2.** F $(0, \frac{3}{2})$, অক্ষ - $y$ - অক্ষ, নিয়ামক $y = -\frac{3}{2}$, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 6

**3.** F (–2, 0), অক্ষ - $x$ - অক্ষ, নিয়ামক $x = 2$, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 8

**4.** F (0, –4), অক্ষ - $y$ - অক্ষ, নিয়ামক $y = 4$, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 16

**5.** F $(\frac{5}{2}, 0)$, অক্ষ - $x$ - অক্ষ, নিয়ামক $x = -\frac{5}{2}$, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 10

**6.** F $(0, \frac{-9}{4})$, অক্ষ - $y$ - অক্ষ, নিয়ামক $y = \frac{9}{4}$, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 9

**7.** $y^2 = 24x$ **8.** $x^2 = -12y$ **9.** $y^2 = 12x$

**10.** $y^2 = -8x$ **11.** $2y^2 = 9x$ **12.** $2x^2 = 25y$

## অনুশীলনী 11.3

**1.** F $(\pm\sqrt{20}, 0)$; V (± 6, 0); পরাক্ষ = 12; উপাক্ষ = 8, $e = \frac{\sqrt{20}}{6}$,

নাভিলম্ব = $\frac{16}{3}$

**2.** F $(0, \pm\sqrt{21})$; V (0, ± 5); পরাক্ষ = 10; উপাক্ষ = 4 , $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$;

নাভিলম্ব = $\frac{8}{5}$

**3.** F $(\pm\sqrt{7}, 0)$; V (± 4, 0); পরাক্ষ = 8; উপাক্ষ = 6 , $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ;

নাভিলম্ব = $\frac{9}{2}$

**4.** F $(0, \pm\sqrt{75})$; V $(0, \pm 10)$;পরাক্ষ = 20; উপাক্ষ = 10 , $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

নাভিলম্ব = 5

**5.** F $(\pm\sqrt{13}, 0)$; V $(\pm 7, 0)$; পরাক্ষ =14 ; উপাক্ষ = 12 , $e = \frac{\sqrt{13}}{7}$;

নাভিলম্ব = $\frac{72}{7}$

**6.** F $(0, \pm 10\sqrt{3})$; V $(0, \pm 20)$; পরাক্ষ =40 ; উপাক্ষ = 20 , $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

নাভিলম্ব = 10

**7.** F $(0, \pm 4\sqrt{2})$; V $(0, \pm 6)$; পরাক্ষ =12 ; উপাক্ষ = 4 , $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

নাভিলম্ব = $\frac{4}{3}$

**8.** F $\left(0, \pm\sqrt{15}\right)$; V $(0, \pm 4)$; পরাক্ষ = 8 ; উপাক্ষ = 2 , $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$;

নাভিলম্ব = $\frac{1}{2}$

**9.** F $(\pm\sqrt{5}, 0)$; V $(\pm 3, 0)$; পরাক্ষ = 6 ; উপাক্ষ = 4 , $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

নাভিলম্ব = $\frac{8}{3}$

**10.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **11.** $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$ **12.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

**13.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **14.** $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$ **15.** $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

**16.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ **17.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ **18.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

**19.** $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{40}=1$

**20.** $x^2+4y^2=52$ অথবা, $\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{13}=1$

## অনুশীলনী 11.4

**1.** নাভিদ্বয় $(\pm 5, 0)$, শীর্ষবিন্দুদ্বয় $(\pm 4, 0)$; $e=\frac{5}{4}$; নাভিলম্ব $=\frac{9}{2}$

**2.** নাভিদ্বয় $(0 \pm 6)$, শীর্ষবিন্দুদ্বয় $(0, \pm 3)$; $e=2$; নাভিলম্ব $=18$

**3.** নাভিদ্বয় $(0, \pm\sqrt{13})$, শীর্ষবিন্দুদ্বয় $(0, \pm 2)$; $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$; নাভিলম্ব $=9$

**4.** নাভিদ্বয় $(\pm 10, 0)$, শীর্ষবিন্দুদ্বয় $(\pm 6, 0)$; $e=\frac{5}{3}$; নাভিলম্ব $=\frac{64}{3}$

**5.** নাভিদ্বয় $(0,\pm\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}})$, শীর্ষবিন্দুদ্বয় $(0,\pm\frac{6}{\sqrt{5}})$; $e=\frac{\sqrt{14}}{3}$; নাভিলম্ব $=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

**6.** নাভিদ্বয় $(0, \pm\sqrt{65})$, শীর্ষবিন্দুদ্বয় $(0, \pm 4)$; $e=\frac{\sqrt{65}}{4}$; নাভিলম্ব $=\frac{49}{2}$

**7.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

**8.** $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{39}=1$

**9.** $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

**10.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

**11.** $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1$

**12.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{20}=1$

**13.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

**14.** $\frac{x^2}{49}-\frac{9y^2}{343}=1$

**15.** $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{5}=1$

## অধ্যায় - 11 এর বিবিধ অনুশীলনী

**1.** নাভি হল প্রদত্ত ব্যাসের মধ্যবিন্দু।

**2.** 2.23 মিটার (প্রায়)

**3.** 9.11 মিটার (প্রায়)

**4.** 1.56 মিটার (প্রায়)

**5.** $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$

**6.** 18 বর্গ একক

**7.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

**8.** $8\sqrt{3}a$

## অনুশীলনী 12.1

**1.** $y$ এবং $z$ - স্থানাঙ্কদ্বয় হল শূন্য **2.** $y$ - স্থানাঙ্ক হল শূন্য

**3.** I, IV, VIII, V, VI, II, III, VII

**4.** (i) XY - সমতল (ii) $(x, y, 0)$ (iii) আট

## অনুশীলনী 12.2

**1.** (i) $2\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{43}$ (iii) $2\sqrt{26}$ (iv) $2\sqrt{5}$

**4.** $x - 2z = 0$ **5.** $9x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 225 = 0$

## অনুশীলনী 12.3

**1.** (i) $\left(\frac{-4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{27}{5}\right)$ (ii) $(-8, 17, 3)$ **2.** $1:2$

**3.** $2:3$ **5.** $(6, -4, -2)$, $(8, -10, 2)$

## অধ্যায়- *12* এর বিবিধ অনুশীলনী

**1.** $(1, -2, 8)$ **2.** $7, \sqrt{34}, 7$ **3.** $a = -2,\ b = -\frac{16}{3},\ c = 2$

**4.** $(0, 2, 0)$ এবং $(0, -6, 0)$

**5.** $(4, -2, 6)$ **6.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 7y + 2z = \frac{k^2 - 109}{2}$

## অনুশীলনী 13.1

**1.** 6 **2.** $\left(\pi - \frac{22}{7}\right)$ **3.** $\pi$ **4.** $\frac{19}{2}$

**5.** $-\frac{1}{2}$ **6.** 5 **7.** $\frac{11}{4}$ **8.** $\frac{108}{7}$

**9.** $b$ **10.** 2 **11.** 1 **12.** $-\frac{1}{4}$

**13.** $\frac{a}{b}$ **14.** $\frac{a}{b}$ **15.** $\frac{1}{\pi}$ **16.** $\frac{1}{\pi}$

**17.** 4 **18.** $\dfrac{a+1}{b}$ **19.** 0 **20.** 1

**21.** 0 **22.** 2 **23.** 3, 6

**24.** $x = 1$ বিন্দুতে সীমার অস্তিত্ব নেই

**25.** $x = 0$ বিন্দুতে সীমার অস্তিত্ব নেই **26.** $x = 0$ বিন্দুতে সীমার অস্তিত্ব নেই

**27.** 0 **28.** $a = 0, b = 4$

**29.** $\lim\limits_{x \to a_1} f(x) = 0$ এবং $\lim\limits_{x \to a} f(x) = (a - a_1)(a - a_2) \ldots (a - a_x)$

**30.** সকল $a \neq 0$ এর জন্য $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ এর অস্তিত্ব আছে **31.** 2

**32.** $m = n$ হলে, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ এর অস্তিত্ব থাকবে; $m$ এবং $n$ এর যে-কোনো অখণ্ড মানের জন্য $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ এর অস্তিত্ব আছে।

## অনুশীলনী 13.2

**1.** 20 **2.** 99 **3.** 1

**4.** (i) $3x^2$ (ii) $2x - 3$ (iii) $\dfrac{-2}{x^3}$ (iv) $\dfrac{-2}{(x-1)^2}$

**6.** $nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$

**7.** (i) $2x - a - b$ (ii) $4ax(ax^2 + b)$ (iii) $\dfrac{a-b}{(x-b)^2}$

**8.** $\dfrac{nx^n - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$

**9.** (i) 2 (ii) $20x^3 - 15x^2 + 6x - 4$ (iii) $\dfrac{-3}{x^4}(5 + 2x)$ (iv) $15x^4 + \dfrac{24}{x^5}$

(v) $\dfrac{-12}{x^5} + \dfrac{36}{x^{10}}$ (vi) $\dfrac{-2}{(x+1)^2} - \dfrac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$ **10.** $-\sin x$

