सत्यमेव जयते

ভারতের সংবিধান

প্রস্তাবনা

“আমরা, ভারতের জনগণ, ভারতকে সার্বভৌম, সমাজতান্ত্রিক, ধর্মনিরপেক্ষ, গণতান্ত্রিক, সাধারণতন্ত্ররূপে গড়ে তুলতে এবং তার সকল নাগরিকই যাতে সামাজিক, অর্থনৈতিক ও রাজনৈতিক, ন্যায়বিচার, চিন্তা, মতপ্রকাশ, বিশ্বাস, ধর্ম এবং উপাসনার স্বাধীনতা, সামাজিক প্রতিষ্ঠা অর্জন ও সুযোগের সমতা প্রতিষ্ঠা এবং তাদের সকলের মধ্যে ব্যক্তির মর্যাদা এবং জাতীয় ঐক্য ও সংহতি সুনিশ্চিতকরণের মাধ্যমে তাদের মধ্যে যাতে ভ্রাতৃত্বের ভাব গড়ে ওঠে তার জন্য সত্যনিষ্ঠার সঙ্গে শপথ গ্রহণ করে, আমাদের গণপরিষদে আজ ১৯৪৯ সালের ২৬ নভেম্বর, এতদ্দ্বারা এই সংবিধান গ্রহণ, বিধিবদ্ধ এবং নিজেদের অর্পণ করছি।”

গণিত

ভাগ - ২

দ্বাদশ শ্রেণির পাঠ্যবই

প্রস্তুতকরণ

জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, নতুন দিল্লি।
অনুবাদ ও অভিযোজন
রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, ত্রিপুরা সরকার।

এন সি ই আর টি
অনুমোদিত
বাংলা সংস্করণ

প্রথম প্রকাশ :
মার্চ, ২০২০

মূল্য : ১৫০ টাকা

মুদ্রণ : সত্যযুগ এমপ্লয়িজ কো-অপারেটিভ
ইন্ডাস্ট্রিয়াল সোসাইটি লিমিটেড
১৩ প্রফুল্ল সরকার স্ট্রিট, কলকাতা-৭২

গণিত (ভাগ-২)
দ্বাদশ শ্রেণির পাঠ্যবই
(এন সি ই আর টি-র
MATHEMATICS (Part II)
পাঠ্যবইয়ের ২০১৭ সালের অনূদিত সংস্করণ)

প্রকাশক : অধিকর্তা,
রাজ্য শিক্ষা গবেষণা
ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ
ত্রিপুরা

প্রচ্ছদ ও অক্ষর বিন্যাস
রাণা বণিক
মরণ শীল
পীযূষ পাল
সমীরণ দেবনাথ
সুদীপ দাস

ভূমিকা

২০০৬ সাল থেকে রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ প্রথম থেকে অষ্টম শ্রেণি পর্যন্ত প্রাথমিক ও উচ্চপ্রাথমিক স্তরের পাঠ্যপুস্তকের মুদ্রণ ও প্রকাশের দায়িত্ব পালন করে আসছে।

রাজ্যের বিদ্যালয়স্তরে উন্নত ও সমৃদ্ধতর পাঠ্যক্রম চালু করার লক্ষ্যে ত্রিপুরা রাজ্য শিক্ষা দপ্তরের প্রচেষ্টায় ২০১৯ শিক্ষাবর্ষ থেকে জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের (এন সি ই আর টি) পাঠ্যপুস্তকসমূহ গ্রহণ করার সিদ্ধান্ত নেওয়া হয়।

বাংলা বিষয় ছাড়া অন্যান্য বিষয়গুলোর জন্য জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের প্রকাশিত পুস্তকগুলোর অনূদিত ও অভিযোজিত সংস্করণ ২০১৯ সালে প্রথম প্রকাশ করা হয় এবং এ বছর ওইসব পুস্তকগুলোর পুনর্মুদ্রণ করা হল। এখানে উল্লেখ্য যে, বাংলা বিষয়ে পাঠ্যপুস্তক রচনা ও প্রকাশনার দায়িত্বও রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ পালন করে আসছে।

বিশাল এই কর্মকাণ্ডে যেসব শিক্ষক-শিক্ষিকা, অধ্যাপক-অধ্যাপিকা, শিক্ষাবিদ, অনুবাদক, অনুলেখক, মুদ্রণকর্মী ও শিল্পীরা আমাদের সঙ্গে থেকে নিরলসভাবে অক্লান্ত পরিশ্রমে এই উদ্যোগ বাস্তবায়িত করেছেন তাদের সবাইকে সকৃতজ্ঞ ধন্যবাদ জানাচ্ছি।

প্রকাশিত এই পাঠ্যপুস্তকটির উৎকর্ষ ও সৌন্দর্য বৃদ্ধির জন্য শিক্ষানুরাগী ও গুণীজনের মতামত ও পরামর্শ বিবেচিত হবে।

আগরতলা
মার্চ, ২০২০

উত্তম কুমার চাকমা
অধিকর্তা
রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ
ত্রিপুরা

উপদেষ্টা

ড. অর্ণব সেন, সহঅধ্যাপক, এন ই আর আই ই, শিলং

ড. অরূপ কুমার সাহা, সহঅধ্যাপক, আর আই ই, ভুবনেশ্বর

পাঠ্যপুস্তকটি যাঁরা অনুবাদ করেছেন :

১। মৃণাল কান্তি বৈদ্য, শিক্ষক
২। জয়দীপ চৌধুরী, শিক্ষক
৩। প্রশান্ত সরকার, শিক্ষক
৪। প্রদীপ দেবনাথ, শিক্ষক
৫। সোমেন দেবনাথ, শিক্ষক
৬। সুমন দাস, শিক্ষক
৭। অমরেশ দেবনাথ, শিক্ষক
৮। মিঠুন পাল, শিক্ষক
৯। রাজেশ সাহা, শিক্ষক
১০। বিদুর দেবনাথ, শিক্ষক
১১। লিটন দত্ত, শিক্ষক

ভাষা-পরিমার্জনায়

শ্রী গৌতম রুদ্র পাল

শ্রীমতী এমেলী নাগ

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

NCERT appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P.K. Jain for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 November 2006

Preface

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) had constituted 21 Focus Groups on Teaching of various subjects related to School Education, to review the National Curriculum Framework for School Education - 2000 (NCFSE - 2000) in face of new emerging challenges and transformations occurring in the fields of content and pedagogy under the contexts of National and International spectrum of school education. These Focus Groups made general and specific comments in their respective areas. Consequently, based on these reports of Focus Groups, National Curriculum Framework (NCF)-2005 was developed.

NCERT designed the new syllabi and constituted Textbook Development Teams for Classes XI and XII to prepare textbooks in Mathematics under the new guidelines and new syllabi. The textbook for Class XI is already in use, which was brought in 2005.

The first draft of the present book (Class XII) was prepared by the team consisting of NCERT faculty, experts and practicing teachers. The draft was refined by the development team in different meetings. This draft of the book was exposed to a group of practicing teachers teaching Mathematics at higher secondary stage in different parts of the country, in a review workshop organised by the NCERT at Delhi. The teachers made useful comments and suggestions which were incorporated in the draft textbook. The draft textbook was finalised by an editorial board constituted out of the development team. Finally, the Advisory Group in Science and Mathematics and the Monitoring Committee constituted by the HRD Ministry, Government of India have approved the draft of the textbook.

In the fitness of things, let us cite some of the essential features dominating the textbook. These characteristics have reflections in almost all the chapters. The existing textbook contains thirteen main chapters and two appendices. Each chapter contains the followings :

- Introduction: Highlighting the importance of the topic; connection with earlier studied topics; brief mention about the new concepts to be discussed in the chapter.
- Organisation of chapter into sections comprising one or more concepts/subconcepts.
- Motivating and introducing the concepts/subconcepts. Illustrations have been provided wherever possible.

- Proofs/problem solving involving deductive or inductive reasoning, multiplicity of approaches wherever possible have been inducted.
- Geometric viewing / visualisation of concepts have been emphasized whenever needed.
- Applications of mathematical concepts have also been integrated with allied subjects like Science and Social Sciences.
- Adequate and variety of examples/exercises have been given in each section.
- For refocusing and strengthening the understanding and skill of problem solving and applicabilities, miscellaneous types of examples/exercises have been provided involving two or more subconcepts at a time at the end of the chapter. The scope of challenging problems to talented minority have been reflected conducive to the recommendation as reflected in NCF-2005.
- For more motivational purpose, brief historical background of topics have been provided at the end of the chapter and at the beginning of each chapter, relevant quotation and photograph of eminent mathematician who have contributed significantly in the development of the topic undertaken, are also provided.
- Lastly, for direct recapitulation of main concepts, formulas and results, brief summary of the chapter has also been provided.

I am thankful to Professor Krishan Kumar, Director, NCERT who constituted the team and invited me to join this national endeavour for the improvement of Mathematics education. He has provided us with an enlightened perspective and a very conducive environment. This made the task of preparing the book much more enjoyable and rewarding. I express my gratitude to Professor J.V. Narlikar, Chairperson of the Advisory Group in Science and Mathematics, for his specific suggestions and advice towards the improvement of the book from time to time. I, also, thank Professor G. Ravindra, Joint Director, NCERT for his help from time to time.

I express my sincere thanks to Professor Hukum Singh, Chief Coordinator and Head, DESM, Dr. V. P. Singh, Coordinator and Professor, S. K. Singh Gautam who have been helping for the success of this project academically as well as administratively. Also, I would like to place on records my appreciation and thanks to all the members of the team and the teachers who have been associated with this noble cause in one or the other form.

PAWAN K. JAIN
Chief Advisor

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor,* Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P.K. Jain, *Professor,* Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* and *Head,* DESM, NCERT, New Delhi

Members

A.K. Rajput, *Reader,* RIE, Bhopal, M.P.
Arun Pal Singh, *Sr. Lecturer,* Department of Mathematics, Dayal Singh College, University of Delhi, Delhi
B.S.P. Raju, *Professor,* RIE Mysore, Karnataka
C.R. Pradeep, *Assistant Professor,* Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, Karnataka
D.R. Sharma, *P.G.T.,* Jawahar Navodaya Vidyalaya, Mungeshpur, Delhi
R.P. Maurya, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi
Ram Avtar, *Professor* (Retd.) and *Consultant,* DESM, NCERT, New Delhi
S.K. Kaushik, *Reader,* Department of Mathematics, Kirori Mal College, University of Delhi, Delhi
S.K.S. Gautam, *Professor,* DESM, NCERT, New Delhi
S.S. Khare, *Pro-Vice-Chancellor,* NEHU, Tura Campus, Meghalaya
Sangeeta Arora, *P.G.T.,* Apeejay School, Saket, New Delhi
Shailja Tewari, *P.G.T.,* Kendriya Vidyalaya, Barkakana, Hazaribagh, Jharkhand
Sunil Bajaj, *Sr. Specialist,* SCERT, Gurgaon, Haryana
Vinayak Bujade, *Lecturer,* Vidarbha Buniyadi Junior College, Sakkardara Chowk, Nagpur, Maharashtra

Member-coordinator

V.P. Singh, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi

Constitution of India

Part IV A (Article 51 A)

Fundamental Duties

It shall be the duty of every citizen of India —

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers, wildlife and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence;

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

*(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be, ward between the age of six and fourteen years.

Note: The Article 51A containing Fundamental Duties was inserted by the Constitution (42nd Amendment) Act, 1976 (with effect from 3 January 1977).

*(k) was inserted by the Constitution (86th Amendment) Act, 2002 (with effect from 1 April 2010).

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: Jagdish Saran, *Professor,* Deptt. of Statistics, University of Delhi; Quddus Khan, *Lecturer*, Shibli National P.G. College, Azamgarh (U.P.); P.K. Tewari, *Assistant Commissioner* (Retd.), Kendriya Vidyalaya Sangathan; S.B. Tripathi, *Lecturer,* R.P.V.V., Surajmal Vihar, Delhi; O.N. Singh, *Reader,* RIE, Bhubaneswar, Orissa; Miss Saroj, *Lecturer,* Govt. Girls Senior Secondary School No.1, Roop Nagar, Delhi; P. Bhaskar Kumar, *P.G.T.,* Jawahar Navodaya Vidyalaya, Lepakshi, Anantapur, (A.P.); Mrs. S. Kalpagam, *P.G.T.,* K.V. NAL Campus, Bangalore; Rahul Sofat, *Lecturer,* Air Force Golden Jubilee Institute, Subroto Park, New Delhi; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri, District Centre, New Delhi; Janardan Tripathi, *Lecturer,* Govt. R.H.S.S., Aizawl, Mizoram and Ms. Sushma Jaireth, *Reader*, DWS, NCERT, New Delhi.

The Council acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, *Incharge,*Computer Station; Sajjad Haider Ansari, Rakesh Kumar and Nargis Islam, *D.T.P. Operators;* Monika Saxena, *Copy Editor;* and Abhimanu Mohanty, *Proof Reader*.

The contribution of APC-Office, administration of DESM and Publication Department is also duly acknowledged.

দ্বাদশ শ্রেণির গণিত (ভাগ-১)-এর
সূচিপত্র

সূচিপত্র

অধ্যায় 7

সমাকল (INTEGRALS)

❖ *Just as a mountaineer climbs a mountain – because it is there, so a good mathematics student studies new material because it is there. — JAMES B. BRISTOL* ❖

7.1 ভূমিকা

G .W. Leibnitz
(1646 -1716)

অবকল গণিত অবকলজ নির্ণয়ের ধারণার উপর কেন্দ্রীভূত। অপেক্ষকের লেখচিত্রে স্পর্শকরেখা সংজ্ঞায়িতকরণের সমস্যা সমাধানে এবং এ ধরনের রেখার প্রবণতা নির্ণয় করা ছিল অবকলজ-এর মূল প্রেষণা (motivation)। সমাকল গণিত, অপেক্ষকের লেখচিত্র দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলজনিত সমস্যা সমাধান এবং গণনার জন্য প্রেরিত হয়।

যদি একটি অপেক্ষক f অন্তরালে অবকলনযোগ্য হয়, অর্থাৎ I অন্তরালের প্রতিটি বিন্দুতে এর অন্তরকলজ (বা অবকলজ) f' -এর অস্তিত্ব থাকে, তবে একটি প্রশ্ন স্বভাবতই জাগে যে I -এর প্রতিটি বিন্দুতে প্রদত্ত f' -এর জন্য, আমরা কি অপেক্ষকটি নির্ণয় করতে পারি? যেসব অপেক্ষক থেকে আমরা একটি অপেক্ষক অবকলজ রূপে পেয়ে থাকি, সেইসব অপেক্ষককে প্রতি-অবকলজ বা প্রতি-অন্তরকলজ (আদিরূপ) বলা হয়। তাছাড়া, এসব অবকলজ (বা অন্তরকলজ) যে সূত্রগুলো দ্বারা পাওয়া যায়, এদের অপেক্ষকটির অনির্দিষ্ট সমাকল ***(indefinite integral)*** বলা হয় এবং এমন প্রতি-অবকলজ নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে সমাকলন (integration) বলা হয়। অনেক বাস্তব পরিস্থিতির ক্ষেত্রে এ ধরনের সমস্যাগুলোর উদ্ভব হয়। উদাহরণস্বরূপ, যদি আমরাএকটি বস্তুর কোনো মুহূর্তে এর তাৎক্ষণিক বেগ জেনে থাকি, তখন একটি স্বাভাবিক প্রশ্ন জাগে, অর্থাৎ আমরা কি বস্তুটির যে-কোনো মুহূর্তের অবস্থান নির্ণয় করতে পারি? এরূপ অনেক এমন ব্যবহারিক এবং তাত্ত্বিক পরিস্থিতি আসে যাদের সাথে সমাকলন প্রক্রিয়াটি যুক্ত হয়। সমাকলন বিদ্যার বিকাশ নিম্নলিখিত প্রকার সমস্যাগুলোর সমাধানের প্রচেষ্টার প্রতিফলন :

(a) যদি একটি অপেক্ষকের অবকলজ প্রদত্ত হয়, তবে ওই অপেক্ষককে নির্ণয় জনিত সমস্যা।

(b) কিছু শর্তসাপেক্ষে একটি অপেক্ষকের লেখচিত্র দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়জনিত সমস্যা।

এই দুই ধরনের সমস্যাগুলো সমাকলের দুটি রূপকে পরিচালিত করে, যেমন অনির্দিষ্ট এবং নির্দিষ্ট সমাকল, যেগুলো একযোগে সমাকলবিদ্যা (***Integral Calculus***) গঠন করে।

অনির্দিষ্ট সমাকল এবং নির্দিষ্ট সমাকল উভয়ের মধ্যে একটি সংযোগ আছে যেটি কলনবিদ্যার মৌলিক উপপাদ্য (***Fundamental Theorem of Calculus***) রূপে পরিচিত এবং যা নির্দিষ্ট সমাকলকে বিজ্ঞান ও কারিগরিবিদ্যায় ব্যবহারিক সরঞ্জাম রূপে তৈরি করে। তাছাড়া নির্দিষ্ট সমাকল বিভিন্ন শাখায় যেমন অর্থবিদ্যা, রাজস্ব এবং সম্ভাবনা তত্ত্ব এর অনেক মজাদার সমস্যার সমাধান করে থাকে।