**11.** (i) $\cos 2x$ (ii) $\sec x \tan x$

(iii) $5\sec x \tan x - 4\sin x$ (iv) $-\operatorname{cosec} x \cot x$

(v) $-3\operatorname{cosec}^2 x - 5 \operatorname{cosec} x \cot x$ (vi) $5\cos x + 6\sin x$

(vii) $2\sec^2 x - 7\sec x \tan x$

## অধ্যায় 13 -এর বিবিধ অনুশীলনী

**1.** (i) – 1 (ii) $\dfrac{1}{x^2}$ (iii) cos ($x$ + 1) (iv) $-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$ **2.** 1

**3.** $\dfrac{-qr}{x^2}+ps$ **4.** $2c\,(ax+b)\,(cx+d)+a\,(cx+d)^2$

**5.** $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ **6.** $\dfrac{-2}{(x-1)^2},\ x\neq 0,1$ **7.** $\dfrac{-(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$

**8.** $\dfrac{-apx^2-2bpx+ar-bq}{(px^2+qx+r)^2}$ **9.** $\dfrac{apx^2+2bpx+bq-ar}{(ax+b)^2}$ **10.** $\dfrac{-4a}{x^5}+\dfrac{2b}{x^3}-\sin x$

**11.** $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **12.** $na(ax+b)^{n-1}$

**13.** $(ax+b)^{n-1}(cx+d)^{m-1}\left[mc(ax+b)+na(cx+d)\right]$ **14.** $\cos(x+a)$

**15.** $-\operatorname{cosec}^3 x-\operatorname{cosec} x\cot^2 x$ **16.** $\dfrac{-1}{1+\sin x}$

**17.** $\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$ **18.** $\dfrac{2\sec x\tan x}{(\sec x+1)^2}$ **19.** $n\sin^{n-1}x\cos x$

**20.** $\dfrac{bc\cos x+ad\sin x+bd}{(c+d\cos x)^2}$ **21.** $\dfrac{\cos a}{\cos^2 x}$

**22.** $x^3(5x\cos x+3x\sin x+20\sin x-12\cos x)$

**23.** $-x^2\sin x-\sin x+2x\cos x$

**24.** $-q\sin x(ax^2+\sin x)+(p+q\cos x)(2a\,x+\cos x)$

**25.** $-\tan^2 x(x+\cos x)+(x-\tan x)(1-\sin x)$

**26.** $\dfrac{35+15x\cos x+28\cos x+28x\sin x-15\sin x}{(3x+7\cos x)^2}$

**27.** $\dfrac{x\cos\dfrac{\pi}{4}(2\sin x - x\cos x)}{\sin^2 x}$ **28.** $\dfrac{1+\tan x - x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

**29.** $(x+\sec x)(1-\sec^2 x)+(x-\tan x).(1+\sec x\tan x)$

**30.** $\dfrac{\sin x - n x\cos x}{\sin^{n+1} x}$

## অনুশীলনী 14.1

**1.** (i) এই বাক্যটি সর্বদা মিথ্যা। কারণ মাসের সর্বোচ্চ দিন সংখ্যা হল 31 । অতএব, এটি একটি উক্তি।

(ii) এটি উক্তি নয়। কারণ কিছু লোকের জন্য গণিত সহজ হতে পারে এবং অন্য কিছু লোকের জন্য গণিত কঠিন হতে পারে।

(iii) এই বাক্যটি সর্বদা সত্য। কারণ যোগফল 12 এবং এটি 10 অপেক্ষা বৃহত্তর, অতএব, এটি একটি উক্তি।

(iv) এই বাক্যটি কোনো কোনো সময়ে সত্য এবং কোনো কোনো সময়ে অসত্য। উদাহরণস্বরূপ, 2 এর বর্গ একটি যুগ্ম সংখ্যা এবং 3 -এর বর্গ একটি অযুগ্ম সংখ্যা। অতএব, এটি উক্তি নয়।

(v) এই বাক্যটি কোনো কোনো সময়ে সত্য এবং কোনো কোনো সময়ে মিথ্যা। উদাহরণস্বরূপ, বর্গক্ষেত্র এবং রম্বসের সমান দৈর্ঘ্যের বাহু অন্যদিকে আয়তক্ষেত্র এবং ট্রাপিজিযামের অসমান দৈর্ঘ্যের বাহু। অতএব, এটি উক্তি নয়।

(vi) এটি একটি নির্দেশ। অতএব এটি উক্তি নয়।

(vii) বাক্যটি মিথ্যা, কারণ গুণফল হল (–8)। অতএব, এটি একটি উক্তি।

(viii) এই বাক্যটি সর্বদা সত্য। অতএব এটি একটি উক্তি।

(ix) কোন দিনের কথা উল্লেখ করা হয়েছে, তা বর্ণনা থেকে স্পষ্ট নয়। অতএব এটি উক্তি নয়।

(x) এই উক্তিটি সত্য, কারণ সকল বাস্তব সংখ্যাকে $a + i \times 0$ আকারে লেখা যায়।

**2.** তিনটি উদাহরণ এরূপ হতে পারে:

(i) এই ঘরে উপস্থিত প্রত্যেকে সাহসী। এটি উক্তি নয়, কারণ কোন ঘরের উল্লেখ করা হয়েছে, বর্ণনা থেকে তা স্পষ্ট নয় এবং সাহসী শব্দটি যথাযথভাবে নিরূপণ করা হয়নি।

(ii) সে একজন ইঞ্জিনিয়ারিং (কারিগরী বিদ্যা) এর ছাত্রী। এটিও একটি উক্তি নয়, কারণ 'সে' কে এটি বাক্যটিতে স্পষ্ট নয়।

(iii) "$\cos^2\theta$ সর্বদা 1/2 থেকে বৃহত্তর" যদি না আমরা জানি θ কি, আমরা বলতে পারি না বাক্যটি সত্য না মিথ্যা।

## অনুশীলনী 14.2

1. (i) তামিলনাড়ুর রাজধানী চেন্নাই নয়।
   (ii) $\sqrt{2}$ একটি জটিল সংখ্যা।
   (iii) সকল ত্রিভুজগুলো হল সমবাহু ত্রিভুজ।
   (iv) 2 সংখ্যাটি 7 থেকে বৃহত্তর নয়।
   (v) প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা একটি অখণ্ড সংখ্যা নয়।
2. (i) প্রথম উক্তিটির না-ক্রিয়া (Negation) হল "$x$ একটি মূলদ সংখ্যা", যা দ্বিতীয় উক্তির সমতুল্য। কারণ, যখন একটি সংখ্যা অমূলদ নয়, তখন এটি মূলদ হয়। অতএব প্রদত্ত জোড়া পরস্পর না-ক্রিয়া।
   (ii) প্রথম উক্তিটির না-ক্রিয়া হল "$x$ একটি অমূলদ সংখ্যা", যা দ্বিতীয় উক্তির সমতুল্য। অতএব জোড়াটি পরস্পর না- ক্রিয়া।
3. (i) 3 একটি মৌলিক সংখ্যা; 3 সংখ্যাটি অযুগ্ম (সত্য)।
   (ii) সকল অখণ্ড সংখ্যা ধণাত্মক; সকল অখণ্ড সংখ্যা ঋণাত্মক (মিথ্যা)।
   (iii) 3 দিয়ে 100 বিভাজ্য, 11 দিয়ে 100 বিভাজ্য এবং 5 দিয়ে 100 বিভাজ্য (মিথ্যা)

## অনুশীলনী 14.3

1. (i) "এবং"। উপাংশ উক্তিগুলো হল:
   সকল মূলদ সংখ্যা বাস্তব।
   সকল বাস্তব সংখ্যা, জটিল সংখ্যা নয়।
   (ii) "অথবা"। উপাংশ উক্তিগুলো হল:
   একটি অখণ্ড সংখ্যার বর্গ ধনাত্মক।
   একটি অখণ্ড সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক।
   (iii) "এবং"। উপাংশ উক্তিগুলো হল:
   বালি সূর্যতাপে তাড়াতাড়ি গরম হয়।
   বালি রাত্রিবেলা দ্রুত ঠান্ডা হয় না।
   (iv) "এবং"। উপাংশ উক্তিগুলো হল:
   $x = 2$ হল $3x^2 - x - 10 = 0$ সমীকরণের একটি বীজ।
   $x = 3$ হল $3x^2 - x - 10 = 0$ সমীকরণের একটি বীজ।
2. (i) "অস্তিত্ব আছে"। না-ক্রিয়া (negation) হল
   এমন কোনো সংখ্যার অস্তিত্ব নেই যে নিজের বর্গের সমান।
   (ii) "প্রতিটির জন্য"। না-ক্রিয়া (negation) হল এমন একটি বাস্তব সংখ্যা $x$ -এর অস্তিত্ব আছে যেখানে $x$ -এর মান $x + 1$ থেকে ছোটো নয়।
   (iii) "অস্তিত্ব আছে"। না-ক্রিয়া (negation) হল
   ভারতবর্ষে একটি রাজ্যের অস্তিত্ব আছে যার কোনো রাজধানী নেই।

**3.** না। উক্তি (i) এর না-ক্রিয়া হল— "বাস্তব সংখ্যা $x$ ও $y$ এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $x + y \neq y + x$", যা (ii) এর উক্তি থেকে ভিন্ন।

**4.** (i) বহির্ভুক্তি।

(ii) অন্তর্ভুক্তি।

(iii) বহির্ভুক্তি।

## অনুশীলনী 14.4

**1.** (i) একটি স্বাভাবিক সংখ্যা বিজোড় হওয়ার অর্থ হল তার বর্গও বিজোড় হবে।

(ii) একটি স্বাভাবিক সংখ্যা বিজোড় হবে কেবল যদি তার বর্গ বিজোড় হয়।

(iii) একটি স্বাভাবিক সংখ্যা বিজোড় হওয়ার জন্য এটি প্রয়োজন যে তার বর্গ বিজোড়।

(iv) একটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ বিজোড় হওয়ার জন্য এটি যথেষ্ট যে সংখ্যাটি বিজোড়।

(v) যদি একটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ বিজোড় না হয় তবে স্বাভাবিক সংখ্যাটি বিজোড় নয়।

**2.** (i) বিরুদ্ধ-ধণাত্মক হল—
যদি একটি সংখ্যা $x$ বিজোড় না হয়, তবে $x$ একটি মৌলিক সংখ্যা নয়।
বিপরীত হল—
যদি একটি সংখ্যা $x$ বিজোড় হয়, তবে এটি একটি মৌলিক সংখ্যা।

(ii) বিরুদ্ধ-ধণাত্মক হল—
যদি দুটি সরলরেখা একই সমতলে পরস্পরকে ছেদ করে তবে তারা সমান্তরাল নয়।
বিপরীত হল—
যদি দুটি সরলরেখা একই সমতলে ছেদ না করে তবে তারা সমান্তরাল।

(iii) বিরুদ্ধ-ধণাত্মক হল—
যদি কোনো কিছু কম তাপমাত্রাতে না থাকে তবে এটি ঠান্ডা নয়।
বিপরীত হল—
যদি কোনো কিছু কম তাপমাত্রায় থাকে তবে এটি ঠান্ডা।

(iv) বিরুদ্ধ-ধণাত্মক হল—
যদি তোমার জানা থাকে অবরোহী প্রক্রিয়া কীরূপ হয়, তবে তুমি জ্যামিতিকে উপলব্ধি করতে পারবে।
বিপরীত হল—
যদি তোমার জানা না থাকে অবরোহী প্রক্রিয়া কীরূপ হয়, তবে তুমি জ্যামিতিকে উপলব্ধি করতে পারবে না।

(v) এই উক্তিটি লেখা যায়- "যদি $x$ একটি জোড় সংখ্যা হয়, তবে $x$, 4 দিয়ে বিভাজ্য"।
বিরুদ্ধ-ধণাত্মক হল—
যদি $x$, 4 দিয়ে বিভাজ্য না হয়, তবে $x$ একটি জোড় সংখ্যা নয়।
বিপরীত হল—
যদি $x$, 4 দিয়ে বিভাজ্য হয়, তবে $x$ একটি জোড় সংখ্যা।

**3.** (i) যদি তুমি একটি চাকরী পাও তবে তোমার বিশ্বাসযোগ্যতা ভালো।

(ii) যদি কলাগাছ এক মাস গরমে থাকে তবে এটি প্রস্ফুটিত হবে।

(iii) যদি একটি চতুর্ভুজের কর্ণগুলো পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তবে এটি একটি সামান্তরিক।

(iv) যদি তুমি শ্রেণিতে $A^+$ পাও তবে তুমি বইটির সবগুলো অনুশীলনী করতে পারবে।

**4.** **a** (i) বিরুদ্ধ-ধনাত্মক।

(ii) বিপরীত।

**b** (i) বিরুদ্ধ-ধনাত্মক

(ii) বিপরীত

## অনুশীলনী 14.5

**5.** (i) মিথ্যা। জ্যা-এর সংজ্ঞা অনুযায়ী এটি বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করবে।

(ii) মিথ্যা। এটি একটি বিপরীত উদাহরণের সাহায্যে দেখানো যায়। একটি জ্যা যেটি ব্যাস নয়, একটি বিপরীত উদাহরণ।

(iii) সত্য। একটি উপবৃত্তের সমীকরণে যদি আমরা $a=b$ বসাই, তাহলে এটি একটি বৃত্ত হয় (প্রত্যক্ষ পদ্ধতি)

(iv) সত্য। অসমতার নিয়ম অনুযায়ী।

(v) মিথ্যা। যেহেতু 11 একটি মৌলিক সংখ্যা, সুতরাং $\sqrt{11}$ হল অমূলদ।

## *অধ্যায় 14 এর বিবিধ অনুশীলনী*

**1.** (i) এমন একটি ধণাত্মক বাস্তব সংখ্যা $x$ এর অস্তিত্ব আছে যেখানে $x-1$ ধণাত্মক নয়।

(ii) এমন একটি বিড়ালের অস্তিত্ব আছে যেটি আঁচড় দেয় না।

(iii) এমন একটি বাস্তব সংখ্যা $x$ এর অস্তিত্ব আছে যেখানে $x > 1$ অথবা $x < 1$ এর কোনোটিই নয়।

(iv) এরূপ কোনো সংখ্যা $x$ এর অস্তিত্ব নেই যেখানে $0 < x < 1$ ।

**2.** (i) উক্তিটি এরূপ লেখা যেতে পারে, "যদি একটি ধণাত্মক পূর্ণসংখ্যা মৌলিক হয়, তবে এটির 1 এবং সেই সংখ্যা ছাড়া অন্য কোনো ভাজক নেই"।

বিপরীত উক্তিটি হল—

যদি একটি ধণাত্মক পূর্ণসংখ্যার 1 এবং সেই সংখ্যা ছাড়া অন্য কোনো ভাজক না থাকে তবে এটি হল একটি মৌলিক সংখ্যা।

বিরূদ্ধ-ধণাত্মক উক্তিটি হল—

যদি ধণাত্মক পূর্ণসংখ্যার 1 এবং সেই সংখ্যা ছাড়া ভাজক থাকে তবে এটি মৌলিক নয়।

(ii) প্রদত্ত উক্তিটি এরূপ লেখা যেতে পারে "যদি দিনটি রৌদ্র উজ্জ্বল হয় তবে আমি একটি সমুদ্রতটে যাই"।

বিপরীত উক্তিটি হল—

যদি আমি সমুদ্রতটে যাই তবে এটি একটি রৌদ্র উজ্জ্বল দিন।

বিরূদ্ধ-ধণাত্মক উক্তিটি হল—

যদি আমি একটি সমুদ্রতটে না যাই তবে এটি একটি রৌদ্র উজ্জ্বল দিন নয়।

(iii) বিপরীত উক্তিটি হল—

যদি তুমি তৃষ্ণা অনুভব কর তবে বাইরে গরম আছে।

বিরূদ্ধ-ধণাত্মক উক্তিটি হল—

যদি তুমি তৃষ্ণা অনুভব না কর তবে বাইরে গরম নেই।

**3.** (i) যদি তুমি সার্ভারে লগ্ অন্ করে থাক তবে তোমার কাছে একটি পাসওয়ার্ড আছে।
(ii) যদি বর্ষা হয় তবে সেখানে যানজট হয়।
(iii) যদি তুমি ওয়েবসাইটে প্রবেশ করতে চাও তবে তুমি একটি চাঁদা প্রদান করবে।

**4.** (i) তুমি টেলিভিশন দেখ যদি এবং কেবলমাত্র যদি তোমার মন মুক্ত থাকে।
(ii) তুমি A গ্রেড পাও যদি এবং কেবলমাত্র যদি তুমি নিয়মিত সব বাড়ির কাজ কর।
(iii) একটি চতুর্ভুজ সমান কোণ বিশিষ্ট হয় যদি এবং কেবলমাত্র যদি এটি একটি আয়তক্ষেত্র হয়।

**5.** "এবং" দিয়ে যুক্ত যৌগিক উক্তি হল, 25 সংখ্যাটি 5 এবং 8 এর গুণিতক।
এটি একটি মিথ্যা উক্তি।
"অথবা" দিয়ে যুক্ত যৌগিক উক্তি হল, 25 সংখ্যাটি 5 অথবা 8 এর গুণিতক।
এটি একটি সত্য উক্তি।

**7.** অনুশীলনী 14.4 এর প্রশ্ন 1 -এর অনুরূপ।

## অনুশীলনী 15.1

**1.** 3 **2.** 8.4 **3.** 2.33 **4.** 7
**5.** 6.32 **6.** 16 **7.** 3.23 **8.** 5.1
**9.** 157.92 **10.** 11.28 **11.** 10.34 **12.** 7.35