এই অধ্যায়ে, আমরা অনির্দিষ্ট সমাকল এবং নির্দিষ্ট সমাকল এবং কিছু সমাকলের কৌশল সহ এদের প্রাথমিক ধর্মাবলি নিয়ে আমাদের অধ্যয়ন সীমাবদ্ধ রাখব।

7.2 অবকলনের (বা অন্তরকলনের) বিপরীত প্রক্রিয়া হিসেবে সমাকলন (Integration as an Inverse Process of Differentiation)

সমাকলন হল অবকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া। একটি অপেক্ষকের অবকলের পরিবর্তে আমাদেরকে অবকলজ দেওয়া হয় এবং বলা হয় যে আদিরূপ (primitive), অর্থাৎ মূল অপেক্ষক নির্ণয় করতে, এ ধরনের প্রক্রিয়াকে বলা হয় সমাকলন বা প্রতি-অবকলন। চলো আমরা নীচের উদাহরণগুলো ভেবে দেখি ঃ

আমরা জানি যে, $$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 \qquad \ldots (2)$$

এবং $$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \ldots (3)$$

আমরা (1)-এ লক্ষ করি যে, $\cos x$ হল $\sin x$ -এর অবকলজ। আমরা বলতে পারি যে $\sin x$ হল $\cos x$ -এর প্রতি-অবকলজ (বা সমাকল)। অনুরূপে, (2) এবং (3) -এ $\frac{x^3}{3}$ ও e^x হল যথাক্রমে x^2 ও e^x -এর প্রতি অবকলজ (বা সমাকল)। আবার, আমরা লক্ষ করি যে, কোনো বাস্তব সংখ্যা C, ধ্রুবক অপেক্ষক রূপে পরিগণিত হয়, যার অবকলজ শূন্য এবং তাই আমরা (1), (2) এবং (3) নিম্নরূপে লিখতে পারি :

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \mathrm{C}) = \cos x\,,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + \mathrm{C}\right) = x^2 \text{ এবং } \frac{d}{dx}(e^x + \mathrm{C}) = e^x$$

সুতরাং উপরে উল্লেখিত অপেক্ষকগুলোর প্রতি-অবকলজ (বা সমাকল) অনন্য নয়। প্রকৃতপক্ষে, এসব প্রতিটি অপেক্ষকের অসীম সংখ্যক প্রতি-অবকলজের অস্তিত্ব আছে যা বাস্তব সংখ্যার সেট হতে যদৃচ্ছভাবে C-এর মান নিয়ে পাওয়া যায়। এজন্য C কে প্রথাগতভাবে **সেচ্ছ বা যদৃচ্ছ ধ্রুবক** (***arbitrary constant***) হিসেবে ধরা হয়। আসলে C হল **প্রাচল** (***parameter***) যার বিভিন্ন মানের জন্য প্রদত্ত অপেক্ষকটির বিভিন্ন প্রতি-অবকলজ (বা সমাকল) পাওয়া যায়। আরও ব্যাপকভাবে, যদি একটি অপেক্ষক এরূপ যে, $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)\,,\ \forall x \in \mathrm{I}$ (অন্তরাল) হয়, তবে কোনো যদৃচ্ছ বাস্তব সংখ্যা C (সমাকলন ধ্রুবক রূপেও পরিচিত)-এর জন্য,

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}] = f(x),\ x \in \mathrm{I}$$

সুতরাং, $\{F + C, C \in \mathbf{R}\}$ f -এর প্রতি-অবকলজের একটি পরিবারকে প্রকাশ করে।

মন্তব্য একই অবকলজযুক্ত দুটি অপেক্ষকের পার্থক্য ধ্রুবক হয়। এটি দেখানোর জন্য, ধরো I অন্তরালে g এ বং h হল একই অবকলজযুক্ত দুটি অপেক্ষক।

ধরো, অপেক্ষক $f = g - h$ সংজ্ঞাত হয় $f(x) = g(x) - h(x),\ \forall x \in \mathrm{I}$ দ্বারা

তাহলে, $\dfrac{df}{dx} = f' = g' - h'$ বোঝায় $f'(x) = g'(x) - h'(x),\quad \forall x \in \mathrm{I}$

অথবা, $f'(x) = 0,\ \forall x \in \mathrm{I}$ কল্পনানুসারে,

অর্থাৎ I এর উপর x -এর সাপেক্ষে f এর পরিবর্তনের হার শূন্য এবং তাই f হল ধ্রুবক।

উপরোক্ত মন্তব্যের দৃষ্টিকোণ থেকে, এটি যুক্তিসঙ্গাত যে $\{F + C, C \in \mathbf{R}\}$ পরিবারটি f -এর সকল সম্ভাব্য প্রতি অন্তরকলজসমূহ প্রদান করে।

আমরা একটি নতুন চিহ্নের অবতারণা করছি, যেমন $\int f(x)\,dx$ যা প্রতি-অন্তরকলজের সমগ্র শ্রেণিকে উপস্থাপন করে এবং যাকে x -এর সাপেক্ষে f -এর অনির্দিষ্ট সমাকল (indefinite integral of f with respect to x) রূপে পড়া হয়।

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

প্রতীক (Notation) $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, প্রদত্ত হলে, আমরা লেখি $y = \int f(x)\,dx$ ।

বোঝার সুবিধার জন্য, নিম্নলিখিত সংকেত/পরিভাষা/শব্দগুচ্ছ এদের অর্থসহ নীচের সারণি (7.1) -এ দেওয়া হল।

সারণি 7.1

সংকেত / পরিভাষা/শব্দগুচ্ছ	অর্থ (Meaning)
$\int f(x)\,dx$	x -এর সাপেক্ষে f -এর সমাকল
$\int f(x)\,dx$ -এ $f(x)$	সমাকল্য
$\int f(x)\,dx$ -এ x	সমাকলনের চলরাশি
সমাকল করা (Integrate)	সমাকল নির্ণয় করা
f -এর একটি সমাকল	একটি অপেক্ষক F এরূপ যে $F'(x) = f(x)$
সমাকলন (Integration)	সমাকল নির্ণয়ের প্রক্রিয়া
সমাকলন ধ্রুবক	যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা C, ধ্রুবক অপেক্ষক হিসেবে বিবেচিত।

আমরা ইতোমধ্যে অনেক গুরুত্বপূর্ণ অপেক্ষকের অন্তরকলজ সম্পর্কে জেনেছি। আমরা এসব অপেক্ষকগুলোর ঠিক অনুরূপ সমাকল নির্ণয়ের সূত্র (আদর্শ সূত্র হিসেবে পরিগণিত), যা নিচে লিপিবদ্ধ করা হল, যেগুলো অপর অপেক্ষকসমূহের সমাকল নির্ণয়ে প্রয়োগ করা হয়।

অন্তরকলজ (Derivatives)	**সমাকল (প্রতি-অন্তরকলজ) Integrals (Anti derivatives)**
(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$;	$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\mathrm{C}$, $n\neq -1$
বিশেষত, আমরা লক্ষ করি,	
$\frac{d}{dx}(x)=1$;	$\int dx=x+\mathrm{C}$
(ii) $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$;	$\int \cos x\,dx=\sin x+\mathrm{C}$
(iii) $\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x$;	$\int \sin x\,dx=-\cos x+\mathrm{C}$
(iv) $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$;	$\int \sec^2 x\,dx=\tan x+\mathrm{C}$
(v) $\frac{d}{dx}(-\cot x)=cosec^2 x$;	$\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx=-\cot x+\mathrm{C}$
(vi) $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$;	$\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+\mathrm{C}$
(vii) $\frac{d}{dx}(-\mathrm{cosec}\, x)=\mathrm{cosec}\, x\cot x$;	$\int \mathrm{cosec}\, x\cot x\,dx=-\mathrm{cosec}\, x+\mathrm{C}$
(viii) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x+\mathrm{C}$
(ix) $\frac{d}{dx}\left(-\cos^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\cos^{-1}x+\mathrm{C}$
(x) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$;	$\int \frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+\mathrm{C}$
(xi) $\frac{d}{dx}\left(-\cot^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$;	$\int \frac{dx}{1+x^2}=-\cot^{-1}x+\mathrm{C}$

(xii) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\sec^{-1} x+\mathrm{C}$

(xiii) $\frac{d}{dx}\left(-\operatorname{cosec}^{-1} x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}= \quad \operatorname{cosec}^{-1} x+\mathrm{C}$

(xiv) $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$; $\int e^x dx=e^x+\mathrm{C}$

(xv) $\frac{d}{dx}(\log|x|)=\frac{1}{x}$; $\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+\mathrm{C}$

(xvi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right)=a^x$; $\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+\mathrm{C}$

দ্রষ্টব্য বাস্তবে, আমরা সাধারণত, বিভিন্ন অপেক্ষকগুলো যে সব অন্তরালে সংজ্ঞাত তা উল্লেখ করি না। যা হোক বিশেষ কোনো সমস্যার ক্ষেত্রে এটি মনে রাখতে হবে।

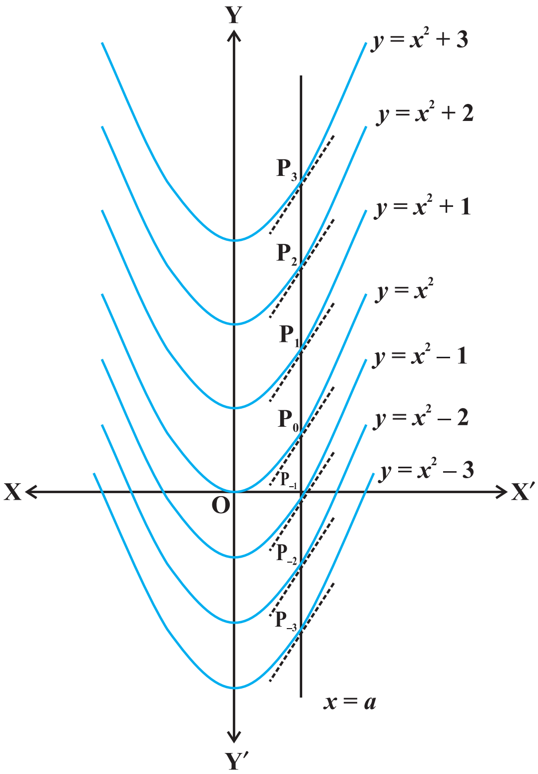
7.2.1 অনির্দিষ্ট সমাকলের জ্যামিতিক তাৎপর্য (Geometrical interpretation of indefinite integral)

ধরো $f(x) = 2x$। তাহলে $\int f(x)\, dx = x^2 + \mathrm{C}$। C -এর বিভিন্ন মানের জন্য আমরা বিভিন্ন সমাকল পাই। কিন্তু এসব সমাকলগুলো জ্যামিতিকভাবে খুবই সদৃশ।

সুতরাং, $y = x^2 + \mathrm{C}$, যেখানে C যদৃচ্ছ ধ্রুবক, সমাকলের একটি পরিবারকে বোঝায়। C-এর বিভিন্ন মানের জন্য, আমরা এই পরিবারের বিভিন্ন সদস্যদের পাই। এগুলো এক সাথে অনির্দিষ্ট সমাকল গঠন করে। এক্ষেত্রে, প্রতিটি সমাকল y-অক্ষ বরাবর একটি অধিবৃত্তকে প্রকাশ করে।

স্পষ্টতই, $\mathrm{C} = 0$ এর জন্য, আমরা পাই $y = x^2$, একটি অধিবৃত্ত যার শীর্ষ মূলবিন্দু। $\mathrm{C} = 1$ এর জন্য $y=x^2+1$ বক্রটি, $y=x^2$ অধিবৃত্তকে y -অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর এক একক স্থানান্তর করে পাওয়া যায়। $\mathrm{C} = 1$ এর জন্য $y=x^2-1$ বক্রটি, $y=x^2$ অধিবৃত্তকে y -অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর এক একক স্থানান্তর করে পাওয়া যায়। এভাবে C -এর প্রতিটি ধনাত্মক মানের জন্য, পরিবারের প্রতিটি অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু y -অক্ষের ধনাত্মক দিকেএবং C-এর প্রতিটি ঋণাত্মক মানের জন্য, পরিবারের প্রতিটি অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু y অক্ষের ঋণাত্মক দিকে পাওয়া যায়। চিত্র 7.1 -এ এদের কয়েকটি দেখানো হল।

চলো, এখন $x = a$ রেখাটি দ্বারা এসব অধিবৃত্তগুলোর ছেদগুলোকে বিবেচনা করি। চিত্র 7.1 -এ আমরা $a > 0$ নিয়েছি। একই ব্যাপার সত্য হবে যখন $a < 0$ হয়। যদি $x = a$ রেখাটি $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 1$, $y = x^2 - 2$ অধিবৃত্তগুলোকে যথাক্রমে P_0, P_1, P_2, P_{-1}, P_{-2} ইত্যাদিতে ছেদ করে, তবে এসব বিন্দুগুলোতে $\frac{dy}{dx}$ -এর মান $2a$ হয়। এটি ইঙ্গিত করে যে বক্ররেখাগুলোর এসকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলো সমান্তরাল হয়। অতএব, $\int 2x\, dx = x^2 + \mathrm{C} = \mathrm{F_C}(x)$ (ধরো), বোঝায় যে, $y = \mathrm{F_C}(x)$, $\mathrm{C} \in \mathbf{R}$ বক্ররেখা



চিত্র 7.1

সমূহের সাথে $x = a$, $(a \in \mathbf{R})$ সরলরেখার ছেদবিন্দুতে সব স্পর্শকগুলো সমান্তরাল হয়।

তাছাড়া, $\int f(x)dx = F(x) + C = y$ (ধরো), বিবৃত সমীকরণটি একটি বক্রের পরিবারকে উপস্থাপন করে। C -এর বিভিন্ন মানের সাথে পরিবারের বিভিন্ন সদস্য সম্পর্কিত এবং এসব সদস্যগুলো নিজেদের মধ্যে সমান্তরাল স্থানান্তরকরণের মাধ্যমে প্রাপ্ত হয়। এটিই হল অনির্দিষ্ট সমাকলের জ্যামিতিক তাৎপর্য।

7.2.2 অনির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি ধর্ম (Some properties of indefinite integral)

এই উপবিভাগে, আমরা অনির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি ধর্ম নির্ণয় করব :

(I) অবকলন এবং সমাকলন পরস্পর বিপরীত প্রক্রিয়া, নিম্নলিখিত ফলাফল অনুসারে ঃ

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

এবং $$\int f'(x)\,dx = f(x) + C,$$ C যে-কোনো স্বেচ্ছ ধ্রুবক।

প্রমাণ ধরো, F হল f এর একটি প্রতি-অন্তরকলজ, অর্থাৎ

$$\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$$

তাহলে, $$\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$$

অতএব, $$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}(\mathrm{F}(x) + \mathrm{C})$$

$$= \frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$$

অনুরূপে, আমরা লক্ষ করি যে

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

এবং তাই $$\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathrm{C}$$

যেখানে C হল স্বেচ্ছ ধ্রুবক যাকে সমাকলন ধ্রুবক বলা হয়।

(II) একই অবকলজ যুক্ত দুটি অনির্দিষ্ট সমাকল একই পরিবারের বক্রকে নির্দেশ করে এবং তাই এরা সমতুল্য।

প্রমাণ ধরো f এবং g দুটি অপেক্ষক এরূপ যে

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$$

অথবা, $$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx\right] = 0$$

অতএব $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx = \mathrm{C}$, যেখানে C যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা (কেন?)

বা, $$\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + \mathrm{C}$$

সুতরাং, বক্রসমূহের পরিবারগুলো $\left\{\int f(x)\,dx + \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_1 \in \mathrm{R}\right\}$

এবং $\left\{\int g(x)\,dx + \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_2 \in \mathrm{R}\right\}$ অভিন্ন।

অতএব, এদিক থেকে, $\int f(x)\,dx$ এবং $\int g(x)\,dx$ সমতুল্য।

> দ্রষ্টব্য $\left\{\int f(x)\,dx + C_1, C_1 \in \mathbf{R}\right\}$ এবং $\left\{\int g(x)\,dx + C_2, C_2 \in \mathbf{R}\right\}$ পরিবারগুলোর সমতুল্যতাকে প্রথাগতরূপে $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$ লিখে প্রাচলের উল্লেখ না করে প্রকাশ করা হয়।

(III) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

প্রমাণ ধর্ম (I) প্রয়োগে, আমরা পাই

$$\frac{d}{dx}\left[\int [f(x) + g(x)]\,dx\right] = f(x) + g(x) \qquad \ldots (1)$$

অপরদিকে, আমরা পাই যে

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$$

$$= f(x) + g(x) \qquad \ldots (2)$$

এরূপে, ধর্ম (II) এর দিক থেকে, (1) ও (2) থেকে এটি পাওয়া যায় যে,

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

(IV) যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা k -এর জন্য, $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

প্রমাণ ধর্ম (I) দ্বারা, $\frac{d}{dx}\int k\, f(x)\,dx = k\, f(x)$.