## অনুশীলনী 15.2

**1.** 9, 9.25 **2.** $\frac{n+1}{2}, \frac{n^2-1}{12}$ **3.** 16.5, 74.25 **4.** 19, 43.4
**5.** 100, 29.09 **6.** 64, 1.69 **7.** 107, 2276 **8.** 27, 132
**9.** 93, 105.52, 10.27 **10.** 5.55, 43.5

## অনুশীলনী 15.3

**1.** B **2.** Y **3.** (i) B, (ii) B
**4.** A **5.** ওজন

## অধ্যায় *15* -এর বিবিধ অনুশীলনী

**1.** 4, 8 **2.** 6, 8 **3.** 24, 12
**5.** (i) 10.1, 1.99 (ii) 10.2, 1.98
**6.** রসায়নে সর্বোচ্চ এবং গণিতে সর্বনিম্ন। **7.** 20, 3.036

## অনুশীলনী 16.1

1. {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT}
2. $\{(x, y) : x, y = 1,2,3,4,5,6\}$

অথবা {(1,1), (1,2), (1,3), ..., (1,6), (2,1), (2,2), ..., (2,6), ..., (6, 1), (6, 2), ..., (6,6)}

3. {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT}
4. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}
5. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T}
6. $\{XB_1, XB_2, XG_1, XG_2, YB_3, YG_3, YG_4, YG_5\}$
7. {R1, R2, R3, R4, R5, R6, W1, W2, W3, W4, W5, W6, B1, B2, B3, B4, B5, B6}
8. (i) {BB, BG, GB, GG} (ii) {0, 1, 2}
9. {RW, WR, WW}
10. {HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6}
11. {DDD, DDN, DND, NDD, DNN, NDN, NND, NNN}
12. {T, H1, H3, H5, H21, H22, H23, H24, H25, H26, H41, H42, H43, H44, H45, H46, H61, H62, H63, H64, H65, H66}
13. {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)}
14. {1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2H, 2T, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4H, 4T, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6H, 6T}
15. $\{TR_1, TR_2, TB_1, TB_2, TB_3, H1, H2, H3, H4, H5, H6\}$
16. {6, (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (1,1,6), (1,2,6), ..., (1,5,6), (2,1,6), (2,2,6), ..., (2,5,6), ..., (5,1,6), (5,2,6), ... }

## অনুশীলনী 16.2

1. না।
2. (i) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (ii) $\phi$ (iii) {3, 6} (iv) {1, 2, 3} (v) {6}
   (vi) {3, 4, 5, 6}, $A\cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A\cap B = \phi$, $B\cup C = \{3, 6\}$, $E\cap F = \{6\}$, $D\cap E = \phi$,
   $A - C = \{1, 2,4,5\}$, $D - E = \{1,2,3\}$, $E\cap F' = \phi$, $F' = \{1, 2\}$
3. A = {(3,6), (4,5), (5, 4), (6,3), (4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)}
   B = {(1,2), (2,2), (3, 2), (4,2), (5,2), (6,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)}
   C ={(3,6), (6,3), (5, 4), (4,5), (6,6)}
   A এবং B, B এবং C হল পরস্পর পৃথক।
4. (i) A এবং B; A এবং C; B এবং C; C এবং D (ii) A এবং C (iii) B এবং D
5. (i) "কমপক্ষে দুটি হেড পাওয়া", এবং "কমপক্ষে দুটি টেল পাওয়া"
   (ii) "হেড না পাওয়া", "একটি মাত্র হেড পাওয়া" এবং "কমপক্ষে দুটি হেড পাওয়া"

(iii) "অধিকতম দুটি টেল পাওয়া" এবং "কেবল দুটি টেল পাওয়া"

(iv) "কেবল একটি হেড পাওয়া" এবং "কেবল দুটি হেড পাওয়া"

(v) "কেবল একটি টেল পাওয়া", "কেবল দুটি টেল পাওয়া" এবং "কেবল তিনটি টেল পাওয়া"

**দ্রষ্টব্য** উপরোক্ত প্রশ্নের উত্তরে অন্য ঘটনাও হতে পারে।

**6.** A = {(2, 1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

B = {(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)}

C = {(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)}

(i) A′ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)} = B

(ii) B′ = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)} = A

(iii) $A \cup B$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)} = S

(iv) $A \cap B = \phi$

(v) A – C = {(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

(vi) $B \cup C$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)}

(vii) $B \cap C$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (3,2)}

(viii) $A \cap B' \cap C'$ = {(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

**7.** (i) সত্য (ii) সত্য (iii) সত্য (iv) মিথ্যা (v) মিথ্যা (vi) মিথ্যা

## অনুশীলনী 16.3

**1.** (a) হ্যাঁ (b) হ্যাঁ (c) না (d) না (e) না

**2.** $\frac{3}{4}$

**3.** (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{1}{6}$ (iv) 0 (v) $\frac{5}{6}$

**4.** (a) 52 (b) $\frac{1}{52}$ (c) (i) $\frac{1}{13}$ (ii) $\frac{1}{2}$

**5.** (i) $\frac{1}{12}$ (ii) $\frac{1}{12}$

**6.** $\frac{3}{5}$

**7.** 4.00 টাকা লাভ, 1.50 টাকা লাভ, 1.00 টাকা ক্ষতি, 3.50 টাকা ক্ষতি, 6.00 টাকা ক্ষতি।

P ( 4.00 টাকা জয়লাভ করা) $= \frac{1}{16}$, P(1.50 টাকা জয়লাভ করা) $= \frac{1}{4}$,

P (1.00 টাকা পরাজিত হওয়া) $= \frac{3}{8}$, P (3.50 টাকা পরাজিত হওয়া) $= \frac{1}{4}$,

P (6.00 টাকা পরাজিত হওয়া) $= \frac{1}{16}$ ।

**8.** (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{7}{8}$ (v) $\frac{1}{8}$ (vi) $\frac{1}{8}$ (vii) $\frac{3}{8}$ (viii) $\frac{1}{8}$ (ix) $\frac{7}{8}$

**9.** $\frac{9}{11}$ **10.** (i) $\frac{6}{13}$ (ii) $\frac{7}{13}$ **11.** $\frac{1}{38760}$

**12.** (i) না, কারন $P(A \cap B)$ অবশ্যই P(A) এবং P(B) এর সমান বা ছোটো (ii) হ্যাঁ

**13.** (i) $\frac{7}{15}$ (ii) 0.5 (iii) 0.15 **14.** $\frac{4}{5}$

**15.** (i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ **16.** না **17.** (i) 0.58 (ii) 0.52 (iii) 0.74

**18.** 0.6 **19.** 0.55 **20.** 0.65

**21.** (i) $\frac{19}{30}$ (ii) $\frac{11}{30}$ (iii) $\frac{2}{15}$

## অধ্যায় *16* -এর বিবিধ অনুশীলনী

**1.** (i) $\frac{^{20}C_5}{^{60}C_5}$ (ii) $1 - \frac{^{30}C_5}{^{60}C_5}$ **2.** $\frac{^{13}C_3 \cdot {}^{13}C_1}{^{52}C_4}$

**3.** (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{5}{6}$ **4.** (a) $\frac{999}{1000}$ (b) $\frac{^{9990}C_2}{^{10000}C_2}$ (c) $\frac{^{9990}C_{10}}{^{10000}C_{10}}$

**5.** (a) $\frac{17}{33}$ (b) $\frac{16}{33}$ **6.** $\frac{2}{3}$

**7.** (i) 0.88 (ii) 0.12 (iii) 0.19 (iv) 0.34 **8.** $\frac{4}{5}$

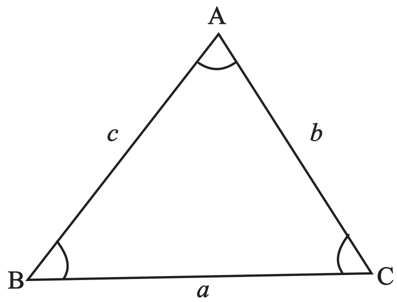
**9.** (i) $\frac{33}{83}$ (ii) $\frac{3}{8}$ **10.** $\frac{1}{5040}$

# সংযোজিত বিষয়বস্তু

## অধ্যায় 3

### 3.6 সাইন (Sine) এবং কো-সাইন (Cosine) সূত্রের প্রমাণ এবং কিছু সহজ প্রয়োগ

ধরো ABC একটি ত্রিভুজ। কোণ A বলতে আমরা বুঝি, AB ও AC বাহুর সাহায্যে উৎপন্ন কোণ, যা 0° থেকে 180°-এর মধ্যে অবস্থিত। B ও C কোণও অনুরূপভাবে সংজ্ঞায়িত। শীর্ষবিন্দু C, A এবং B এর বিপরীত বাহু AB, BC এবং CA কে যথাক্রমে $c$, $a$ এবং $b$ দিয়ে প্রকাশ করা হবে (চিত্র 3.15 দেখো)।