তাছাড়া, $\frac{d}{dx}\left[k\int f(x)\,dx\right] = k\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = k\, f(x)$

অতএব, ধর্ম (II) প্রয়োগে, আমরা পাই $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ ।

(V) ধর্ম (III) ও (IV) -কে অসীম সংখ্যক অপেক্ষক $f_1, f_2, \ldots, f_n$ এবং বাস্তব সংখ্যা $k_1, k_2, \ldots, k_n$ এর জন্য সাধারণীকরণে পাওয়া যায়

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)]\,dx$$

$$= k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + k_n\int f_n(x)\,dx.$$

প্রদত্ত অপেক্ষকের একটি প্রতি-অন্তরকলজ নির্ণয়ে, আমরা স্বজ্ঞাত রূপে এমন একটি অপেক্ষকের খোঁজ করি যার অন্তরকলজ হল প্রদত্ত অপেক্ষক। নির্ণেয় অপেক্ষকের এধরনের খোঁজ, যা প্রদত্ত অপেক্ষকের প্রতি-অন্তরকলজ নির্ণয়ের জন্য প্রয়োজনীয়, একে পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে সমাকলন বলা হয়। কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে এর বর্ণনা করছি।

উদাহরণ 1 পর্যবেক্ষণ পদ্ধতি প্রয়োগে নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর প্রতিটির প্রতি-অন্তরকলজ নির্ণয় করো ঃ

(i) $\cos 2x$ (ii) $3x^2 + 4x^3$ (iii) $\frac{1}{x}, x \neq 0$

সমাধান

(i) আমরা এমন একটি অপেক্ষকের খোঁজ করব যার অন্তরকলজ হল $\cos 2x$ । মনে করে দেখো যে

$$\frac{d}{dx}\sin 2x = 2\cos 2x$$

অথবা $\cos 2x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

অতএব, $\cos 2x$ -এর একটি প্রতি-অন্তরকলজ হল $\frac{1}{2}\sin 2x$

(ii) আমরা একটি অপেক্ষক খুঁজি যার অন্তরকলজ হল $3x^2 + 4x^3$ । লক্ষ করো যে

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^4\right) = 3x^2 + 4x^3.$$

অতএব, $3x^2 + 4x^3$ এর প্রতি অন্তরকলজ হল $x^3 + x^4$

(iii) আমরা জানি যে

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, x > 0 \text{ এবং } \frac{d}{dx}[\log(-x)] = \frac{1}{x}(\quad 1) = \frac{1}{x}, x < 0$$

উপরেরগুলোর সমন্বয়ে, আমরা পাই $\frac{d}{dx}\left(\log|x|\right) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

অতএব, $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$ হল $\frac{1}{x}$ এর একটি প্রতি-অন্তরকলজ।

উদাহরণ 2 নিম্নলিখিত সমাকলগুলো নির্ণয় করো ঃ

(i) $\int \frac{x^3 - 1}{x^2}\,dx$ (ii) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 1)\,dx$ (iii) $\int (x^{\frac{3}{2}} + 2e^x - \frac{1}{x})\,dx$

সমাধান

(i) আমরা পাই,

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2}\,dx = \int x\,dx - \int x^{\quad 2}\,dx \qquad \text{(ধর্ম V দ্বারা)}$$

$$= \left(\frac{x^{1+1}}{1+1}+C_1\right)-\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C_2\right);$$ C_1, C_2 হল সমাকলন ধ্রুবকসমূহ।

$$= \frac{x^2}{2}+C_1-\frac{x^{-1}}{-1}-C_2 = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C_1-C_2$$

$$= \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C,$$ যেখানে $C = C_1 - C_2$ হল অপর সমাকলন ধ্রুবক।

দ্রষ্টব্য এখন থেকে পরবর্তীতে, আমরা সর্বশেষ উত্তরের শুধু একটি মাত্র সমাকলন ধ্রুবক লিখব।

(ii) আমরা পাই,

$$\int (x^{\frac{2}{3}}+1)\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx + \int dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+x+C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+x+C$$

(iii) আমরা পাই, $\int (x^{\frac{3}{2}}+2e^x-\frac{1}{x})\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx + \int 2e^x\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+2e^x-\log|x|+C$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2e^x-\log|x|+C$$

উদাহরণ 3 নিম্নলিখিত সমাকলগুলো নির্ণয় করো ঃ

(i) $\int (\sin x + \cos x)\,dx$ (ii) $\int \operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec} x + \cot x)\,dx$

(iii) $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

সমাধান

(i) আমরা পাই,

$$\int (\sin x + \cos x)\,dx = \int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx$$

$$= -\cos x + \sin x + C$$

(ii) আমরা পাই,

$$\int (\text{cosec } x (\text{cosec } x + \cot x)\, dx = \int \text{cosec}^2 x\, dx + \int \text{cosec } x \cot x\, dx$$

$$= -\cot x - \text{cosec } x + C$$

(iii) আমরা পাই,

$$\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \tan x \sec x\, dx$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

উদাহরণ 4 f এর প্রতি-অন্তরকলজ F নির্ণয় করো যা $f(x) = 4x^3 - 6$ দ্বারা সংজ্ঞাত, যেখানে $F(0) = 3$

সমাধান $f(x)$ এর একটি প্রতি-অন্তরকলজ হল $x^4 - 6x$

যেহেতু, $\frac{d}{dx}(x^4 - 6x) = 4x^3 - 6$

অতএব, প্রতি-অন্তরকলজ F হল

$F(x) = x^4 - 6x + C$, যেখানে C হল ধ্রুবক।

দেওয়া আছে $F(0) = 3$, যা থেকে পাওয়া যায়

$3 = 0 - 6 \times 0 + C$ অথবা, $C = 3$

সুতরাং, নির্ণেয় প্রতি -অন্তরকলজ অনন্য অপেক্ষক F সংজ্ঞাত হয় $F(x) = x^4 - 6x + 3$

মন্তব্য

(i) আমরা দেখেছি যে F হল f এর প্রতি-অন্তরকলজ, যা তাহলে F + C-এর অনুরূপ যেখানে C যে-কোনো ধ্রুবক। এরূপে, যদি একটি অপেক্ষক f-এর একটি প্রতি-অন্তরকলজ F জানতে পারি, তবে F-এর সাথে যে-কোনো ধ্রুবক যুক্ত করে আমরা f-এর অসংখ্য প্রতি-অন্তরকলজ লিখতে পারি, $F(x) + C, C \in \mathbf{R}$ দ্বারা প্রকাশ করে। প্রয়োগ ক্ষেত্রে, এটা প্রায়ই জরুরি যে অতিরিক্ত শর্তসমূহ মেনে C -এর একটি বিশেষ মান নির্ণয় করা যায়, যার দ্বারা প্রদত্ত অপেক্ষকের অনন্য প্রতি-অন্তরকলজ নির্ণীত হয়।

(ii) কখনও কখনও প্রাথমিক অপেক্ষক রূপে F প্রকাশযোগ্য হয় না, যেমন বহুপদী, লগারিদমিক, সূচকীয়, ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকসমূহ এবং এদের বিপরীত অপেক্ষকসমূহ ইত্যাদি। আমরা তাই $\int f(x)\, dx$ নির্ণয়ে আটকে যাই। উদাহরণস্বরূপ, পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে $\int e^{-x^2} dx$ নির্ণয় করা সম্ভব নয়। যেহেতু আমরা সেই অপেক্ষকটি নির্ণয় করতে পারি না যার অন্তরকলজ $e^{-x^2} dx$ হয়।

(iii) যখন x ব্যাতিত অন্য একটি চলক দ্বারা সমাকলনের চলক সূচিত হয়, তখন সমাকলের সূত্রগুলো সেই অনুসারে পরিবর্তিত হয়। উদাহরণস্বরূপ,

$$\int y^4\, dy = \frac{y^{4+1}}{4+1} + \text{C} = \frac{1}{5}\, y^5 + \text{C}$$

7.2.3 অন্তরকলন ও সমাকলনের মধ্যে তুলনা (Comparison between differentiation and integration)

1. উভয়েই অপেক্ষকসমূহের উপর প্রক্রিয়া (Both are operations on functions)
2. উভয়েই রৈখিকতার ধর্ম মেনে চলে, অর্থাৎ

(i) $$\frac{d}{dx}\left[k_1\, f_1(x) + k_2\, f_2(x)\right] = k_1 \frac{d}{dx} f_1(x) + k_2 \frac{d}{dx} f_2(x)$$

(ii) $$\int \left[k_1\, f_1(x) + k_2\, f_2(x)\right] dx = k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx$$

এখানে k_1 এবং k_2 হল ধ্রুবক।

3. আমরা ইতোমধ্যে দেখেছি সকল অপেক্ষক অবকলনযোগ্য হয় না। অনুরূপে, সকল অপেক্ষক সমাকলনযোগ্য নয়। আমরা উচ্চতর শ্রেণিগুলোতে অবকলনযোগ্য নয় এবং সমাকলনযোগ্য নয় এসব অপেক্ষকগুলো নিয়ে অধ্যয়ন করব।
4. কোনো অপেক্ষকের অন্তরকলজ, যদি এর অস্তিত্ব থাকে, সেটি অনন্য অপেক্ষক হয়। কোনো অপেক্ষকের সমাকল এমন নয়। তথাপি, ধ্রুবক পদ যুক্ত হওয়া পর্যন্ত তারা অনন্য অর্থাৎ একটি অপেক্ষকের কোনো দুটি সমাকলের মধ্যে পার্থক্য একটি ধ্রুবক হয়।
5. যখন একটি বহুপদী অপেক্ষক P এর অবকলন করা হয়, তখন ফলাফলটি P -এর ঘাতের চেয়ে 1 ঘাত কম বিশিষ্ট একটি বহুপদী অপেক্ষক হয়। যখন একটি বহুপদী অপেক্ষক P কে সমাকলন করা হয়, তখন ফলাফলটি P -এর ঘাতের চেয়ে 1 ঘাত অধিক যুক্ত একটি বহুপদী অপেক্ষক হয়।
6. কোনো একটি বিন্দুতে আমরা অন্তরকলজের কথা বলতে পারি। কোনো একটি বিন্দুতে সমাকলনের কথা আমরা কখনও বলি না, আমরা অপেক্ষকের সমাকলন একটি অন্তরালে সংজ্ঞায়িত হওয়ার কথা বলি যা অনুচ্ছেদ 7.7 -এ দেখবে।
7. অপেক্ষকের অন্তরকলজের জ্যামিতিক তাৎপর্য, মূলত কোনো বক্রের একটি বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা। অনুরূপে কোনো অপেক্ষকের অনির্দিষ্ট সমাকল জ্যামিতিকভাবে, সমান্তরালভাবে অবস্থানরত একটি বক্ররেখার পরিবার, যার সমাকলন চল প্রকাশিত অক্ষের উপর লম্বরেখার সহিত বক্রসমূহের ছেদবিন্দুতে স্পর্শকগুলো পরস্পর সমান্তরাল হয়।
8. কিছু প্রাকৃতিক রাশি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে অন্তরকলজের প্রয়োগ হয়ে থাকে, উদাহরণস্বরূপ, কোনো গতিশীল কণার কোনো সময় t -তে অতিক্রান্ত দূরত্ব জানা থাকলে তার গতিবেগ নির্ণয় করা। অনুরূপে, কণার কোনো সময় t -তে গতিবেগ জানা থাকলে, কণা কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয়ে সমাকলনের ব্যবহার হয়।
9. অন্তরকলন হল সীমাযুক্ত একটি প্রক্রিয়া। ঠিক একই ধারণা সমাকলনের ক্ষেত্রেও হয়, যা 7.7 অনুচ্ছেদে দেখানো হয়েছে।

10. অবকলন এবং সমাকলন পরস্পর বিপরীত প্রক্রিয়া যা 7.2.2 (i) অনুচ্ছেদে আলোচিত হয়েছে।

অনুশীলনী 7.1

পর্যবেক্ষণ পদ্ধতির মাধ্যমে নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর প্রতি-অন্তরকলজ (অথবা সমাকল) নির্ণয় করো।

1. $\sin 2x$ **2.** $\cos 3x$ **3.** e^{2x}

4. $(ax + b)^2$ **5.** $\sin 2x - 4\, e^{3x}$

অনুশীলনীর 6 থেকে 20 পর্যন্ত নিম্নলিখিত সমাকলগুলো নির্ণয় করো:

6. $\int (4\, e^{3x} + 1)\, dx$ **7.** $\int x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$ **8.** $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$

9. $\int (2x^2 + e^x)\, dx$ **10.** $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ **11.** $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\, dx$

12. $\int \frac{x^3 + 3x + 4}{\sqrt{x}}\, dx$ **13.** $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}\, dx$ **14.** $\int (1 - x)\sqrt{x}\, dx$

15. $\int \sqrt{x}\,(3x^2 + 2x + 3)\, dx$ **16.** $\int (2x - 3\cos x + e^x)\, dx$

17. $\int (2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\, dx$ **18.** $\int \sec x\,(\sec x + \tan x)\, dx$

19. $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}\, dx$ **20.** $\int \frac{2 - 3\sin x}{\cos^2 x}\, dx$ ।

অনুশীলনী 21 এবং 22 এর সঠিক উত্তর বাছাই করো :

21. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ -এর প্রতি অন্তরকলজের মান হল

(A) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$ (B) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^2 + C$

(C) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$ (D) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

22. যদি $\frac{d}{dx} f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ এরূপ যে $f(2) = 0$, তাহলে $f(x)$ হল

(A) $x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$ (B) $x^3 + \frac{1}{x^4} + \frac{129}{8}$

(C) $x^4 + \frac{1}{x^3} + \frac{129}{8}$ (D) $x^3 + \frac{1}{x^4} - \frac{129}{8}$

7.3 সমাকলনের পদ্ধতি সমূহ (Methods of Integration)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে, আমরা সেসব অপেক্ষকের সমাকল নিয়ে আলোচনা করেছি যাদের সহজে কোনো অপেক্ষকের অন্তরকলজ থেকে পাওয়া যায়। এটি ছিল পর্যবেক্ষণ নির্ভর, অর্থাৎ, একটি অপেক্ষক F এর অনুসন্ধান করা হয় যার অন্তরকলজ হল f যা আমাদেরকে f এর সমাকলের দিকে চালিত করে। যাহোক এই পদ্ধতি, যেটি পর্যবেক্ষণ নির্ভর। তা অনেক অপেক্ষকের জন্য উপযুক্ত নয়। অতএব, আমাদের দরকার অধিকতর উন্নত কৌশল বা পদ্ধতি যার মাধ্যমে আদর্শ সমাকলের আকারে পরিবর্তিত করে সমাকল নির্ণয় করা যায়। এদের মধ্যে উল্লেখযোগ্য পদ্ধতিগুলো হল ঃ

1. প্রতিস্থাপনের দ্বারা সমাকলন
2. আংশিক ভগ্নাংশে বিভাজনের মাধ্যমে সমাকলন
3. আংশিক সমাকলন পদ্ধতি

7.3.1 *প্রতিস্থাপনের দ্বারা সমাকলন (Integration by substitution)*

এই অনুচ্ছেদে, আমরা প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে সমাকলন পদ্ধতি আলোচনা করব।

স্বাধীন চল x -কে t দ্বারা অর্থাৎ, $x=g(t)$ প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে প্রদত্ত সমাকল $\int f(x)\,dx$ -কে অপর রূপে পরিবর্তন করা হয়।

ধরো, $$\mathrm{I} = \int f(x)\,dx$$

$x = g(t)$ বসাও যাতে $\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ হয়।

আমরা লিখতে পারি $$dx = g'(t)\,dt$$

অতএব, $$\mathrm{I} = \int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে চলরাশির এই পরিবর্তনের সূত্র আমাদের নিকট খুবই গুরুত্বপূর্ণ। উপযোগী প্রতিস্থাপন কী হবে তা অনুমান করা খুবই গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। সাধারণত, আমরা এমন এক অপেক্ষকের জন্য প্রতিস্থাপন করে থাকি যার অন্তরকলজও সমাকল্যে নিহিত থাকে, যা নিম্নলিখিত উদাহরণে বর্ণিত হয়েছে।

উদাহরণ 5 নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর x এর সাপেক্ষে সমাকল করো ঃ

(i) $\sin mx$ (ii) $2x \sin (x^2 + 1)$

(iii) $\dfrac{\tan^4 \sqrt{x}\,\sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (iv) $\dfrac{\sin (\tan^{-1} x)}{1+x^2}$

সমাধান

(i) আমরা জানি mx এর অন্তরকলজ m। অতএব, আমরা $mx = t$ প্রতিস্থাপিত করি যাতে $mdx = dt$ হয়।

সুতরাং, $$\int \sin mx\,dx = \frac{1}{m}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{m}\cos t + \mathrm{C} = -\frac{1}{m}\cos mx + \mathrm{C}$$

(ii) $x^2 + 1$ এর অন্তরকলজ হল $2x$ । সুতরাং, আমরা $x^2 + 1 = t$ প্রতিস্থাপন প্রয়োগ করব যাতে $2x\, dx = dt$ হয়।

অতএব, $\int 2x \sin (x^2 + 1)\, dx = \int \sin t\, dt = -\cos t + C = -\cos (x^2 + 1) + C$

(iii) $\sqrt{x}$ এর অন্তরকলজ হল $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ । সুতরাং, আমরা

$\sqrt{x} = t$ প্রতিস্থাপন করব, যাতে $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$, যা থেকে পাওয়া $dx = 2t\, dt$.

সুতরাং, $$\int \frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t \tan^4 t \sec^2 t\, dt}{t} = 2 \int \tan^4 t \sec^2 t\, dt$$

পুনরায়, আমরা $\tan t = u$ অপর একটি প্রতিস্থাপন করি যাতে $\sec^2 t\, dt = du$।

অতএব, $$2 \int \tan^4 t \sec^2 t\, dt = 2 \int u^4\, du = 2 \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{2}{5} \tan^5 t + C \text{ (যেহেতু, } u = \tan t)$$

$$= \frac{2}{5} \tan^5 \sqrt{x} + C \text{ (যেহেতু, } t = \sqrt{x})$$

সুতরাং, $$\int \frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5} \tan^5 \sqrt{x} + C$$

বিকল্পভাবে, $\tan \sqrt{x} = t$ প্রতিস্থাপিত করো।

(iv) $\tan^{-1} x$ সুতরাং, আমরা -এর অন্তরকলজ $= \frac{1}{1 + x^2}$

$\tan^{-1} x = t$ প্রতিস্থাপন করি, যাতে $\frac{dx}{1 + x^2} = dt$ হয়।

অতএব, $$\int \frac{\sin (\tan^{-1} x)}{1 + x^2} dx = \int \sin t\, dt = -\cos t + C = -\cos(\tan^{-1} x) + C$$

এখন, আমরা ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকযুক্ত কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ সমাকল এবং প্রতিস্থাপন কৌশল প্রয়োগে তাদের আদর্শ সমাকল সম্বন্ধে আলোচনা করছি। এগুলো পরে প্রয়োগ করা হবে।

(i) $\boldsymbol{\int \tan x\, dx = \log |\sec x| + C}$

আমরা পাই,

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$\cos x = t$ বসাও যাতে $\sin x\, dx = -\, dt$ হয়।

তাহলে, $$\int \tan x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log |t| + C = -\log |\cos x| + C$$

অথবা, $$\int \tan x\, dx = \log |\sec x| + C$$

(ii) $\displaystyle\int \cot x\, dx = \log |\sin x| + C$

আমরা পাই, $$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$\sin x = t$ বসাও যাতে $\cos x\, dx = dt$ হয়।

তাহলে $$\int \cot x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log |\sin x| + C$$

(iii) $\displaystyle\int \sec x\, dx = \log |\sec x + \tan x| + C$

আমরা পাই,

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\, (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$\sec x + \tan x = t$ বসাও যাতে $\sec x\, (\tan x + \sec x)\, dx = dt$ হয়।

অতএব, $\displaystyle\int \sec x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log |\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

আমরা পাই–

$$\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x + \cot x)}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)}\, dx$$

$\operatorname{cosec} x + \cot x = t$ বসাও যাতে $-\operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx = dt$ হয়।

সুতরাং, $$\int \operatorname{cosec} x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log |t| = -\log |\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

$$= -\log \left| \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x - \cot x} \right| + C$$

$$= \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

উদাহরণ 6 নীচের সমাকলগুলো নির্ণয় করো ঃ

(i) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin (x + a)}\, dx$ (iii) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \tan x}\, dx$

সমাধান

(i) আমরা পাই,

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\, (\sin x)\, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\, (\sin x)\, dx$$

$t = \cos x$ ধরো যাতে $dt = -\sin x\, dx$ হয়

অতএব, $\int \sin^2 x \cos^2 x\, (\sin x)\, dx = -\int (1-t^2)\, t^2\, dt$

$$= -\int (t^2 - t^4)\, dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

(ii) $x + a = t$ বসাও, $dx = dt$ সুতরাং,

$$\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)}\, dx = \int \frac{\sin(t-a)}{\sin t}\, dt$$

$$= \int \frac{\sin t \cos a - \cos t \sin a}{\sin t}\, dt$$

$$= \cos a \int dt - \sin a \int \cot t\, dt$$

$$= (\cos a)\, t - (\sin a)\left[\log|\sin t| + C_1\right]$$

$$= (\cos a)\,(x+a) - (\sin a)\left[\log|\sin(x+a)| + C_1\right]$$

$$= x\cos a + a\cos a - (\sin a)\log|\sin(x+a)| - C_1 \sin a$$

অতএব, $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)}\, dx = x\cos a - \sin a \log|\sin(x+a)| + C,$

যেখানে, $C = -C_1 \sin a + a\cos a$, হল অপর স্বেচ্ছ ধ্রুবক।

(iii) $$\int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x + \sin x + \cos x - \sin x)\, dx}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx \qquad \dots (1)$$

এখন, ধরো $I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$

$\cos x + \sin x = t$ বসাও যাতে $(\cos x - \sin x)\, dx = dt$

সুতরাং, $I = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C_2 = \log|\cos x + \sin x| + C_2$

এটি (1) -এ বসিয়ে আমরা পাই

$$\int \frac{dx}{1+\tan x} = \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + C, \left(C = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}\right)$$

অনুশীলনী 7.2

অনুশীলনীর 1 থেকে 37 পর্যন্ত অপেক্ষকসমূহের সমাকল নির্ণয় করো :

1. $\frac{2x}{1+x^2}$ **2.** $\frac{(\log x)^2}{x}$ **3.** $\frac{1}{x + x\log x}$

4. $\sin x \sin(\cos x)$ **5.** $\sin(ax+b)\cos(ax+b)$

6. $\sqrt{ax+b}$ **7.** $x\sqrt{x+2}$ **8.** $x\sqrt{1+2x^2}$

9. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$ **10.** $\frac{1}{x-\sqrt{x}}$ **11.** $\frac{x}{\sqrt{x+4}}, x > 0$

12. $(x^3-1)^{\frac{1}{3}} x^5$ **13.** $\frac{x^2}{(2+3x^3)^3}$ **14.** $\frac{1}{x(\log x)^m}, x > 0, m \neq 1$

15. $\frac{x}{9-4x^2}$ **16.** e^{2x+3} **17.** $\frac{x}{e^{x^2}}$

18. $\dfrac{e^{tan^{-1}x}}{1+x^2}$ **19.** $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ **20.** $\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

21. $\tan^2(2x-3)$ **22.** $\sec^2(7-4x)$ **23.** $\dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

24. $\dfrac{2\cos x-3\sin x}{6\cos x+4\sin x}$ **25.** $\dfrac{1}{\cos^2 x(1-\tan x)^2}$ **26.** $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

27. $\sqrt{\sin 2x}\cos 2x$ **28.** $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ **29.** $\cot x \log \sin x$

30. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ **31.** $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$ **32.** $\dfrac{1}{1+\cot x}$

33. $\dfrac{1}{1-\tan x}$ **34.** $\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}$ **35.** $\dfrac{(1+\log x)^2}{x}$

36. $\dfrac{(x+1)(x+\log x)^2}{x}$ **37.** $\dfrac{x^3\sin\left(\tan^{-1}x^4\right)}{1+x^8}$

অনুশীলনীর 38 এবং 39 এর সঠিক উত্তরটি বাছাই করো ঃ

38. $\int\dfrac{10x^9+10^x\log_e 10\,dx}{x^{10}+10^x}$ এর মান

(A) $10^x - x^{10} + C$ (B) $10^x + x^{10} + C$

(C) $(10^x - x^{10})^{-1} + C$ (D) $\log(10^x + x^{10}) + C$

39. $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ এর মান

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x - \cot x + C$

(C) $\tan x \cot x + C$ (D) $\tan x - \cot 2x + C$

7.3.2 ত্রিকোণমিতিক অভেদ প্রয়োগে সমাকলন *(Integration using trigonometric identities)*

যখন কোনো সমাকল্য কোনো ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক যুক্ত থাকে, আমরা জ্ঞাত কোনো ত্রিকোণমিতিক অভেদ প্রয়োগে সমাকল নির্ণয় করি যা নীচের উদাহরণগুলোতে বর্ণিত হল ঃ

উদাহরণ 7 মান নির্ণয় করো (i) $\int\cos^2 x\,dx$ (ii) $\int\sin 2x\cos 3x\,dx$ (iii) $\int\sin^3 x\,dx$

সমাধান

(i) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ অভেদটি পুনরায় স্মরণ করো, যা থেকে পাওয়া যায়

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

সুতরাং, $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(ii) পুনরায় অভেদটি স্মরণে করো $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$ (কেন?)

তাহলে $\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x\, dx - \int \sin x\, dx\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right] + C$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

(iii) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, অভেদ থেকে আমরা পাই,

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

সুতরাং, $\int \sin^3 x\, dx = \frac{3}{4}\int \sin x\, dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\, dx$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

বিকল্পরূপে, $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$

$\cos x = t$ ধরো, যাতে $-\sin x\, dx = dt$ হয়।

সুতরাং, $\int \sin^3 x\, dx = -\int \left(1-t^2\right) dt = -\int dt + \int t^2\, dt = -t + \frac{t^3}{3} + C$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

মন্তব্য ত্রিকোণমিতিক অভেদের সাহায্যে এটি দেখানো যায় যে উভয় উত্তরই সমতুল্য।

অনুশীলনী 7.3

অনুশীলনীর 1 থেকে 22 পর্যন্ত অপেক্ষকগুলোর সমাকল নির্ণয় করো :

1. $\sin^2 (2x + 5)$ **2.** $\sin 3x \cos 4x$ **3.** $\cos 2x \cos 4x \cos 6x$

4. $\sin^3 (2x + 1)$ **5.** $\sin^3 x \cos^3 x$ **6.** $\sin x \sin 2x \sin 3x$

7. $\sin 4x \sin 8x$ **8.** $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **9.** $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

10. $\sin^4 x$ **11.** $\cos^4 2x$ **12.** $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

13. $\dfrac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}$ **14.** $\dfrac{\cos x - \sin x}{1+\sin 2x}$ **15.** $\tan^3 2x \sec 2x$

16. $\tan^4 x$ **17.** $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$ **18.** $\dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

19. $\dfrac{1}{\sin x \cos^3 x}$ **20.** $\dfrac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2}$ **21.** $\sin^{-1} (\cos x)$

22. $\dfrac{1}{\cos (x-a) \cos (x-b)}$

অনুশীলনীর 23 এবং 24 -এর সঠিক উত্তরটি বাছাই করো :

23. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx =$

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x + \operatorname{cosec} x + C$

(C) $-\tan x + \cot x + C$ (D) $\tan x + \sec x + C$

24. $\displaystyle\int \frac{e^x (1+x)}{\cos^2 (e^x x)} dx =$

(A) $-\cot (ex^x) + C$ (B) $\tan (xe^x) + C$

(C) $\tan (e^x) + C$ (D) $\cot (e^x) + C$

7.4 কয়েকটি বিশেষ অপেক্ষকের সমাকল (Integrals of Some Particular Functions)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ সমাকলের সূত্র নীচে উল্লেখ করব এবং অনেক আদর্শ সমাকল সম্পর্কিত সমাকলের জন্য এদের প্রয়োগ করব :

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

(2) $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

(3) $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

(5) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$$

এখন আমরা উপরোক্ত ফলাফলগুলো প্রমাণ করব ঃ

(1) আমরা পাই, $\dfrac{1}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{(x-a)\,(x+a)}$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)\,(x+a)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

সুতরাং, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|(x-a)| - \log|(x+a)|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

(2) উপরে (1) -এর দৃষ্টিকোণ থেকে আমরা পাই,

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)\,(a-x)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right]$$

সুতরাং, $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a+x}\right]$$
$$= \frac{1}{2a}[-\log|a-x| + \log|a+x|] + C$$
$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

দ্রষ্টব্য অনুচ্ছেদ 7.5 -এ (1) -এর ব্যবহৃত কৌশল ব্যাখ্যা করা হবে।

(3) ধরো $x = a \tan\theta$। তাহলে $dx = a \sec^2\theta\, d\theta$

সুতরাং, $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a \sec^2\theta\, d\theta}{a^2 \tan^2\theta + a^2}$$
$$= \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(4) ধরো $x = a \sec\theta$ ।তাহলে $dx = a \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

সুতরাং, $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec\theta \tan\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2}}$$
$$= \int \sec\theta\, d\theta = \log|\sec\theta + \tan\theta| + C_1$$
$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right| + C_1$$
$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \log|a| + C_1$$
$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, \text{ যেখানে } C = C_1 - \log|a|$$

(5) ধরো $x = a \sin\theta$ । তাহলে $dx = a \cos\theta\, d\theta$.

সুতরাং, $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta}}$$
$$= \int d\theta = \theta + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(6) ধরো $x = a \tan\theta$। তাহলে $dx = a \sec^2\theta\, d\theta$.

সুতরাং, $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 \tan^2\theta + a^2}}$$
$$= \int \sec\theta\, d\theta = \log|(\sec\theta + \tan\theta)| + C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right|+C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\log|a|+C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$, যেখানে $C = C_1 - \log|a|$

এই আদর্শ সূত্রগুলো প্রয়োগে, আমরা এখন আরও কয়েকটি প্রায়োগিক দিক থেকে গুরুত্বপূর্ণ সূত্র লাভ করব এবং অপর সমাকল নির্ণয়ে প্রত্যক্ষভাবে প্রয়োগ করতে পারব।

(7) $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ **আকারের সমাকল নির্ণয়ে** আমরা লিখতে পারি,

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

এখন, $x+\frac{b}{2a}=t$ বসাও যাতে $dx = dt$ হয় এবং $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$ লেখো। আমরা সমকলটির পরিবর্তিত রূপ $\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$ যা $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$ এর চিহ্নের উপর নির্ভরশীল, তা নির্ণয় এবং অতপর মান নির্ণয় করতে পারি।

(8) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **আকারের সমাকল নির্ণয়ে**, (7) -এর ন্যায় অগ্রসর হয়ে, আদর্শ সূত্র প্রয়োগে, আমরা সমাকলটি নির্ণয় করতে পারি।

(9) $\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$ **আকারের সমাকল নির্ণয়ে**, যেখানে p, q, a, b, c হল ধ্রুবক, আমাদের বাস্তব সংখ্যা A, B নির্ণয় করতে হবে এরূপে যে,

$$px+q = A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B = A\,(2ax+b)+B$$

A ও B নির্ণয়ে আমরা উভয়পক্ষে x -এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমান করি। এভাবে A ও B -এর মান পাওয়ার পর সমাকলটি পরিচিত আকারে পরিবর্তিত হয়।

(10) $\int \frac{(px+q)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **আকারে সমাকল নির্ণয়ের জন্য,** আমরা (9) -এর মত অগ্রসর হই এবং সমাকলটিকে পরিচিত আদর্শ আকারে রূপান্তরিত করি।

চলো আমরা কয়েকটি কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে উপরোক্ত পদ্ধতিগুলো বর্ণনা করি।

উদাহরণ 8 নীচের সমাকলগুলো নির্ণয় করো:

(i) $\int \frac{dx}{x^2-16}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

সমাধান

(i) আমরা পাই, $\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{dx}{x^2-4^2} = \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + \mathrm{C}$ [7.4 (1) দ্বারা]

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

$x-1=t$ বসাও। তাহলে $dx = dt$

সুতরাং, $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1}(t) + \mathrm{C}$ [7.4 (5) দ্বারা]

$$= \sin^{-1}(x-1) + \mathrm{C}$$

উদাহরণ 9 নীচের সমাকলনগুলো নির্ণয় করো:

(i) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$ (ii) $\int \frac{dx}{3x^2+13x-10}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}}$

সমাধান

(i) আমরা পাই, $x^2-6x+13 = x^2-6x+3^2-3^2+13 = (x-3)^2+4$

সুতরাং, $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{1}{(x\ \ 3)^2+2^2}\,dx$

ধরো, $x-3=t$ । তাহলে $dx = dt$

সুতরাং, $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2} + \mathrm{C}$ [7.4 (3) দ্বারা]

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x\ \ 3}{2} + \mathrm{C}$$

(ii) প্রদত্ত সমাকলটি 7.4 (7) আকারের। সমাকল্যের হরকে আমরা লিখতে পারি,

$$3x^2+13x-10 = 3\left(x^2+\frac{13x}{3}-\frac{10}{3}\right)$$

$$= 3\left[\left(x+\frac{13}{6}\right)^2 \quad \left(\frac{17}{6}\right)^2\right] \text{ (পূর্ণবর্গে রূপান্তর করে)}$$

সুতরাং, $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2+13x-10} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{13}{6}\right)^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2}$ $\quad x+\dfrac{13}{6}=t$

বসাও,তবে $dx = dt$

অতএব, $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2+13x-10} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2}$

$$= \frac{1}{3\times2\times\frac{17}{6}}\log\left|\frac{t-\frac{17}{6}}{t+\frac{17}{6}}\right|+C_1 \qquad \text{[7.4 (i) দ্বারা]}$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{x+\frac{13}{6}-\frac{17}{6}}{x+\frac{13}{6}+\frac{17}{6}}\right|+C_1$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{6x-4}{6x+30}\right|+C_1$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right|+C_1+\frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right|+C, \text{ যেখানে } C = C_1+\frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

(iii) আমরা পাই, $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5\left(x^2-\frac{2x}{5}\right)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}} \quad \text{(পূর্ণবর্গে রূপান্তর করে)}$$