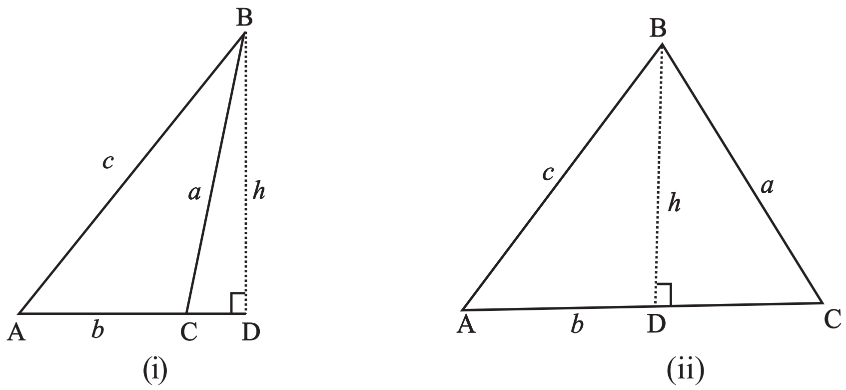


**চিত্র 3.15**

**উপপাদ্য 1** (সাইন সূত্র) (Sine formulae) যে-কোনো ত্রিভুজে বাহুগুলো, বিপরীত কোণের সাইনের সমানুপাতী হয়। অর্থাৎ, একটি ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রে

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

**প্রমাণ** ধরো চিত্র 3.16 (i) ও (ii) তে দেওয়া $\Delta$ABC-এর যে কোনো একটি



**চিত্র 3.16**

শীর্ষ B থেকে উচ্চতা $h$ অঙ্কন করা হল, যা AC বাহুর D বিন্দুতে মিলিত হয় [চিত্র (i)-এ AC এর

বর্ধিতাংশের D বিন্দুতে উচ্চতা মিলিত হয়]।

চিত্র 3.16(i) তে সমকোণী ত্রিভুজ ABD থেকে আমরা পাই—

$$\sin A = \frac{h}{c}, \text{ অর্থাৎ, } h = c \sin \mathrm{A} \quad (1)$$

এবং $$\sin (180° - \mathrm{C}) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin C \quad (2)$$

(1) এবং (2) থেকে আমরা পাই—

$$c \sin \mathrm{A} = a \sin \mathrm{C}, \text{ অর্থাৎ, } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \quad (3)$$

অনুরূপে, আমরা প্রমাণ করতে পারি যে,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad (4)$$

(3) ও (4) থেকে আমরা পাই

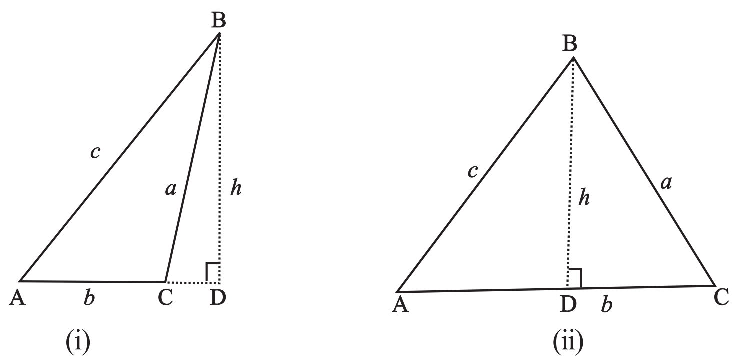
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

চিত্র 3.16 (ii)-এর ত্রিভুজ ABC থেকে অনুরূপভাবে সমীকরণ (3) এবং (4) পাওয়া যায়।

**উপপাদ্য 2** [কো-সাইন সূত্র (Cosine formulae)] ধরো, একটি ত্রিভুজের কোণগুলো হল A, B এবং C এবং $a$, $b$ ও $c$ হল যথাক্রমে কোণ A, B এবং C এর বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য। সুতরাং,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

**প্রমাণ** চিত্র 3.17 (i) এবং (ii) তে প্রদত্ত ত্রিভুজABC ।




**চিত্র 3.17**

চিত্র 3.17 (ii) অনুযায়ী আমরা পাই,

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2$$
$$= BD^2 + AD^2 + AC^2 - 2AC.AD$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AC\ AB\cos A$$

অথবা, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

অনুরূপভাবে আমরা নির্ণয় করতে পারি,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

এবং $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

চিত্র 3.17 (i) থেকে অনুরূপ সমীকরণ নির্ণয় করা যায়, যেখানে C কোণটি স্থূলকোণ।

যখন কোণ নির্ণয় করতে হয় তখন কো-সাইন সূত্রের সরলতম আকার হল নিম্নরূপ—

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

**উদাহরণ 25** ABC ত্রিভুজে প্রমাণ করো—

$$\tan\frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c}\cot\frac{A}{2}$$
$$\tan\frac{C - A}{2} = \frac{c - a}{c + a}\cot\frac{B}{2}$$
$$\tan\frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b}\cot\frac{C}{2}$$

**প্রমাণ** সাইন সূত্র থেকে আমরা পাই—

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ (ধরো)।}$$

সুতরাং, $$\frac{b-c}{b+c}=\frac{k(\sin B-\sin C)}{k(\sin B+\sin C)}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\cot\frac{(B\ +\ C)}{2}\tan\frac{(B-C)}{2}$$

$$=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}$$

সুতরাং, $$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

অনুরূপভাবে আমরা অন্য ফলগুলোও প্রমাণ করতে পারি। এই ফলগুলো বিশেষভাবে *নেপিয়ারের সাদৃশ্যতা* (Napier's Analogies) হিসেবে পরিচিত।

**উদাহরণ 26** যেকোনো ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করো যে—

$$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$$

**সমাধান** তোমরা জান যে,

$$a\sin(B-C)=a[\sin B\cos C-\cos B\sin C] \qquad (1)$$

এখন, $$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=k \text{ (ধরো)}$$

সুতরাং, $\sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

সমীকরণ (1)-এ sin B ও sin C -এর মান বসিয়ে এবং কো-সাইন সূত্র ব্যবহার করে আমরা পাই—

$$a\sin(B-C) = a\left[bk\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) - ck\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)\right]$$

$$=\frac{k}{2}\left(a^2+b^2-c^2-c^2-a^2+b^2\right)$$

$$=k(b^2-c^2)$$

অনুরূপে, $b\sin(C-A) = k(c^2-a^2)$

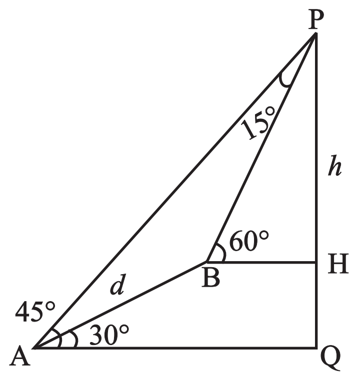
এবং $c\sin(A-B) = k(a^2-b^2)$

সুতরাং, বামপক্ষ $= k(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2)$

$= 0 =$ ডানপক্ষ

**উদাহরণ 27** A বিন্দু থেকে $h$ উচ্চতা বিশিষ্ট PQ মিনারের শীর্ষ বিন্দু P-এর উন্নতি কোণ 45° এবং অপর একটি বিন্দু B থেকে শীর্ষ বিন্দু P-এর উন্নতি কোণ 60° যেখানে B বিন্দুটি A থেকে AB পথে $d$ দূরত্বে অবস্থিত এবং AB রেখা AQ এর সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করো $d = h(\sqrt{3}-1)$ ।

**প্রমাণ** চিত্র 3.18 থেকে আমরা পাই $\angle PAQ = 45°$, $\angle BAQ = 30°$, $\angle PBH = 60°$




**চিত্র 3.18**

স্পষ্টতই, $\angle APQ = 45°, \angle BPH = 30°$, থেকে পাওয়া যায় $\angle APB = 15°$

আবার, $\angle PAB = 15° \Rightarrow \angle ABP = 150°$

ত্রিভুজ APQ থেকে আমরা পাই $AP^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$ (কেন?)