$x - \frac{1}{5} = t$ বসাও, তবে $dx = dt$ হয়।

সুতরাং, $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| t + \sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} \right| + C \quad [7.4\ (4)\ \text{দ্বারা}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| x - \frac{1}{5} + \sqrt{x^2 - \frac{2x}{5}} \right| + C$$

উদাহরণ 10 নীচের সমাকলগুলো নির্ণয় করো ঃ

(i) $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$

সমাধান

(i) সূত্র 7.4 (9) প্রয়োগে, আমরা পাই

$$x + 2 = A \frac{d}{dx}\left(2x^2+6x+5\right) + B = A\,(4x+6) + B$$

উভয়দিকে x -এর সহগ ও ধ্রুবক পদ সমান করে পাই,

$4A = 1$ এবং $6A + B = 2$ অথবা, $A = \frac{1}{4}$ এবং $B = \frac{1}{2}$

সুতরাং, $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$

$$= \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{2} I_2 \quad \text{(ধরো)} \qquad \dots (1)$$

I_1 -এ, $2x^2 + 6x + 5 = t$, বসাও যাতে $(4x + 6)\, dx = dt$ হয়।

সুতরাং, $$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C_1$$

$$= \log|2x^2 + 6x + 5| + C_1 \qquad \text{... (2)}$$

এবং $$I_2 = \int \frac{dx}{2x^2 + 6x + 5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 3x + \frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$x + \frac{3}{2} = t$ বসাও, যাতে $dx = dt$ হয়, তবে আমরা পাই

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} \tan^{-1} 2t + C_2 \qquad \text{[7.4 (3) দ্বারা]}$$

$$= \tan\ {}^{1}2\left(x + \frac{3}{2}\right) + C_2 = \tan^{-1}\ (2x+3) - C_2 \qquad \text{... (3)}$$

(1) -এর মধ্যে (2) এবং (3) প্রয়োগে, আমরা পাই,

$$\int \frac{x+2}{2x^2 + 6x + 5}\, dx = \frac{1}{4}\log\left|2x^2 + 6x + 5\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+3) + C$$

যেখানে, $$C = \frac{C_1}{4} + \frac{C_2}{2}$$

(ii) এই সমাকলটি 7.4 (10) -এ প্রদত্ত সমাকলের অনুরূপ। চলো আমরা লিখি

$$x + 3 = A\frac{d}{dx}(5 - 4x - x^2) + B = A\,(-4 - 2x) + B$$

উভয়দিকে x -এর সহগ ও ধ্রুবক পদ তুলনা করে পাই,

$-2A = 1$ এবং $-4\,A + B = 3$, অর্থাৎ, $A = -\frac{1}{2}$ এবং $B = 1$

সুতরাং, $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-4-2x)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \qquad \ldots (1)$$

I_1 -এ, $5 - 4x - x^2 = t$ বসাও, যাতে $(-4 - 2x)\,dx = dt$ হয় ।

সুতরাং, $\displaystyle \mathrm{I}_1 = \int \frac{(-4-2x)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + \mathrm{C}_1$

$$= 2\sqrt{5-4x-x^2} + \mathrm{C}_1 \qquad \ldots (2)$$

এখন ধরো, $\displaystyle \mathrm{I}_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$

$x + 2 = t$ বসাও, যাতে $dx = dt$ হয় ।

সুতরাং, $\displaystyle \mathrm{I}_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \sin^{\;1}\frac{t}{3} + \mathrm{C}_2$ [7.4 (5) দ্বারা]

$$= \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + \mathrm{C}_2 \qquad \ldots (3)$$

(1) -এ (2) এবং (3) প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} = -\sqrt{5-4x-x^2} + \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + \mathrm{C}, \quad \text{যেখানে } \mathrm{C} = \mathrm{C}_2 - \frac{\mathrm{C}_1}{2}$$

অনুশীলনী 7.4

অনুশীলনীর 1 থেকে 23 পর্যন্ত অপেক্ষকগুলোর সমাকল করো ঃ

1. $\dfrac{3x^2}{x^6+1}$ **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ **3.** $\dfrac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$ **5.** $\dfrac{3x}{1+2x^4}$ **6.** $\dfrac{x^2}{1-x^6}$

7. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ **8.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}$ **9.** $\dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+4}}$

10. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ **11.** $\frac{1}{9x^2+6x+5}$ **12.** $\frac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

13. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ **14.** $\frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$ **15.** $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

16. $\frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$ **17.** $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ **18.** $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}$

19. $\frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}$ **20.** $\frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ **21.** $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

22. $\frac{x+3}{x^2-2x-5}$ **23.** $\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

অনুশীলনী 24 ও 25 এর সঠিক উত্তরটি বেছে নাও।

24. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} =$

(A) $x \tan^{-1}(x+1)+C$ (B) $\tan^{-1}(x+1)+C$

(C) $(x+1)\tan^{-1}x+C$ (D) $\tan^{-1}x+C$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}} =$

(A) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (B) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+C$

(C) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (D) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{9}\right)+C$

7.5 আংশিক ভগ্নাংশে বিভাজনের দ্বারা সমাকলন (Integration by Partial Fractions)

মনে করে দেখো যে, কোনো মূলদ অপেক্ষক হল $\frac{P(x)}{Q(x)}$ আকারের দুটি বহুপদী রাশিমালার অনুপাত, যেখানে $P(x)$ ও $Q(x)$ হল x এর দুটি বহুপদী রাশিমালা এবং $Q(x) \neq 0$ । যদি $P(x)$ -এর ঘাত $Q(x)$ -এর ঘাতের চেয়ে কম হয়, তাহলে একে প্রকৃত মূলদ অপেক্ষক বলা হয়, অন্যথায় এটিকে অপ্রকৃত মূলদ অপেক্ষক বলে। অপ্রকৃত মূলদ অপেক্ষককে দীর্ঘ ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে প্রকৃত মূলদ অপেক্ষকে পরিবর্তিত করা যেতে পারে।

সুতরাং, যদি $\frac{P(x)}{Q(x)}$ অপ্রকৃত হয়, তবে $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, যেখানে $T(x)$ হল x-এর একটি বহুপদী রাশিমালা এবং $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ হল একটি প্রকৃত মূলদ অপেক্ষক। যেহেতু আমরা জানি কীভাবে বহুপদী রাশিমালার সমাকল করা হয়, তাই যে-কোনো মূলদ অপেক্ষকের সমাকল প্রকৃত মূলদ অপেক্ষকের সমাকলনে পরিবর্তিত হয়। এখানে সেই সব মূলদ অপেক্ষককে নেওয়া হবে যাদের হরগুলোকে রৈখিক বা দ্বিঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়। ধরে নেওয়া যাক, আমরা $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, যেখানে, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ হল প্রকৃত মূলদ অপেক্ষক। এটি সর্বদা সম্ভবপর যে, কোনো সমাকল্যকে আংশিক ভগ্নাংশ বিভাজনের মাধ্যমে সহজতর ভগ্নাংশের যোগফল রূপে লেখা যায়। অতঃপর জানা পদ্ধতির সাহায্যে সমাকলন সম্পন্ন করা হয়। নীচের 7.2 সারণিতে বিভিন্ন মূলদ অপেক্ষক সমূহের সাথে যুক্ত সহজতর আংশিক ভগ্নাংশের প্রকারসমূহ সূচিত হল।

সারণি **7.2**

ক্রমিক নং	মূলদ ভগ্নাংশের আকার	আংশিক ভগ্নাংশের আকার
1.	$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}$, $a \neq b$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$
2.	$\frac{px+q}{(x-a)^2}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$
3.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$
4.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$
5.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$,
	যেখানে $x^2 + bx + c$ -কে আর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না	

উপরের সারণিতে A, B এবং C হল বাস্তব সংখ্যা যা উপযুক্তরূপে নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ 11 $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ নির্ণয় করো।

সমাধান সমাকল্যটি হল প্রকৃত মূলদ অপেক্ষক। সুতরাং আংশিক ভগ্নাংশের আকার (সারণি 7.2 (i)] প্রয়োগ করে, আমরা লিখতে পারি

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \qquad \ldots (1)$$

যেখানে, A ও B বাস্তব সংখ্যা যা উপযুক্তরূপে নির্ণয় করা যায়। এ থেকে পাওয়া যায়

$$1 = A(x+2) + B(x+1)$$

x -এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে আমরা পাই,

$$A + B = 0$$

এবং $$2A + B = 1$$

এই সমীকরণগুলোর সমাধান করে আমরা পাই A = 1 এবং B = – 1

সুতরাং, সমাকল্যটি থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

সুতরাং, $$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \frac{dx}{x+1} \quad \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \log|x+1| - \log|x+2| + C$$

$$= \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

মন্তব্য উপরের সমীকরণ (1) একটি অভেদ, অর্থাৎ x -এর সব (অনুমোদনযোগ্য) মানের জন্য উক্তিটি সত্য। কোনো কোনো লেখক '≡' প্রতীকটি ব্যবহার করে উক্তিটিকে অভেদ রূপে সূচিত করেন এবং '=' প্রতীকটি ব্যবহার করে উক্তিটিকে সমীকরণ রূপে সূচিত করেন অর্থাৎ, উক্তিটি x -এর নির্দিষ্ট মানের জন্য সত্য।

উদাহরণ 12 $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} dx$ নির্ণয় করো।

সমাধান এখানে $\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ সমাকল্যটি একটি প্রকৃত মূলদ অপেক্ষক নয়, সুতরাং আমরা $x^2 + 1$ -কে $x^2 - 5x + 6$ দ্বারা ভাগ করি এবং নির্ণয় করি যে

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1+\frac{5x-5}{x^2-5x+6} = 1+\frac{5x-5}{(x-2)\,(x-3)}$$

ধরো, $$\frac{5x-5}{(x-2)\,(x-3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

সুতরাং, $$5x-5 = A\,(x-3) + B\,(x-2)$$

উভয়দিকে x -এর সহগ ও ধ্রুবক পদ তুলনা করে আমরা পাই, $A + B = 5$ এবং $3A + 2B = 5$ । এই সমীকরণগুলো সমাধান করে আমরা পাই, $A = -5$ এবং $B = 10$

তাহলে, $$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1-\frac{5}{x-2}+\frac{10}{x-3}$$

অতএব, $$\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx = \int dx - 5\int \frac{1}{x-2}\,dx + 10\int \frac{dx}{x-3}$$
$$= x - 5\log|x-2| + 10\log|x-3| + C$$

উদাহরণ 13 মান নির্ণয় করো $\displaystyle\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}\,dx$

সমাধান সমাকল্যটি সারণি 7.2 (4) -এ প্রদত্ত ধরনের মত। আমরা লিখতে পারি

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+3}$$

সুতরাং, $$3x-2 = A\,(x+1)\,(x+3) + B\,(x+3) + C\,(x+1)^2$$
$$= A\,(x^2+4x+3) + B\,(x+3) + C\,(x^2+2x+1\,)$$

উভয়দিকে x^2, x -এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে পাই, $A + C = 0$, $4A + B + 2C = 3$ এবং $3A + 3B + C = -2$ । এই সমীকরণগুলো সমাধান করে আমরা পাই,

$A = \frac{11}{4}$, $B = \frac{-5}{2}$ এবং $C = \frac{-11}{4}$ । সুতরাং, সমাকল্যটিকে লেখা যায়,

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4\,(x+1)}-\frac{5}{2\,(x+1)^2}-\frac{11}{4\,(x+3)}$$

সুতরাং, $$\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}\,dx = \frac{11}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{11}{4}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{11}{4}\log|\,x+1\,|+\frac{5}{2\,(x+1)}-\frac{11}{4}\log|\,x+3\,|+C$$

$$= \frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+\frac{5}{2\,(x+1)}+C$$

উদাহরণ 14 মান নির্ণয় করো $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

সমাধান বিবেচনা করো $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ এবং $x^2 = y$ বসাও

তাহলে, $$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$$

লেখা যায় $$\frac{y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4}$$

সুতরাং, $$y = A(y+4) + B(y+1)$$

উভয়দিকে y -এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে পাই, $A + B = 1$ এবং $4A + B = 0$ যা থেকে পাই,

$$A = -\frac{1}{3} \text{ এবং } B = \frac{4}{3}$$

অতএব, $$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^2+4)}$$

সুতরাং, $$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1} x + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1} x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

উপরের উদাহরণে, প্রতিস্থাপন শুধুমাত্র আংশিক ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে হবে কিন্তু সমাকলন অংশে নয়। এখন আমরা একটি উদাহরণ নিই, যেখানে সমাকলন প্রতিস্থাপন এবং আংশিক ভগ্নাংশ পদ্ধতির সমবায়ে গঠিত।

উদাহরণ 15 মান নির্ণয় করো $\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi} d\phi$

সমাধান ধরো, $y = \sin\phi$

তাহলে, $dy = \cos\phi \, d\phi$

সুতরাং, $$\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5-\cos^2\phi - 4\sin\phi}\,d\phi = \int \frac{(3y-2)\,dy}{5-(1-y^2)-4y}$$

$$= \int \frac{3y-2}{y^2-4y+4}\,dy$$

$$= \int \frac{3y-2}{(y-2)^2} = \text{I (ধরো)}$$

এখন, আমরা লিখতে পারি, $$\frac{3y-2}{(y-2)^2} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{(y-2)^2}$$ [7.2 (2) সারণি থেকে]

অতএব, $$3y-2 = A\,(y-2) + B$$

y -এর সহগ ও ধ্রুবক পদ তুলনা করে, আমরা পাই $A = 3$ এবং $B - 2A = -2$, যা থেকে পাওয়া যায় $A = 3$ এবং $B = 4$ ।

সুতরাং, নির্ণেয় সমকলকে লেখা যায়

$$I = \int \left[\frac{3}{y-2} + \frac{4}{(y-2)^2}\right] dy = 3\int \frac{dy}{y-2} + 4\int \frac{dy}{(y-2)^2}$$

$$= 3\log|y-2| + 4\left(-\frac{1}{y-2}\right) + C$$

$$= 3\log|\sin\phi - 2| + \frac{4}{2-\sin\phi} + C$$

$$= 3\log(2-\sin\phi) + \frac{4}{2-\sin\phi} + C$$ (যেহেতু, $2-\sin\phi$ সর্বদা ধনাত্মক)

উদাহরণ 16 মান নির্ণয় করো $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx$

সমাধান সমাকল্যটি হল প্রকৃত মূলদ অপেক্ষক। মূলদ অপেক্ষককে আংশিক ভগ্নাংশে বিভাজন করে (সারণি 7.2(5)] পাই,

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

সুতরাং, $$x^2 + x + 1 = A\,(x^2+1) + (Bx + C)\,(x+2)$$

উভয়দিকে x^2, x -এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে পাই, $A + B = 1$, $2B + C = 1$ এবং $A + 2C = 1$ এই সমীকরণগুলো সমাধান করে আমরা পাই, $A = \frac{3}{5}, B = \frac{2}{5}$ এবং $C = \frac{1}{5}$

সুতরাং, সমাকল্যটিকে লেখা যায়

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+1} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)$$

অতএব,
$$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx = \frac{3}{5}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{5}\int\frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{5}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{3}{5}\log|x+2| + \frac{1}{5}\log|x^2+1| + \frac{1}{5}\tan^{-1}x + C$$

অনুশীলনী 7.5

অনুশীলনীর 1 থেকে 21 পর্যন্ত মূলদ অপেক্ষকগুলোর সমাকল করো

1. $\frac{x}{(x+1)(x+2)}$ **2.** $\frac{1}{x^2-9}$ **3.** $\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

4. $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ **5.** $\frac{2x}{x^2+3x+2}$ **6.** $\frac{1-x^2}{x(1-2x)}$

7. $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$ **8.** $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$ **9.** $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$

10. $\frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$ **11.** $\frac{5x}{(x+1)(x^2-4)}$ **12.** $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}$

13. $\frac{2}{(1-x)(1+x^2)}$ **14.** $\frac{3x-1}{(x+2)^2}$ **15.** $\frac{1}{x^4-1}$

16. $\frac{1}{x(x^n+1)}$ [ইঙ্গিত : লব ও হরকে x^{n-1} দ্বারা গুণ করো এবং $x^n = t$ বসাও]

17. $\frac{\cos x}{(1-\sin x)(2-\sin x)}$ [ইঙ্গিত : $\text{Sin } x = t$ বসাও]

18. $\dfrac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$ **19.** $\dfrac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$ **20.** $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$

21. $\dfrac{1}{(e^x-1)}$ [ইঙ্গিত : $e^x = t$ বসাও]

অনুশীলনীর 22 এবং 23 এর প্রতিটির সঠিক উত্তর বেছে নাও।

22. $\int \dfrac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$ সমান

(A) $\log\left|\dfrac{(x-1)^2}{x-2}\right|+C$ (B) $\log\left|\dfrac{(x-2)^2}{x-1}\right|+C$

(C) $\log\left|\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2\right|+C$ (D) $\log|(x-1)(x-2)|+C$

23. $\int \dfrac{dx}{x(x^2+1)}$ সমান

(A) $\log|x|-\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+C$ (B) $\log|x|+\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+C$

(C) $-\log|x|+\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+C$ (D) $\dfrac{1}{2}\log|x|+\log(x^2+1)+C$