অথবা, $$AP = \sqrt{2}h$$

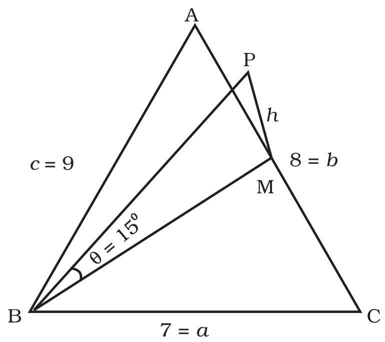
$\Delta$ ABP-তে সাইন-সূত্র প্রয়োগ করে আমরা পাই—

$$\frac{AB}{\sin 15°} = \frac{AP}{\sin 150°} \Rightarrow \frac{d}{\sin 15°} = \frac{\sqrt{2}h}{\sin 150°}$$

অর্থাৎ, $$d = \frac{\sqrt{2}h \sin 15°}{\sin 30°}$$
$$= h(\sqrt{3} - 1) \qquad \text{(কেন?)}$$

**উদাহরণ 28** ত্রিভুজাকৃতি জমি ABC এর BC = 7 মি, CA = 8 মি এবং AB = 9 মি। AC বাহুর উপর M মধ্যবিন্দুতে একটি লাইট পোস্ট দণ্ডায়মান যা B বিন্দুতে 15° সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে। লাইট পোস্টের উচ্চতা নির্ণয় করো।

**সমাধান** চিত্র 3.19 থেকে আমরা পাই AB = 9 মি = $c$, BC = 7 মি = $a$ এবং
AC = 8 মি = $b$ ।




**চিত্র 3.19**

ধরো লাইট পোস্ট MP এর উচ্চতা $h$ যা AC বাহুর উপর M মধ্যবিন্দুতে অবস্থিত। আবার, ধরো লাইট পোস্টটি B বিন্দুতে সম্মুখ কোণ $\theta$ উৎপন্ন করেছে যার মান 15°।

$\Delta$ABC-তে কোসাইন সূত্র প্রয়োগ করে আমরা পাই—

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 64 - 81}{2 \times 7 \times 8} = \frac{2}{7}$$

অনুরূপে, $\Delta$BMC-তে কো-সাইন সূত্র প্রয়োগ করে আমরা পাই—

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2\ BC \times CM \cos C$$

এখানে, $CM = \frac{1}{2}CA = 4$, যেহেতু AC এর মধ্যবিন্দু M।

সুতরাং, সমীকরণ (1) ব্যবহার করে আমরা পাই—

$$BM^2 = 49 + 16 - 2 \times 7 \times 4 \times \frac{2}{7}$$

$$= 49$$

বা, $BM = 7$

অতএব, $\Delta$BMP, যার M বিন্দুতে সমকোণ, এ থেকে আমরা পাই—

$$\tan\theta = \frac{PM}{BM} = \frac{h}{7}$$

বা $\frac{h}{7} = \tan(15°) = 2-\sqrt{3}$ (কেন?)

বা $h = 7(2-\sqrt{3})$ $7(2-\sqrt{3})$ মি

## অনুশীলনী 3.5

যে-কোনো ত্রিভুজ ABC-এর যদি $a = 18$, $b = 24$, $c = 30$ হয় তবে নির্ণয় করো :

1. cos A, cos B, cos C (উত্তর : $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0$)

2. sin A, sin B, sin C (উত্তর : $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$)

যে-কোনো ত্রিভুজ ABC-এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করো

3. $$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$$

4. $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\cos\dfrac{C}{2}}$

5. $\sin\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{a}\cos\dfrac{A}{2}$

6. $a\ (b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2$

7. $a\ (\cos C - \cos B) = 2\ (b - c) \cos^2 \dfrac{A}{2}$

8. $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}=\dfrac{b^2-c^2}{a^2}$

9. $(b+c)\cos\dfrac{B+C}{2}=a\cos\dfrac{B-C}{2}$

10. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$

11. $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

12. $(b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B + (a^2 - b^2) \cot C = 0$

13. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

14. একটি পাহাড়ের ঢাল অনুভূমিক তলের সাথে 15° কোণে নত। যার উপর লম্বভাবে একটি গাছ দণ্ডায়মান। গাছের গোড়া থেকে পাহাড়ের ঢাল বরাবর 35 মি নীচে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° হলে গাছের উচ্চতা নির্ণয় করো। (উত্তর : $35\sqrt{2}$ মি )

15. দুটি জাহাজ একই সময়ে একটি বন্দর থেকে যাত্রা করে। একটি 24 কিমি প্রতি ঘণ্টা বেগে N45°E দিকে যায় এবং অপরটি 32 কিমি প্রতি ঘণ্টা বেগে S75°E দিকে যায়। 3 ঘণ্টা পর জাহাজ দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো। (উত্তর : 86.4 কিমি (প্রায়))

16. দুটি গাছ A ও B, নদীর একই তীরে অবস্থিত। নদীর উপর অবস্থিত কোনো বিন্দু C থেকে A ও B গাছ দুটির দূরত্ব যথাক্রমে 250 মি এবং 300 মি। যদি C কোণের মান 45° হয়, তবে গাছ দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো (ধরো $\sqrt{2}$ = 1.44)। (উত্তর : 215.5 মি)

# অধ্যায় 5

## 5.7 একটি জটিল রাশির বর্গমূল

আমরা পাঠ্যপুস্তকের পৃষ্ঠা 108-109 তে জটিল বীজ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করার চর্চা করেছি। এখানে আমরা একটি আদর্শ আকারের জটিল রাশির বর্গমূল নির্ণয়ের বিশেষ পদ্ধতি আলোচনা করব। আমরা এটি একটি উদাহরণের মাধ্যমে দেখব।

**উদাহরণ 12** $-7-24i$ এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

**সমাধান** ধরো, $x+iy=\sqrt{-7-24i}$

সুতরাং, $(x+iy)^2=-7-24i$

অথবা, $x^2-y^2+2xyi=-7-24i$

উভয়দিকের বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশ তুলনা করে আমরা পাই—

$$x^2-y^2=-7 \qquad (1)$$

$$2xy=-24$$

আমরা জানি,

$$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2-y^2\right)^2+(2xy)^2$$

$$=49+576$$

$$=625$$

অতএব, $x^2+y^2=25 \qquad (2)$

(1) ও (2) থেকে পাওয়া যায়, $x^2=9$ এবং $y^2=16$

বা, $x=+3$ এবং $y=+4$

যেহেতু, গুণফল $xy$ ঋণাত্মক, তাই আমরা পাই—

$x=3, y=-4$ অথবা, $x=-3, y=4$

অতএব, $-7-24i$ এর বর্গমূল হল $3-4i$ এবং $-3+4i$

# অনুশীলনী 5.4

নিম্নলিখিতগুলোর বর্গমূল নির্ণয় করো :

1. $-15-8i$ (উত্তর : $1-4i, -1+4i$)
2. $-8-6i$ (উত্তর : $1-3i, -1+3i$)

**3.** $1-i$ (উত্তর : $\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\mp\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i\right)$)

**4.** $-i$ (উত্তর : $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mp\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$)

**5.** $i$ (উত্তর : $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$)

**6.** $1+i$ (উত্তর : $\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i\right)$)

## অধ্যায় 9

### 9.7 অসীম গুণোত্তর প্রগতি এবং তার সমষ্টি (*Infinite G.P. and its Sum*)

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ আকারের গুণোত্তর প্রগতিকে বলা হয় অসীম গুণোত্তর প্রগতি। এখন একটি অসীম গুণোত্তর প্রগতির যোগের সূত্র নির্ণয় করার জন্য একটি উদাহরণের সাহায্যে শুরু করব। নীচের গুণোত্তর প্রগতিটি ধরো,

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$$

এখানে, $a = 1,\ r = \frac{2}{3}$ ।

অতএব, আমরা পাই,

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

যখন $n$ ক্রমশ বড়ো হতে থাকবে, তখন $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ এর মান কীরূপ হবে তা বিচার করো :

| $n$ | 1 | 5 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ | 0.6667 | 0.1316872428 | 0.01734152992 | 0.00030072866 |

আমরা দেখছি যে, যখন $n$ ক্রমশ বড়ো থেকে আরও বড়ো হচ্ছে, তখন $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ এর মান ক্রমশ শূন্যের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। গাণিতিক ভাষায় আমরা বলতে পারি যখন $n$ পর্যাপ্তভাবে বড়ো হয়, তখন $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ পর্যাপ্তভাবে ছোটো হয়। অন্যভাবে বলা যায়, যখন $n \to \infty$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ হয়। ফলস্বরূপ, আমরা অসীম সংখ্যক পদের যোগফল পাই $S_\infty = 3$ ।এখন, $a, ar, ar^2, \ldots$ গুণোত্তর প্রগতির ক্ষেত্রে যদি সাধারণ অনুপাত $r$ এর সাংখ্যিক মান 1 থেকে ছোটো হয়, তবে

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

এই ক্ষেত্রে, যখন $n \to \infty$, $r^n \to 0$ যেহেতু $|r| < 1$ ।অতএব,

$$S_n \to \frac{a}{1-r}$$

অসীম যোগফলকে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় $S_\infty$ অথবা S দিয়ে।

সুতরাং, আমরা পাই $S = \frac{a}{1-r}$

উদাহরণস্বরূপ,

(i) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

(ii) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

## অনুশীলনী 9.4

নিম্নে প্রদত্ত প্রতিটি গুণোত্তর প্রগতির অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করো :

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ (উত্তর : 1.5)
2. $6, 1.2, .24, \ldots$ (উত্তর : 7.5)
3. $5, \frac{20}{7}, \frac{80}{49}, \ldots$ (উত্তর : $\frac{35}{3}$)
4. $\frac{-3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{-3}{64}, \ldots$ (উত্তর : $\frac{-3}{5}$)