7.6 আংশিক সমাকলন (Integration by Parts)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা সমাকলনের আরও একটি পদ্ধতি বর্ণনা করব, যা অপেক্ষকসমূহের গুণফলের সমাকলনের ক্ষেত্রে খুবই উপযোগী।

যদি u এবং v হল এক চল বিশিষ্ট (ধরো) x এর দুটি অবকলনযোগ্য অপেক্ষক। তাহলে, অবকলনের গুণের নিয়ম প্রয়োগে, আমরা পাই,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

উভয়দিকে সমাকলন করে পাই

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx+\int v\frac{du}{dx}\,dx$$

বা,
$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv-\int v\frac{du}{dx}\,dx \qquad \ldots (1)$$

ধরো,
$$u = f(x) \text{ এবং } \frac{dv}{dx} = g(x) \text{ । তাহলে}$$

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \text{ এবং } v = \int g(x)\,dx$$

অতএব, রাশিমালা (1) -কে লেখা যায়

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = f(x)\int g(x)\, dx - \int [\int g(x)\, dx]\, f'(x)\, dx$$

অর্থাৎ,
$$\int f(x)\, g\,(x)\, dx = f(x)\int g\,(x)\, dx - \int [\, f'\,(x) \int g(x)\, dx]\, dx$$

যদি f -কে প্রথম অপেক্ষক এবং g -কে দ্বিতীয় অপেক্ষক হিসেবে আমরা নিই, তবে এই সূত্রকে নিম্নলিখিত রূপে বিবৃত করা যেতে পারে ঃ

"দুটি অপেক্ষকের গুণফলের সমাকলন = (প্রথম অপেক্ষক) × (দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল) – [(প্রথম অপেক্ষকের অবকল সহগ) × (দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল)] -এর সমাকল"

উদাহরণ 17 মান নির্ণয় করো $\int x \cos x\, dx$

সমাধান ধরো, $f(x) = x$ (প্রথম অপেক্ষক) এবং $g\,(x) = \cos x$ (দ্বিতীয় অপেক্ষক)।
তাহলে, আংশিক সমাকলন থেকে পাওয়া যায়

$$\int x \cos x\, dx = x \int \cos x\, dx - \int [\frac{d}{dx}(x) \int \cos x\, dx]\, dx$$

$$= x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C$$

মনে করো, আমরা $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = x$ নিই। তবে

$$\int x \cos x\, dx = \cos x \int x\, dx - \int [\frac{d}{dx}(\cos x) \int x\, dx]\, dx$$

$$= (\cos x)\frac{x^2}{2} + \int \sin x \frac{x^2}{2} dx$$

অতএব, দেখা যাচ্ছে যে $\int x \cos x\, dx$ সমাকলটি x এর বেশি ঘাত যুক্ত অধিকতর জটিল সমাকলে পরিবর্তিত হয়। সুতরাং, প্রথম অপেক্ষক এবং দ্বিতীয় অপেক্ষক এর সঠিক নির্বাচন গুরুত্বপূর্ণ।

মন্তব্য

(i) এটি উল্লেখ করা খুবই প্রয়োজন যে অপেক্ষকের গুণফলের সকল ক্ষেত্রে আংশিক সমাকলন প্রযোজ্য নয়। উদাহরণস্বরূপ, $\int \sqrt{x} \sin x\, dx$ এর ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি কার্যকর নয়। কারণ এক্ষেত্রে এমন কোনো অপেক্ষকের অস্তিত্ব নেই যার অন্তরকলজ $\sqrt{x}\ \sin x$ হয়।

(ii) লক্ষ করো যে দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকলনের সময়, আমরা কোনো সমাকলন ধ্রুবক যুক্ত করি না। যদি আমরা দ্বিতীয় অপেক্ষক $\cos x$ এর সমাকলকে $\sin x + k$ লিখি, যেখানে k কোনো সমাকলন

ধ্রুবক, তবে

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x(\sin x+k)-\int(\sin x+k)\,dx\\ &= x(\sin x+k)-\int(\sin x\,dx-\int k\,dx\\ &= x(\sin x+k)-\cos x-kx+C = x\sin x+\cos x+C\end{aligned}$$

এ থেকে দেখা যায় যে দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকলের ক্ষেত্রে ধ্রুবক যুক্ত করা অনাবশ্যক যতক্ষণ পর্যন্ত না আংশিক সমাকলের সর্বশেষ ফলাফল প্রাপ্ত হয়।

(iii) সাধারণত, যদি x-এর ঘাতযুক্ত কোনো অপেক্ষক অথবা x -এর একটি বহুপদী রাশি হয়, তবে এটিকে আমরা প্রথম অপেক্ষক হিসেবে নিয়ে থাকি। তথাপি, যেখানে অন্য অপেক্ষক যেমন বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক বা লগারিদমিক অপেক্ষক থাকে, তবে এদের আমরা প্রথম অপেক্ষক হিসেবে নিই।

উদাহরণ 18 মান নির্ণয় করো $\int \log x\,dx$

সমাধান শুরুতে আমরা এমন একটি অপেক্ষক অনুমান করতে অক্ষম যার অন্তরকলজ $\log x$ হয়। আমরা $\log x$ -কে প্রথম অপেক্ষক হিসেবে এবং ধ্রুবক অপেক্ষক 1 কে দ্বিতীয় অপেক্ষক হিসেবে নিই। তবে দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল x হয়।

সুতরাং,

$$\begin{aligned}\int(\log x.1)\,dx &= \log x\int 1\,dx-\int[\frac{d}{dx}(\log x)\int 1\,dx]\,dx\\ &= (\log x)\cdot x-\int\frac{1}{x}\,x\,dx = x\log x-x+C.\end{aligned}$$

উদাহরণ 19 মান নির্ণয় করো $\int x\,e^x dx$

সমাধান x কে প্রথম অপেক্ষক এবং e^x কে দ্বিতীয় অপেক্ষক হিসেবে নাও। দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল হল e^x।

অতএব, $\int x\,e^x dx = x\,e^x-\int 1\cdot e^x dx = xe^x-e^x+C.$

উদাহরণ 20 মান নির্ণয় করো $\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

সমাধান ধরো, $\sin^{-1}x$ প্রথম অপেক্ষক এবং $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ দ্বিতীয় অপেক্ষক।

প্রথমে আমরা দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল নির্ণয় করব, অর্থাৎ $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$t = 1-x^2$ বসাও। তাহলে $dt = -2x\,dx$

সুতরাং, $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$$

অতএব, $$\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (\sin^{-1}x)\left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)dx$$
$$= -\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x + x + C = x - \sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x + C$$

বিকল্পভাবে, $\sin^{-1}x = \theta$ প্রতিস্থাপন করে এবং তারপর আংশিক সমাকলন প্রয়োগ করেও এই সমাকলটি নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 21 মান নির্ণয় করো $\int e^x \sin x\,dx$

সমাধান e^x -কে প্রথম অপেক্ষক এবং $\sin x$ -কে দ্বিতীয় অপেক্ষক হিসেবে নাও। তাহলে, আংশিক সমাকলন দ্বারা পাই

$$I = \int e^x \sin x\,dx = e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x\,dx$$
$$= -e^x \cos x + I_1 \text{ (মনে করো)} \qquad \dots (1)$$

I_1 -এর, e^x এবং $\cos x$ -কে যথাক্রমে প্রথম এবং দ্বিতীয় অপেক্ষক নিয়ে, আমরা পাই

$$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

(1) -এর I_1 এর মান প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \text{ বা, } 2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

সুতরাং, $$I = \int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

বিকল্পভাবে, উপরের সমাকলে $\sin x$ কে প্রথম অপেক্ষক এবং e^x কে দ্বিতীয় অপেক্ষক নিয়েও মান নির্ণয় করা যায়।

7.6.1 $\int e^x [f(x) + f'(x)]\,dx$ *আকারের সমাকল*

আমরা পাই $$I = \int e^x [f(x) + f'(x)]\,dx = \int e^x f(x)\,dx + \int e^x f'(x)\,dx$$
$$= I_1 + \int e^x f'(x)\,dx, \text{ যেখানে } I_1 = \int e^x f(x)\,dx \qquad \dots (1)$$

I_1 -এ $f(x)$ এবং e^x -কে যথাক্রমে প্রথম এবং দ্বিতীয় অপেক্ষক নিয়ে এবং আংশিক সমাকলন দ্বারা পাই $I_1 = f(x)\,e^x - \int f'(x)\,e^x dx + C$ (1)-এ I_1 প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$I = e^x f(x) - \int f'(x)\,e^x dx + \int e^x f'(x)\,dx + C = e^x f(x) + C$$

সুতরাং, $$\int e^x[f(x)+f'(x)]dx = e^x f(x)+C$$

উদাহরণ 22 মান নির্ণয় করো (i) $\int e^x(\tan^{-1}x+\frac{1}{1+x^2})\,dx$ (ii) $\int \frac{(x^2+1)\,e^x}{(x+1)^2}\,dx$

সমাধান

(i) আমরা পাই, $I=\int e^x(\tan^{-1}x+\frac{1}{1+x^2})\,dx$

ধরো, $f(x)=\tan^{-1}x$, তবে $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

অতএব, প্রদত্ত সমাকল্য $e^x\,[f(x)+f'(x)]$ আকারের হয়।

সুতরাং, $I=\int e^x(\tan^{-1}x+\frac{1}{1+x^2})\,dx = e^x\tan^{-1}x + C$

(ii) আমরা পাই, $I=\int \frac{(x^2+1)\,e^x}{(x+1)^2}dx=\int e^x\,[\frac{x^2-1+1+1)}{(x+1)^2}]\,dx$

$$=\int e^x\,[\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}]\,dx \;=\int e^x\,[\frac{x-1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}]\,dx$$

ধরো, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, তাহলে $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ হয়।

অতএব, প্রদত্ত সমাকল্যটি $e^x\,[f(x)+f'(x)]$ আকারের হয়

সুতরাং, $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x\,dx=\frac{x-1}{x+1}e^x+C$

অনুশীলনী 7.6

অনুশীলনী 1 থেকে 22 পর্যন্ত অপেক্ষকগুলোর সমাকলন করো

1. $x\sin x$ **2.** $x\sin 3x$ **3.** $x^2\,e^x$ **4.** $x\log x$

5. $x\log 2x$ **6.** $x^2\log x$ **7.** $x\sin^{-1}x$ **8.** $x\tan^{-1}x$

9. $x\cos^{-1}x$ **10.** $(\sin^{-1}x)^2$ **11.** $\frac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $x\sec^2 x$

13. $\tan^{-1}x$ **14.** $x(\log x)^2$ **15.** $(x^2+1)\log x$

16. $e^x (\sin x + \cos x)$ **17.** $\dfrac{x e^x}{(1+x)^2}$ **18.** $e^x \left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

19. $e^x \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$ **20.** $\dfrac{(x-3)\, e^x}{(x-1)^3}$ **21.** $e^{2x} \sin x$

22. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

অনুশীলনীর 23 এবং 24 এর সঠিক উত্তর বেছে নাও।

23. $\int x^2 e^{x^3} dx =$

(A) $\dfrac{1}{3}e^{x^3} + C$ (B) $\dfrac{1}{3}e^{x^2} + C$

(C) $\dfrac{1}{2}e^{x^3} + C$ (D) $\dfrac{1}{2}e^{x^2} + C$

24. $\int e^x \sec x\, (1+\tan x)\, dx =$

(A) $e^x \cos x + C$ (B) $e^x \sec x + C$

(C) $e^x \sin x + C$ (D) $e^x \tan x + C$

7.6.2 *আরও কয়েক প্রকারের সমাকল (Integrals of some more types)*

এখানে, আমরা আংশিক সমাকলের কৌশলের উপর ভিত্তি করে আরও বিশেষ প্রকার আদর্শ সমাকল নিয়ে আলোচনা করব ঃ

(i) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ (ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$ (iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

(i) ধরো, $I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$

ধ্রুবক অপেক্ষক 1 -কে দ্বিতীয় অপেক্ষক হিসেবে নিয়ে এবং আংশিক সমাকলন দ্বারা আমরা পাই,

$$I = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, x\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \mathrm{I} - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

বা, $$2\mathrm{I} = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

বা, $$\mathbf{I = \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left| x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C}$$

অনুরূপে, ধ্রুবক অপেক্ষক 1 কে দ্বিতীয় অপেক্ষক ধরে, অপর দুটি সমাকলের আংশিক সমাকলন দ্বারা পাই,

(ii) $$\mathbf{\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left| x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C}$$

(iii) $$\mathbf{\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C}$$

বিকল্প রূপে, সমাকল (i), (ii) এবং (iii) -এর ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক প্রতিস্থাপন যথাক্রমে (1) এর জন্য $x = a\sec\theta$, (2) এর জন্য $x = a\tan\theta$ এবং (iii) এর জন্য $x = a\sin\theta$ দ্বারা মান নির্ণয় করা যেতে পারে।

উদাহরণ 23 মান নির্ণয় করো $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$

সমাধান লক্ষ করো যে

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2+4}\,dx$$

$x + 1 = y$ বসাও, যাতে $dx = dy$ হয়। তবে

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int \sqrt{y^2+2^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}y\sqrt{y^2+4} + \frac{4}{2}\log\left| y+\sqrt{y^2+4}\right| + C \qquad \text{[7.6.2 (ii) প্রয়োগে]}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\log\left| x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C$$

উদাহরণ 24 মান নির্ণয় করো $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

সমাধান লক্ষ করো যে $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx$

$x + 1 = y$ বসাও, যাতে $dx = dy$ হয়।

সুতরাং $$\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}y\sqrt{4-y^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2} + C \qquad [7.6.2\ (iii)\ প্রয়োগে]$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

অনুশীলনী 7.7

অনুশীলনীর 1 থেকে 9 অপেক্ষকগুলোর সমাকলন করো।

1. $\sqrt{4-x^2}$ **2.** $\sqrt{1-4x^2}$ **3.** $\sqrt{x^2+4x+6}$

4. $\sqrt{x^2+4x+1}$ **5.** $\sqrt{1-4x-x^2}$ **6.** $\sqrt{x^2+4x-5}$

7. $\sqrt{1+3x-x^2}$ **8.** $\sqrt{x^2+3x}$ **9.** $\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}$

অনুশীলনীর 10 থেকে 11 এর সঠিক উত্তর বেছে নাও।

10. $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ -এর সমান হল

(A) $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right| + C$

(B) $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ (C) $\frac{2}{3}x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(D) $\frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}x^2\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$

11. $\int\sqrt{x^2-8x+7}\,dx$ -এর সমান হল

(A) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(B) $\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x+4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(C) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} - 3\sqrt{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(D) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} - \frac{9}{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

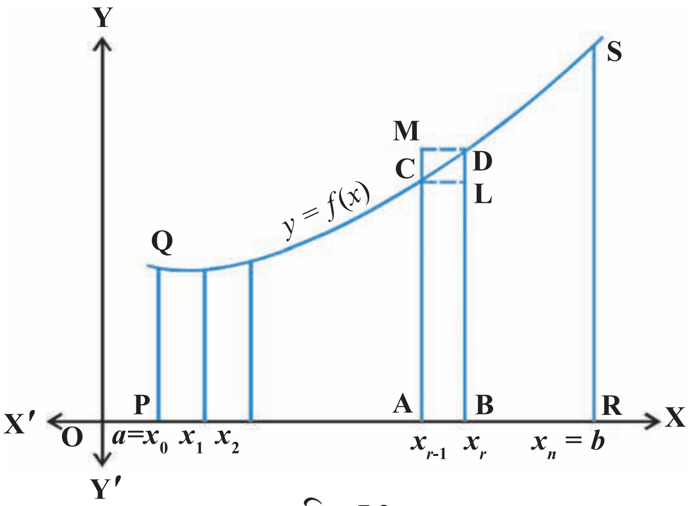
7.7 নির্দিষ্ট সমাকল (Definite Integral)

পূর্বের অনুচ্ছেদে, আমরা অনির্দিষ্ট সমাকল সম্পর্কে অধ্যয়ন করেছি এবং কয়েকটি বিশেষ প্রকারের অপেক্ষক সহ এদের সমাকলের মান নির্ণয় সম্পর্কে কয়েকটি পদ্ধতি আলোচনা করেছি। এই অনুচ্ছেদে, একটি অপেক্ষকের নির্দিষ্ট সমাকল কাকে বলা হয়, তা নিয়ে অধ্যয়ন করব। একটি নির্দিষ্ট সমাকলের মান একটি অনন্য (unique) মান হয়। একটি নির্দিষ্ট সমাকলকে $\int_a^b f(x)\, dx$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, যেখানে a-কে সমাকলের নিম্নসীমা এবং b-কে উর্ধ্বসীমা বলা হয়। নির্দিষ্ট সমাকলের প্রকাশ, হয় একটি যোগফলের সীমারূপে অথবা যদি $[a, b]$ অন্তরালে এর একটি প্রতি অন্তরকলজ F এর অস্তিত্ব থাকে, তবে এর মান, প্রান্তীয় বিন্দুগুলোতে F-এর মানের পার্থক্যের সমান, অর্থাৎ $F(b) - F(a)$ হয়। এখানে, দুটি ক্ষেত্রকে নীচে পৃথকভাবে আমরা আলোচনা করব।

7.7.1 *যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকল (Definite integral as the limit of a sum)*

মনে করো f হল একটি সন্তত অপেক্ষক $[a, b]$ বন্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত। ধরা যাক, অপেক্ষকের সকল মানগুলো অ-ঋণাত্মক হয়, সুতরাং অপেক্ষকটির লেখচিত্র x-অক্ষের উপরে একটি বক্ররেখা হবে।

নির্দিষ্ট সমাকল $\int_a^b f(x)\, dx$ হল, $y = f(x)$ বক্ররেখা, $x = a$, $x = b$ কোটিদ্বয় এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল। এই ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে, আমরা বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং কোটিদ্বয় $x = a$ ও $x = b$ এর মধ্যবর্তী অঞ্চল PRSQP বিবেচনা করি (চিত্র 7.2)।



চিত্র 7.2

$[a, b]$ অন্তরালকে n-সংখ্যক সমান উপ-অন্তরালে যেমন $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{r-1}, x_r], ..., [x_{n-1}, x_n]$, বিভক্ত করি, যেখানে $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, ... , $x_r = a + rh$ এবং $x_n = b = a + nh$ বা, $n = \dfrac{b-a}{h}$। আমরা লক্ষ করি যে $n \to \infty$ হলে, $h \to 0$ হয়।

PRSQP অঞ্চলটি এভাবে n -সংখ্যক উপ-অঞ্চলের যোগফল হিসেবে বিবেচিত হয়, যেখানে প্রতিটি উপ-অঞ্চল, উপ-অন্তরাল $[x_{r-1}, x_r]$, $r = 1, 2, 3, \ldots, n$ -এ সংজ্ঞাত হয়।

চিত্র 7.2 থেকে আমরা পাই,

(ABLC) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল < (ABDCA) < অঞ্চলের ক্ষেত্রফল (ABDM) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। ... (1)

স্পষ্টতই, $x_r - x_{r-1} \to 0$, অর্থাৎ $h \to 0$ হলে, (1) -এর দৃশ্যমান তিনটি ক্ষেত্রফলের সবগুলোই পরস্পর প্রায় সমান হয়। এখন আমরা নীচের যোগফলগুলো গঠন করি।

$$s_n = h\,[f(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})] = h\sum_{r=0}^{n-1} f(x_r) \qquad \ldots (2)$$

এবং
$$S_n = h\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] = h\sum_{r=1}^{n} f(x_r) \qquad \ldots (3)$$

এখানে, s_n এবং S_n যথাক্রমে $[x_{r-1}, x_r]$ যেখানে $r = 1, 2, 3, \ldots, n$ উপ-অন্তরালে দন্ডায়মান নিম্নস্থ এবং উপরিস্থ আয়তক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টিকে নির্দেশ করে।

অসমীকরণ (1) এর যে-কোনো উপ-অন্তরাল $[x_{r-1}, x_r]$ এর জন্য আমরা পাই,

$$s_n < \text{PRSQP অঞ্চলের ক্ষেত্রফল} < S_n \qquad \ldots (4)$$

$n \to \infty$ হলে টুকরাগুলো সরু থেকে আরও সরু হয়, তখন এটি মনে করা যেতে পারে যে (2) এবং (3) উভয়েরই সীমাস্থ মান একই হয় এবং সাধারণ এই সীমাস্থ মানটিই হল বক্রদ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল।

সাংকেতিকরূপে, আমরা লিখি

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \text{PRSQP অঞ্চলের ক্ষেত্রফল} = \int_a^b f(x)dx \qquad \ldots (5)$$

এ থেকে বোঝা যায়, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল হল বক্রের নিম্নস্থ এবং বক্রের উপরিস্থ আয়তক্ষেত্রগুলোর মধ্যবর্তী কোনো ক্ষেত্রফলের একটি সীমাবদ্ধ মানও। সুবিধার জন্যে, আমরা উপ-অন্তরালের উপর দন্ডায়মান আয়তক্ষেত্রগুলোর বাম পার্শ্বের উচ্চতাগুলোকে ধার (edge) হিসেবে নিই। সুতরাং, (5) -কে আমরা লিখতে পারি

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\,[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+(n-1)\,h]$$

বা,
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+(n-1)\,h] \qquad \ldots (6)$$

যেখানে,
$$h = \frac{b-a}{n} \to 0 \text{ যখন } n \to \infty$$

উপরের (6) রাশিমালাটি নির্দিষ্ট সমাকলের ***যোগফলের সীমার*** সংজ্ঞা রূপে পরিচিত।

মন্তব্য কোনো বিশেষ অন্তরালে একটি অপেক্ষকের নির্দিষ্ট সমাকলের মান অপেক্ষক এবং অন্তরালের উপর নির্ভর করে, কিন্তু সমাকলে যুক্ত চলরাশির উপর নির্ভর করে না, যা আমরা স্বাধীন চলরূপে উপস্থাপন করি।

যদি স্বাধীন চল x এর পরিবর্তে t বা u দ্বারা নির্দেশিত হয়, আমরা সমাকলটিকে $\int_a^b f(x)\,dx$ এর পরিবর্তে স্বাভাবিকভাবে $\int_a^b f(t)\,dt$ বা $\int_a^b f(u)\,du$ রূপে লিখি। সুতরাং, সমাকলনের *চলরাশিকে কৃত্রিম (dummy)* চল বলা হয়।

উদাহরণ 25 যোগফলের সীমা রূপে $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান সংজ্ঞা থেকে

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)\,h)],$$

যেখানে, $h = \dfrac{b-a}{n}$

এই উদাহরণে, $a=0,\ b=2,\ f(x)=x^2+1,\ h=\dfrac{2-0}{n}=\dfrac{2}{n}$

সুতরাং,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (x^2+1)\,dx &= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)\right]\\
&= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+\left(\frac{2^2}{n^2}+1\right)+\left(\frac{4^2}{n^2}+1\right)+\ldots+\left(\frac{(2n-2)^2}{n^2}+1\right)\right]\\
&= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n\text{-সংখ্যক}}+\frac{1}{n^2}\left(2^2+4^2+\ldots+(2n-2)^2\right)\right]\\
&= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{2^2}{n^2}\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right)\right]\\
&= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{4}{n^2}\,\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}\right]\\
&= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{2}{3}\,\frac{(n-1)\ (2n-1)}{n}\right]\\
&= 2\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]=2\left[1+\frac{4}{3}\right]=\frac{14}{3}
\end{aligned}$$

উদাহরণ 26 যোগফলের সীমারূপে $\int_0^2 e^x\,dx$ মান নির্ণয় করো।

সমাধান সংজ্ঞা থেকে

$$\int_0^2 e^x\,dx = (2-0)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^0 + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + \ldots + e^{\frac{2n-2}{n}}\right]$$

গুণোত্তর শ্রেণির n -সংখ্যক পদের যোগফল প্রয়োগে, যেখানে $a = 1,\ r = e^{\frac{2}{n}}$, আমরা পাই

$$\int_0^2 e^x\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^{\frac{2n}{n}}-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right] = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^2-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right]$$

$$= \frac{2\,(e^2-1)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}}\right]\cdot 2} = e^2-1 \qquad \left[\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h} = 1 \text{ প্রয়োগ করে}\right]$$

অনুশীলনী 7.8

যোগফলের সীমারূপে নিম্নলিখিত নির্দিষ্ট সমাকলগুলোর মান নির্ণয় করো।

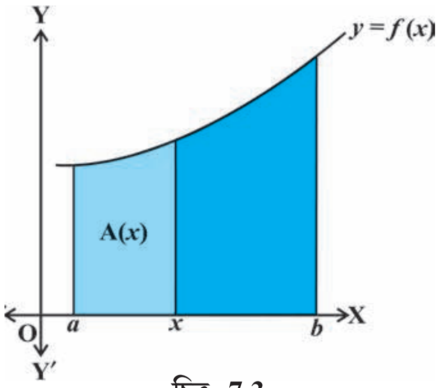
1. $\int_a^b x\,dx$ **2.** $\int_0^5 (x+1)\,dx$ **3.** $\int_2^3 x^2\,dx$

4. $\int_1^4 (x^2-x)\,dx$ **5.** $\int_{-1}^1 e^x\,dx$ **6.** $\int_0^4 (x+e^{2x})\,dx$

7.8 কলনবিদ্যার মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental Theorem of Calculus)

7.8.1 ক্ষেত্রফল অপেক্ষক *(Area function)*

আমরা সংজ্ঞায়িত করেছি $\int_a^b f(x)\,dx$ হল $y = f(x)$ বক্র, কোটিদ্বয় $x = a$ ও $x = b$ এবং x -অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল। ধরো x হল $[a, b]$ অন্তরালে প্রদত্ত একটি বিন্দু। তাহলে $\int_a^b f(x)\,dx$ চিত্র 7.3 এর হালকা ছায়াবৃত অঞ্চলকে বোঝায়।



চিত্র 7.3

[এখানে এটি ধরে নেওয়া হয়েছে যে, $x \in [a, b]$ এর জন্য $f(x)>0$ হয়, নিম্নলিখিত বক্তব্য সাধারণভাবে অন্য অপেক্ষকের জন্যও সত্য হয়।] এই ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল x এর মানের উপর নির্ভরশীল।

অন্যভাবে বলা যায়, এই ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল x -এর একটি অপেক্ষক। আমরা x-এর এই অপেক্ষককে $\mathrm{A}(x)$ দ্বারা চিহ্নিত করি। আমরা এই অপেক্ষক $\mathrm{A}(x)$ -কে *ক্ষেত্রফল অপেক্ষক*বলি এবং নিম্নরূপ সংজ্ঞায়িত

$$\mathbf{A}\,(x) = \int_a^x f(x)\,dx \qquad \ldots (1)$$

এই সংজ্ঞার উপর ভিত্তি করে, দুটি মৌলিক উপপাদ্য দেওয়া হল। যা হোক, এদের প্রমাণ পাঠ্যপুস্তকের পরিধির বহির্ভূত হওয়ায়, আমরা শুধুমাত্র এদেরকে বিবৃত করব।

7.8.2 *সমাকলন বিদ্যার প্রথম মৌলিক উপপাদ্য (First fundamental theorem of integral calculus)*

উপপাদ্য 1 ধরো বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ -এর উপর f একটি সন্তত অপেক্ষক এবং মনে করো $\mathrm{A}\,(x)$ হল ক্ষেত্রফল অপেক্ষক। তাহলে $\mathbf{A'(x) = f\,(x)}$, সকল $\boldsymbol{x \in [a, b]}$ এর জন্য।

7.8.3 *সমাকলন বিদ্যার দ্বিতীয় মৌলিক উপপাদ্য (Second fundamental theorem of integral calculus)*

আমরা নীচে এমন এক গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যের ব্যাখ্যা করব যার সাহায্যে প্রতি-অন্তরকলজের ব্যবহার করে নির্দিষ্ট সমাকলের মান নির্ণয় করা যায়।

উপপাদ্য 2 ধরো বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ -এর উপর f একটি সন্তত অপেক্ষক এবং f এর প্রতি-অন্তরকলজ হল

F তাহলে $\displaystyle\int_a^x \boldsymbol{f(x)\,dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}\,(b) - \mathrm{F}(a)}$

মন্তব্য

(i) উপপাদ্য 2 কে ভাষায় লেখা যায় $\int_a^b f(x)\,dx =$ (ঊর্ধ্বসীমা b -তে f এর প্রতি-অন্তরকলজ F এর মান-নিম্নসীমা a -তে একই প্রতি-অন্তরকলজের মান)

(ii) এই উপপাদ্য খুবই উপযোগী, কারণ এটি আমাদেরকে নির্দিষ্ট সমাকলের মান যোগফলের সীমা নির্ণয় ব্যাতিরেকে, অধিকতর সহজরূপে নির্ণয়ের প্রক্রিয়া প্রদান করে।

(iii) একটি নির্দিষ্ট সমাকল নির্ণয় এমন একটি গুরুত্বপূর্ণ প্রক্রিয়া যার মাধ্যমে একটি অপেক্ষক প্রাপ্ত হয়, যার প্রতি-অন্তরকলজ সমাকল্যের সমান হয়। এটি অবকলন ও সমাকলনের মধ্যবর্তী সম্পর্ককে দৃঢ় করে।

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx$ -এ, f অপেক্ষকটি সুসংজ্ঞাত এবং $[a, b]$ এর উপর সন্তত হওয়া আবশ্যক। উদাহরণস্বরূপ, নির্দিষ্ট সমাকল $\int_{-2}^{3} x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$ এর চর্চা করা ভ্রান্তিমূলক, কারণ বদ্ধ অন্তরাল $[-2, 3]$ এর $-1 < x < 1$ অংশে $f(x) = x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ সংজ্ঞাত নয়।

$\int_a^b f(x)\,dx$ নির্ণয়ের ধাপসমূহ

(i) অনির্দিষ্ট সমাকল $\int f(x)\,dx$ নির্ণয় করো। ধরো, এটি $F(x)$ হয়। এখানে সমাকলন ধ্রুবক রাখার প্রয়োজনীয়তা নেই, কেননা যদি আমরা $F(x)$ এর পরিবর্তে $F(x)+C$ বিবেচনা করি, তবে আমরা পাই,

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)+C]_a^b = [F(b)+C]-[F(a)+C] = F(b)-F(a).$$

এভাবে, নির্দিষ্ট সমাকলের মান নির্ণয়ে স্বেচ্ছ ধ্রুবক বিলীন হয়।

(ii) $F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b$ নির্ণয় করো, যা হল $\int_a^b f(x)\,dx$ এর মান।

উদাহরণ 27 নীচের সমাকলগুলো নির্ণয় করো :

(i) $\int_2^3 x^2\,dx$ (ii) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30-x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$

(iii) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$ (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t\cos 2t\,dt$

সমাধান

(i) ধরো, $I=\int_2^3 x^2\,dx$. যেহেতু $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} = F(x)$,

সুতরাং, দ্বিতীয় মৌলিক উপপাদ্য দ্বারা আমরা পাই,

$$I = F(3)-F(2) = \frac{27}{3}-\frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

(ii) ধরো, $I=\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30-x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$। আমরা প্রথমে সমাকল্যের প্রতি-অন্তরকলজ নির্ণয় করব।

$30-x^{\frac{3}{2}}=t$ ধরি। তাহলে $-\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = dt$ বা, $\sqrt{x}\,dx = -\frac{2}{3}dt$

সুতরাং, $$\int \frac{\sqrt{x}}{(30-x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{t}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-x^{\frac{3}{2}})}\right] = F(x)$$

অতএব, কলনবিদ্যার দ্বিতীয় মৌলিক উপপাদ্য থেকে আমরা পাই,

$$I = F(9) - F(4) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right]_4^9$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-27)} - \frac{1}{30-8}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{22}\right] = \frac{19}{99}$$

(iii) ধরো, $I = \int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)\,(x+2)}$

আংশিক ভগ্নাংশ প্রয়োগে, আমরা পাই $\frac{x}{(x+1)\,(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$

সুতরাং, $\int \frac{x\,dx}{(x+1)\,(x+2)} = -\log|\,x+1\,| + 2\log|\,x+2\,| = F(x)$

অতএব, কলনবিদ্যার দ্বিতীয় মৌলিক উপপাদ্য প্রয়োগে, আমরা পাই

$$I = F(2) - F(1) = [-\log 3 + 2\log 4] - [-\log 2 + 2\log 3]$$

$$= -3\log 3 + \log 2 + 2\log 4 = \log\left(\frac{32}{27}\right)$$

(iv) ধরো $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2\,t\,dt$ । $\int \sin^3 2t \cos 2\,t\,dt$ এর ক্ষেত্রে

$\sin 2t = u$ ধরো, যাতে $2\cos 2t\,dt = du$ বা $\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\,du$ হয়।

সুতরাং, $\int \sin^3 2t \cos 2\,t\,dt = \frac{1}{2}\int u^3 du$

$$= \frac{1}{8}[u^4] = \frac{1}{8}\sin^4 2t = F(t) \text{ ধরো}$$

অতএব, সমাকলন বিদ্যার দ্বিতীয় মৌলিক উপপাদ্য থেকে পাই,

$$I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{8}\left[\sin^4\frac{\pi}{2} - \sin^4 0\right] = \frac{1}{8}$$

অনুশীলনী 7.9

1 থেকে 20 পর্যন্ত নির্দিষ্ট সমাকলগুলো নির্ণয় করো।

1. $\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx$ **2.** $\int_{2}^{3}\frac{1}{x}\,dx$ **3.** $\int_{1}^{2}(4x^3-5x^2+6x+9)\,dx$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx$ **5.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$ **6.** $\int_{4}^{5}e^x dx$ **7.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{cosec} x\,dx$ **9.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **10.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ **11.** $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-1}$

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$ **13.** $\int_{2}^{3}\frac{x\,dx}{x^2+1}$ **14.** $\int_{0}^{1}\frac{2x+3}{5x^2+1}\,dx$ **15.** $\int_{0}^{1}x\,e^{x^2}\,dx$

16. $\int_{1}^{2}\frac{5x^2}{x^2+4x+3}\,dx$ **17.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2\sec^2 x+x^3+2)\,dx$ **18.** $\int_{0}^{\pi}(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2})\,dx$