5. প্রমাণ করো $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} ... = 3$

6. ধরো $x = 1 + a + a^2 + ...$ এবং $y = 1 + b + b^2 + ...$, যেখানে $|a| < 1$ এবং $|b| < 1$ । প্রমাণ করো

$$1 + ab + a^2b^2 + ... = \frac{xy}{x+y-1}$$

# অধ্যায় 10

## 10.6 দুটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখাসমূহের সমীকরণ :

মনে করো, দুটি পরস্পর ছেদী সরলরেখা $l_1$ ও $l_2$ হল

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (1)$$

এবং $$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (2)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) থেকে আমরা একটি সমীকরণ তৈরি করতে পারি,

$$A_1x + B_1y + C_1 + k\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0 \qquad (3)$$

যেখানে $k$ হল একটি স্বেচ্ছা ধ্রুবক যাকে প্রাচল (*Parameter*) বলা হয়। $k$-এর যে-কোনো মানের জন্য (3)নং সমীকরণটি $x$ ও $y$ এর একটি একঘাত সমীকরণ হয়। অতএব এটি একটি সরলরেখার গোষ্ঠীকে (*family of lines*) প্রকাশ করে। $k$-এর কোনো মান এর জন্য এই গোষ্ঠীর একটি নির্দিষ্ট সদস্যকে পাওয়া যায়। $k$-এর এই মান অন্য শর্তের সাহায্যেও নির্ণয় করা যায়।

**উদাহরণ 20** $y$-অক্ষের সমান্তরাল যে সরলরেখা $x - 7y + 5 = 0$ ও $3x + y - 7 = 0$ এর ছেদবিন্দুগামী, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

**সমাধান** প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কোনো সরলরেখার সমীকরণের আকার হল—

$$x - 7y + 5 + k\ (3x + y - 7) = 0$$

অর্থাৎ, $$(1 + 3k)\ x + (k - 7)\ y + 5 - 7k = 0 \qquad (1)$$

যেহেতু, এই সরলরেখাটি $y$-অক্ষের সমান্তরাল, তাই $y$-এর সহগ শূন্য হবে, অর্থাৎ,

$k - 7 = 0$ যা থেকে পাওয়া যায় $k = 7$ ।

$k$-এর মান সমীকরণ (1)-এ বসিয়ে পাই

$22x - 44 = 0$ অর্থাৎ, $x - 2 = 0$, এটিই হল নির্ণেয় সমীকরণ।

## অনুশীলনী 10.4

1. $3x+4y=7$ এবং $x-y+2=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে সরলরেখার নতি 5 তার সমীকরণ নির্ণয় করো। (উত্তর : $35x - 7y + 18 = 0$ )

2. সরলরেখা $x + 2y - 3 = 0$ ও $4x - y + 7 = 0$ এর ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যা $5x + 4y - 20 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল।

   (উত্তর : $15x + 12y - 7 = 0$)

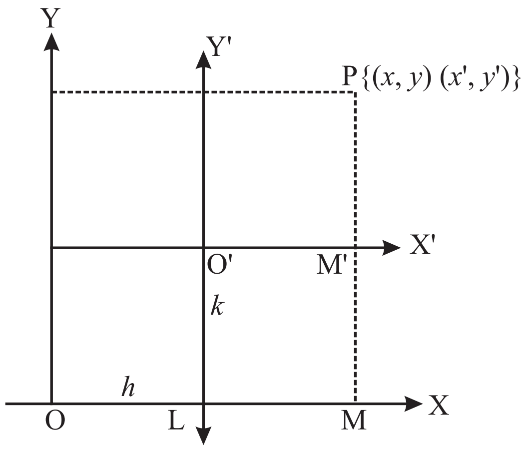
3. $2x + 3y - 4 = 0$ এবং $x - 5y = 7$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যার $x$-ছেদিতাংশ $-4$ এর সমান হয়।

   (উত্তর : $10x + 93y + 40 = 0$ )

4. $5x - 3y = 1$ এবং $2x + 3y - 23 = 0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী এবং $5x - 3y - 1 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

   (উত্তর : $63x + 105y - 781 = 0$)

### 10.7 মূলবিন্দুর স্থানান্তর (*Shifting of Origin*)




**চিত্র 10.21**

একটি স্থানাঙ্ক অক্ষতন্ত্রে কোনো বিন্দুসমূহের সেটের অনুরূপ সমীকরণকে অন্য আরেকটি সুবিধাজনক স্থানাঙ্ক অক্ষতন্ত্রের মাধ্যমে সরল আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে সব জ্যামিতিক বৈশিষ্টগুলো অপরিবর্তীত থাকে। একটি রূপান্তর এরূপ যাতে নূতন অক্ষকে প্রারম্ভিক অক্ষের সমান্তরালে পরিবর্তিত করা হয় এবং মূলবিন্দুকে নূত ন বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হয়। এই প্রকারের রূপান্তরকে *অক্ষের স্থানান্তর* (*translation of axes*) বলা হয়।

তলের প্রত্যেকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক, স্থানাঙ্ক-অক্ষের স্থানান্তরের সাপেক্ষে পরিবর্তিত হয়। বিন্দুগুলোর পুরাতন ও নূতন স্থানাঙ্ক অক্ষের মধ্যে সম্পর্ক জানার পর আমরা স্থানাঙ্ক অক্ষের নূতন পদ্ধতিতে বিশ্লেষণাত্মক সমস্যা নিয়ে অধ্যয়ন করতে পারি।

স্থানাঙ্ক অক্ষের স্থানান্তরের ফলে কোনো সমতলের কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক কীভাবে পরিবর্তন হয় তা দেখার জন্য চলো আমরা ধরি, OX এবং OY অক্ষের সাপেক্ষে P $(x, y)$ একটি বিন্দু। ধরি, $O'X'$ এবং $O'Y'$ হল যথাক্রমে OX এবং OY এর সমান্তরাল নতুন স্থানাঙ্ক অক্ষ, যেখানে $O'$ হল নূতন

মূলবিন্দু। ধরি, পুরাতন অক্ষের সাপেক্ষে O′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(h, k)$ অর্থাৎ, OL = $h$ এবং LO′ = $k$ । আরও OM = $x$ এবং MP = $y$ (চিত্র 10.21 দেখো)

মনে করো O′ M′ = $x'$ এবং M′P = $y'$ হল যথাক্রমে নতুন অক্ষ দ্বয় O′ X′ এবং O′ Y′ এর সাপেক্ষে P বিন্দুর ভূজ এবং কোটি। চিত্র 10.21 থেকে এটি সহজভাবে দেখা যেতে পারে যে,

OM = OL + LM, অর্থাৎ, $x = h + x'$

এবং MP = MM′ + M′ P, অর্থাৎ, $y = k + y'$

অতএব, $x = x' + h,\ y = y' + k$

এই সূত্রটি পুরাতন ও নতুন স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে।

**উদাহরণ 21** বিন্দু (3, –4) এর নতুন স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যদি মূল বিন্দুকে (1, 2) বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হয়।

**সমাধান** নতুন মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক $h = 1$ এবং $k = 2$ এবং বিন্দুটির প্রারম্ভিক স্থানাঙ্ক হল $x = 3, y = -4$ ।

পুরাতন স্থানাঙ্ক $(x, y)$ এবং নতুন স্থানাঙ্ক $(x', y')$ এর মধ্যে স্থানান্তরের সম্বন্ধ নিম্নরূপ—

$x = x' + h$ অর্থাৎ, $x' = x - h$

এবং $y = y' + k$ অর্থাৎ, $y' = y - k$

মানগুলো বসিয়ে আমরা পাই—

$x' = 3 - 1 = 2$ এবং $y' = -4 - 2 = -6$

অতএব, নতুন অক্ষের সাপেক্ষে (3, –4) বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল (2, –6)।

**উদাহরণ 22** সরলরেখা $2x - 3y + 5 = 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ নির্ণয় করো যখন স্থানাঙ্ক অক্ষের স্থানান্তরের ফলে মূলবিন্দু (3, –1) বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়।

**সমাধান** মনে করো P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$, নতুন স্থানাঙ্ক অক্ষে $(x', y')$ বিন্দুতে পরিবর্তীত হয়, যার মূল বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল $h = 3,\ k = -1$ সুতরাং, আমরা রূপান্তর সূত্রকে $x = x' + 3$ এবং $y = y' - 1$ রূপে লিখতে পারি। সরলরেখার প্রদত্ত সমীকরণে এই মানগুলো বসিয়ে আমরা পাই—

$2(x' + 3) - 3\ (y' - 1) + 5 = 0$

বা, $2x' - 3y' + 14 = 0$

অতএব, নতুন পদ্ধতিতে সরলরেখাটির সমীকরণ হল $2x - 3y + 14 = 0$

## অনুশীলনী 10.5

1. নিম্নে প্রদত্ত প্রতিটি ক্ষেত্রে বিন্দুগুলোর নতুন স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যদি একটি রূপান্তরের ফলে মূলবিন্দুটি (–3, –2) বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয় :

   (i) (1, 1) (উত্তর : (4, 3)) (ii) (0, 1) (উত্তর : (3, 3))

   (iii) (5, 0) (উত্তর : (8, 2)) (iv) (–1, –2) (উত্তর : (2, 0))

   (v) (3, –5) (উত্তর : (6, –3))

2. যখন মূলবিন্দুকে (1, 1) বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হয় তখন প্রদত্ত প্রত্যেকটি সমীকরণ কীরূপ হবে তা নির্ণয় করো :

(i) $x^2+xy-3y^2-y+2=0$ (উত্তর : $x^2-3y^2+xy+3x-6y+1=0$)

(ii) $xy-y^2-x+y=0$ (উত্তর : $xy-y^2=0$)

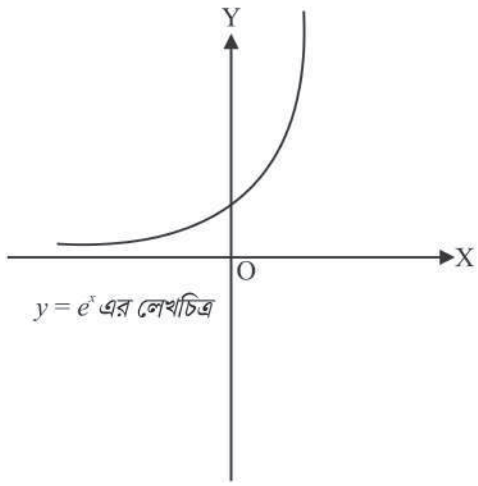
(iii) $xy-x-y+1=0$ (উত্তর : $xy=0$)

## অধ্যায় 13

### 13.5 সূচকীয় এবং লগারিদমিক অপেক্ষকের সীমা (*Limits Involving Exponential and Logarithmic Functions*)

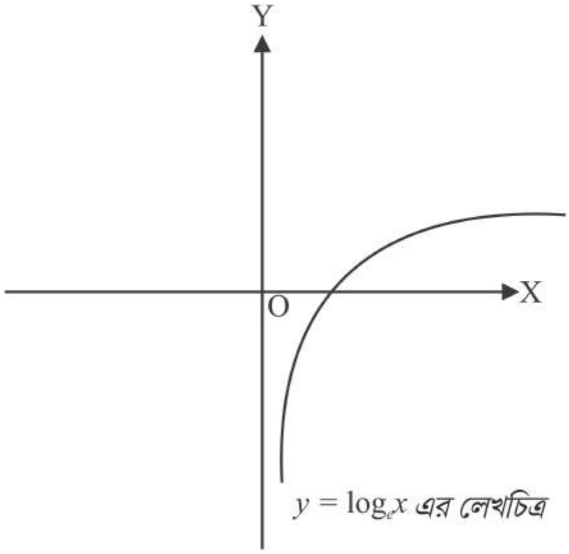
সূচকীয় এবং লগারিদমিক রাশিমালার অপেক্ষকের সীমা নির্ণয়ের আলোচনার আগে আমরা এদুটি অপেক্ষকের ক্ষেত্র বা অঞ্চল (*domain*), প্রসার (*range*) এবং তাদের খসরা লেখচিত্র সম্বন্ধে পরিচিত হব।

বিখ্যাত সুইস গণিতজ্ঞ লিয়োনার্ড অয়লার (1707–1783) (*Leonhard Euler*) $e$ সংখ্যাটি প্রবর্তন করেন, যার মান 2 এবং 3 এর মধ্যবর্তী। সূচকীয় অপেক্ষককে সংজ্ঞায়িত করতে এই সংখ্যাটির প্রয়োজন হয় এবং অপেক্ষকটি হল $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$। এটির ক্ষেত্র $\mathbf{R}$ এবং প্রসার হল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট। সূচকীয় অপেক্ষকের লেখচিত্র অর্থাৎ $y = e^x$ এর লেখচিত্র, চিত্র 13.11 তে দেওয়া হল।




**চিত্র 13.11**

অনুরূপভাবে, একটি লগারিদমিক অপেক্ষককে প্রকাশ করা হয় $\log_e \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ রূপে, যেখানে $\log_e x = y$ যদি এবং কেবল যদি $e^y = x$ হয়। যার ক্ষেত্র (*domain*) হল $\mathbf{R}^+$, যেটি হল সব ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং প্রসার (*range*) হল $\mathbf{R}$। লগারিদমিক অপেক্ষক $y = \log_e x$ -এর লেখচিত্রটি চিত্র 13.12 তে দেখানো হল।




চিত্র 13.12

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$, সিদ্ধান্তটি প্রমাণ করার জন্য আমরা $\frac{e^x - 1}{x}$ রাশিমালা যুক্ত একটি অসমতাকে নিম্নরূপে বিচার করব :

$\frac{1}{1+|x|} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + (e-2)\,|x|, [-1, 1] \sim \{0\}$ তে সব $x$ এর জন্য সত্য হয়।

**উপপাদ্য 6** প্রমাণ করো $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

**প্রমাণ** উপরের অসমতাকে প্রয়োগ করে আমরা পাই—

$$\frac{1}{1+|x|} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + |x|\,(e-2),\ x \in [-1, 1] \sim \{0\}$$

আরও, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+\lim_{x\to 0}|x|} = \frac{1}{1+0} = 1$

এবং $\lim_{x\to 0}\left[1+(e-2)|x|\right]=1+(e-2)\lim_{x\to 0}|x|=1+(e-2)0=1$

সুতরাং, *Sandwich* উপপাদ্য অনুযায়ী আমরা পাই

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x \quad 1}{x}=1$$

**উপপাদ্য 7** প্রমাণ করো যে, $\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$

**প্রমাণ** ধরো, $\frac{\log_e(1+x)}{x}=y$ সুতরাং,

$$\log_e(1+x)=xy$$

$$\Rightarrow 1+x=e^{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{xy}-1}{x}=1$$

অথবা, $\frac{e^{xy}-1}{xy}.y=1$

$\Rightarrow \lim_{xy\to 0}\frac{e^{xy}-1}{xy}\lim_{x\to 0}y=1$ (যেহেতু $x\to 0$ হলে $xy\to 0$)

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}y=1\left(\text{যেহেতু } \lim_{xy\to 0}\frac{e^{xy}-1}{xy}=1\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$$

**উদাহরণ 5** মান নির্ণয় করো : $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

**সমাধান** আমরা জানি,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{3x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3$$

$=3\left(\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\right)$, যেখানে $y=3x$

$$=3.1=3$$

**উদাহরণ 6** মান নির্ণয় করো : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{x}$

**সমাধান** আমরা জানি, $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1}{x}-\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1-1=0$$

**উদাহরণ 7** মান নির্ণয় করো : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log_e x}{x-1}$

**সমাধান** $1+h=x$ ধরো, সুতরাং যখন $x\to 1\Rightarrow h\to 0$

অতএব, $$\lim_{x\to 1}\frac{\log_e x}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h}=1\left(\text{যেহেতু } \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1\right)।$$

## অনুশীলনী 13.2

নিম্নে প্রদত্ত সীমাগুলোর মান নির্ণয় করো, যদি তাদের অস্তিত্ব থাকে :

**1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{x}$ (উত্তর : 4)

**2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2+x}-e^2}{x}$ (উত্তর : $e^2$)

**3.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{e^x-e^5}{x-5}$ (উত্তর : $e^5$)

**4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$ (উত্তর : 1)

**5.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x-e^3}{x-3}$ (উত্তর : $e^3$)

**6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1)}{1-\cos x}$ (উত্তর : 2)

**7.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_e(1+2x)}{x}$ (উত্তর : 2)

**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x^3)}{\sin^3 x}$ (উত্তর : 1)

# Notes

# Notes

**Be a Student of Students**

A teacher who establishes rapport with the taught, becomes one with them, learns more from them than he teaches them. He who learns nothing from his disciples is, in my opinion, worthless. Whenever I talk with someone I learn from him. I take from him more than I give him. In this way, a true teacher regards himself as a student of his students. If you will teach your pupils with this attitude, you will benefit much from them.

Talk to Khadi Vidyalaya Students, Sevagram
*Harijan Seva, 15 February 1942 (CW 75, p. 269)*

**Use All Resources to Be Constructive and Creative**

What we need is educationists with originality, fired with true zeal, who will think out from day to day what they are going to teach their pupils. The teacher cannot get this knowledge through musty volumes. He has to use his own faculties of observation and thinking and impart his knowledge to the children through his lips, with the help of a craft. This means a revolution in the method of teaching, a revolution in the teachers' outlook. Up till now you have been guided by inspector's reports. You wanted to do what the inspector might like, so that you might get more money yet for your institutions or higher salaries for yourselves. But the new teacher will not care for all that. He will say, '1 have done my duty to my pupil if I have made him a better man and in doing so I have used all my resources. That is enough for me'.

*Harijan, 18 February 1939 (CW 68, pp. 374-75)*