19. $\int_{0}^{2}\frac{6x+3}{x^2+4}\,dx$ **20.** $\int_{0}^{1}(x\,e^x+\sin\frac{\pi x}{4})\,dx$

অনুশীলনীর 21 এবং 22 এর সঠিক উত্তরটি বেছে নাও।

21. $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$ এর সমান হল

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

22. $\int_{0}^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{4+9x^2}$ এর সমান হল

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{12}$ (C) $\frac{\pi}{24}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

7.9 প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে নির্দিষ্ট সমাকল নির্ণয় (Evaluation of Definite Integrals by Substitution)

পূর্বের অনুচ্ছেদে, আমরা অনির্দিষ্ট সমাকল নির্ণয়ে কয়েকটি পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করেছি। অনির্দিষ্ট সমাকলের মান নির্ণয়ে একটি গুরুত্বপূর্ণ পদ্ধতি হল প্রতিস্থাপন পদ্ধতি।

প্রতিস্থাপন পদ্ধতির মাধ্যমে $\int_a^b f(x)\,dx$ নির্ণয়ে নিম্নলিখিত ধাপসমূহ প্রয়োগ হয়:

1. সীমা ব্যাতিরেকে সমাকল বিবেচনা করো এবং $y = f(x)$ অথবা $x = g(y)$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে প্রদত্ত সমাকলকে জ্ঞাত আকারে পরিবর্তিত করো।
2. সমাকলন ধ্রুবক বাদে, নূতন চলের সাপেক্ষে নতুন সমাকল্যের সমাকল করো।
3. নূতন চলরাশিকে পুনরায় মূল চলরাশিতে প্রতিস্থাপিত করো এবং উত্তর মূল চলরাশির আকারে লিপিবদ্ধ করো।
4. (3) -এ প্রাপ্ত উত্তরে সমাকলের প্রদত্ত সীমার সাপেক্ষে মান নির্ণয় করো এবং উর্ধ্বসীমা ও নিম্নসীমার মানের পার্থক্য নির্ণয় করো।

দ্রষ্টব্য এই পদ্ধতির দ্রুতকরণের জন্য, আমরা নিম্নলিখিতরূপে অগ্রসর হতে পারি : ধাপ (1) এবং (2) সম্পন্ন করার পর ধাপ (3) সম্পন্ন করার আবশ্যকতা নেই। এখানে সমাকল কে নতুন চলরাশিতে রাখা হয় এবং সমাকলের সীমা নতুন চলরাশি অনুসারে পরিবর্তিত করে সরাসরি অন্তিম ধাপ সম্পন্ন করা হয়।

চলো আমরা উদাহরণের মাধ্যমে বর্ণনা করি।

উদাহরণ 28 $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান $t = x^5 + 1$ বসাও, তাহলে $dt = 5x^4\,dx$ ।

সুতরাং, $$\int 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}}$$

অতএব, $$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \frac{2}{3}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{3}\left[(1^5+1)^{\frac{3}{2}} - \left((-1)^5+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

বিকল্পরূপে, প্রথমে আমরা সমাকলটিকে রূপান্তর করি এবং তারপর পরিবর্তিত সমাকলের নূতন সীমার সাপেক্ষে মান নির্ণয় করি।

ধরো, $t = x^5 + 1$। তবে $dt = 5\,x^4\,dx$।

লক্ষ করো, যখন $x = -1,\ t = 0$ এবং যখন $x = 1,\ t = 2$

সুতরাং, যেহেতু x চলাচল করে -1 থেকে 1, তাই t চলাচল করে 0 থেকে 2

অতএব, $$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{t}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

উদাহরণ 29 $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো, $t = \tan^{-1}x$, তাহলে $dt = \frac{1}{1+x^2}\,dx$ । নতুন সীমা হল, যখন $x = 0,\ t = 0$ এবং যখন $x = 1,\ t = \frac{\pi}{4}$ । সুতরাং, যখন x এর সীমা 0 থেকে 1, তখন t এর সীমা 0 থেকে $\frac{\pi}{4}$ ।

অতএব, $$\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{16} - 0\right] = \frac{\pi^2}{32}$$

অনুশীলনী 7.10

প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে অনুশীলনীর 1 থেকে 8 পর্যন্ত সমাকলগুলোর মান নির্ণয় করো।

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}\,\cos^5\phi\,d\phi$ **3.** $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

4. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}$ ($x + 2 = t^2$ বসাও) **5.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

6. $\int_0^2 \frac{dx}{x+4-x^2}$ **7.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **8.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)e^{2x}\,dx$

অনুশীলনীর 9 এবং 10 এর সঠিক উত্তরটি বেছে নাও।

9. সমাকল $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,dx$ এর মান হল

(A) 6 (B) 0 (C) 3 (D) 4

10. যদি $f(x) = \int_0^x t\sin t\,dt$ হয়, তবে $f'(x)$ হল

(A) $\cos x + x\sin x$ (B) $x\sin x$

(C) $x\cos x$ (D) $\sin x + x\cos x$

7.10 নির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি ধর্মাবলী (Some Properties of Definite Integrals) :

নীচে আমরা নির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম লিপিবদ্ধ করেছি। এগুলো অধিকতর সহজরূপে নির্দিষ্ট সমাকল নির্ণয়ে খুবই কার্যকরী।

P_0 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

P_1 : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ । বিশেষত, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P_2 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

P_3 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

P_4 : $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(লক্ষ করো P_4 হল P_3-এর একটি বিশেষ ক্ষেত্র)

P_5 : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

P_6 : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$ যদি $f(2a-x) = f(x)$ এবং

0 যদি $f(2a-x) = -f(x)$

P_7 : (i) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, যদি f একটি যুগ্ম অপেক্ষক হয়, অর্থাৎ, যদি $f(-x) = f(x)$.

(ii) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$, যদি f একটি অযুগ্ম অপেক্ষক হয়, অর্থাৎ $f(-x) = -f(x)$.

আমরা একের পর এক করে এই ধর্মগুলোর প্রমাণ করছি।

P_0-এর প্রমাণ : এটি $x = t$ প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে সরাসরি প্রমাণিত হয়।

P_1-এর প্রমাণ : ধরো F হল f-এর প্রতি-অন্তরকলজ। তাহলে, কলনবিদ্যার দ্বিতীয় মৌলিক উপপাদ্য অনুসারে, আমরা পাই $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) \quad F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)\,dx$

এখানে আমরা লক্ষ করি যে, যদি $a = b$ হয়, তবে $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ হয়।

P_2-এর প্রমাণ : ধরো F হল f-এর প্রতি-অন্তরকলজ। তাহলে

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \ldots (1)$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a) \qquad \ldots (2)$$

এবং

$$\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c) \qquad \ldots (3)$$

(2) এবং (3) যোগ করে পাই, $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) \quad \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

এটি P_2 ধর্মকে প্রমাণ করে।

P_3-এর প্রমাণ: ধরো $t = a + b - x$, তাহলে $dt = -dx$। যখন $x = a, t = b$ এবং যখন $x = b, t = a$. হয়।
সুতরাং,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= -\int_b^a f(a+b \quad t)\,dt \\ &= \int_a^b f(a+b \quad t)\,dt \;\; (P_1 \text{ দ্বারা}) \\ &= \int_a^b f(a+b \quad x)\,dx \;\; (P_0 \text{ দ্বারা})\end{aligned}$$

P_4-এর প্রমাণ : $t = a - x$ বসাও। তাহলে $dt = -dx$ হয়। যখন $x = 0, t = a$ এবং $x = a, t = 0$ হয়।
এখন P_3-এর মত অগ্রসর হও।

P_5-এর প্রমাণ : P_2 প্রয়োগে, আমরা পাই $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$ ।

ধরো, ডানপাশের দ্বিতীয় সমাকলের ক্ষেত্রে $t = 2a - x$। তাহলে $dt = -dx$। যখন $x = a, t = a$ এবং $x = 2a, t = 0$। তাছাড়া $x = 2a - t$ হয়।
সুতরাং, দ্বিতীয় সমাকলটি পরিবর্তিত হয়

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

অতএব, $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

P_6-এর প্রমাণ : P_5 প্রয়োগে, আমরা পাই $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx \quad \ldots (1)$

এখন, যদি $f(2a - x) = f(x)$ হয়, তবে (1) পরিবর্তিত হয়

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

এবং যদি $f(2a - x) = -f(x)$ হয়, তবে (1) পরিবর্তিত হয়

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

P_7-এর প্রমাণ : P_2 প্রয়োগে, আমরা পাই

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$ । তাহলে

ডানপাশের প্রথম সমাকলের ক্ষেত্রে $t = -x$ ধরো,
$dt = -dx$ । যখন $x = -a, t = a$ এবং যখন
$x = 0, t = 0$। তাছাড়া $x = -t$।

সুতরাং, $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad (P_0 \text{ দ্বারা}) \quad \ldots (1)$$

(i) এখন, যদি f একটি যুগ্ম অপেক্ষক হয়, তবে $f(-x) = f(x)$ এবং তাই (1) পরিবর্তিত হয়

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(ii) যদি f একটি অযুগ্ম অপেক্ষক হয়, তবে $f(-x) = -f(x)$ এবং তাই (1) পরিবর্তিত হয়

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

উদাহরণ 30 মান নির্ণয় করো, $\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx$

সমাধান আমরা লক্ষ করি যে $[-1, 0]$ অন্তরালে $x^3 - x \geq 0$ এবং $[0, 1]$ অন্তরালে $x^3 - x \leq 0$ এবং $[1, 2]$ অন্তরালে $x^3 - x \geq 0$ হয়। সুতরাং P_2 দ্বারা লিখতে পারি

$$\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} -(x^3 - x)\,dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

উদাহরণ 31 মান নির্ণয় করো $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$

সমাধান আমরা লক্ষ করি যে, $\sin^2 x$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক। সুতরাং, P_7 (i) দ্বারা আমরা পাই,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos 2x)}{2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

উদাহরণ 32 মান নির্ণয় করো, $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

সমাধান ধরো, $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ । তাহলে, P_4 দ্বারা পাই,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)\, dx}{1+\cos^2(\pi - x)}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} - I$$

বা, $$2\,I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

বা, $$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

$\cos x = t$ বসাও যাতে $-\sin x\, dx = dt$ হয়। যখন $x = 0$, $t = 1$ এবং যখন $x = \pi$, $t = -1$।
সুতরাং, (P_1 দ্বারা) আমরা পাই

$$I = \frac{-\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \pi\int_0^{1} \frac{dt}{1+t^2} \quad (P_7 \text{ দ্বারা, যেহেতু } \frac{1}{1+t^2} \text{ যুগ্ম অপেক্ষক})$$

$$= \pi\left[\tan^{-1} t\right]_0^1 = \pi\left[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0\right] = \pi\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi^2}{4}$$

উদাহরণ 33 মান নির্ণয় করো, $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x\, dx$

সমাধান ধরো, $I = \int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x\, dx$ । ধরো, $f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$। তাহলে,

$f(-x) = \sin^5(-x)\cos^4(-x) = -\sin^5 x\cos^4 x = -f(x)$, অর্থাৎ f একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।
সুতরাং, P_7 (ii) দ্বারা, $I = 0$

উদাহরণ 34 মান নির্ণয় করো $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

সমাধান ধরো, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ ... (1)

তাহলে, P_4 দ্বারা

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 (\frac{\pi}{2} - x)}{\sin^4(\frac{\pi}{2} - x) + \cos^4(\frac{\pi}{2} - x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx \quad ... (2)$$

(1) এবং (2) যোগ করে পাই,

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

সুতরাং, $I = \frac{\pi}{4}$

উদাহরণ 35 মান নির্ণয় করো $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$

সমাধান ধরো, $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}\, dx}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}$ ... (1)

তাহলে, P_3 দ্বারা

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}\, dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)} + \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \quad ... (2)$$

(1) এবং (2) যোগ করে পাই,

$$2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$ । অতএব $I = \frac{\pi}{12}$

উদাহরণ 36 মান নির্ণয় করো $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$

সমাধান ধরো, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$

তবে, P_4 দ্বারা পাই

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx$$

I-এর মান দুটি যোগ করে পাই,

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x \cos x + \log 2 - \log 2) \, dx$$ ($\log 2$ যোগ করে এবং বিয়োগ করে পাই)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 \, dx \quad \text{(কেন ?)}$$

$2x = t$, প্রথম সমাকলে বসাও। তখন $2\,dx = dt$, যখন $x = 0$, $t = 0$ এবং যখন $x = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$।

অতএব, $$2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t \, dt - \frac{\pi}{2} \log 2$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt - \frac{\pi}{2} \log 2 \quad [P_6 \text{ দ্বারা } (\pi - t) = \sin t)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx - \frac{\pi}{2} \log 2$$ (চলরাশি t কে x-এ পরিবর্তিত করে)

$$= I - \frac{\pi}{2} \log 2$$

অতএব, $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \frac{-\pi}{2} \log 2.$$

অনুশীলনী 7.11

নির্দিষ্ট সমাকলের ধর্মাবলী প্রয়োগে, অনুশীলনীর 1 থেকে 19 সমাকলগুলোর মান নির্ণয় করো।

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x \, dx}{\sin^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{3}{2}} x}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x \, dx}{\sin^5 x + \cos^5 x}$

5. $\int_{-5}^{5} |x+2| \, dx$

6. $\int_2^8 |x-5| \, dx$

7. $\int_0^1 x(1-x)^n \, dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x) \, dx$

9. $\int_0^2 x\sqrt{2-x} \, dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\log \sin x - \log \sin 2x) \, dx$

11. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

12. $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1+\sin x}$

13. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$

14. $\int_0^{2\pi} \cos^5 x \, dx$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\sin x \cos x} dx$

16. $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x) \, dx$

17. $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}} dx$

18. $\int_0^4 |x-1| \, dx$

19. দেখাও যে $\int_0^a f(x)g(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$, যদি $f(x) = f(a-x)$ এবং $g(x) + g(a-x) = 4$ দ্বারা f এবং g সংজ্ঞাত হয়।

অনুশীলনীর 20 এবং 21 এর সঠিক উত্তরটি বেছে নাও।

20. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1) \, dx$ -এর মান হল

(A) 0 (B) 2 (C) π (D) 1

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx$ -এর মান হল

(A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 0 (D) -2

বিবিধ উদাহরণমালা

উদাহরণ 37 মান নির্ণয় করো $\int \cos 6x \sqrt{1+\sin 6x}\, dx$

সমাধান $t = 1 + \sin 6x$ বসাও, যাতে $dt = 6 \cos 6x\, dx$ হয়।

অতএব, $$\int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\, dx = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9}(1+\sin 6x)^{\frac{3}{2}} + C$$

উদাহরণ 38 মান নির্ণয় করো $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5}\, dx$

সমাধান আমরা পাই $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5}\, dx = \int \frac{(1-\frac{1}{x^3})^{\frac{1}{4}}}{x^4}\, dx$

$1-\frac{1}{x^3} = 1 - x^{-3} = t$ বসাও, যাতে $\frac{3}{x^4} dx = dt$ হয়।

অতএব, $$\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5}\, dx = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{4}}\, dt = \frac{1}{3}\times\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{15}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{5}{4}} + C$$

উদাহরণ 39 মান নির্ণয় করো $\int \frac{x^4\, dx}{(x-1)(x^2+1)}$

সমাধান আমরা পাই

$$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} = (x+1) + \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$= (x+1) + \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} \qquad \ldots (1)$$

এখন লেখা যায়, $$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)} \qquad \ldots (2)$$

সুতরাং, $1 = A(x^2+1) + (Bx + C)(x-1)$

$$= (A+B)x^2 + (C-B)x + A - C$$

উভয়দিকে সহগগুলোর তুলনা করে আমরাপাই, $A + B = 0$, $C - B = 0$ এবং $A - C = 1$, যা থেকে $A = \frac{1}{2}, B = C = -\frac{1}{2}$ । A, B এবং C এর মানগুলো (2) -এ বসিয়ে আমরা পাই,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} \qquad \ldots (3)$$

আবার (1)-এ (3)-এর প্রতিস্থাপন দ্বারা পাই

$$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} = (x+1) + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

অতএব,

$$\int \frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

উদাহরণ 40 মান নির্ণয় করো $\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$

সমাধান ধরো, $I = \int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$

$$= \int \log(\log x)\, dx + \int \frac{1}{(\log x)^2} dx$$

প্রথম সমাকলে, 1-কে দ্বিতীয় অপেক্ষক হিসেবে নাও। তারপর এটির আংশিক সমাকল করে পাই,

$$I = x\log(\log x) - \int \frac{1}{x\log x} x\, dx + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \int \frac{dx}{\log x} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} \qquad \ldots (1)$$

পুনরায়, $\int \frac{dx}{\log x}$ এর ক্ষেত্রে 1-কে দ্বিতীয় অপেক্ষক হিসেবে ধরো এবং এটির আংশিক সমাকল করে পাওয়া যায়

$$\int \frac{dx}{\log x} = \left[\frac{x}{\log x} - \int x\left\{-\frac{1}{(\log x)^2}\left(\frac{1}{x}\right)\right\} dx\right] \qquad \ldots (2)$$

(1) নং-এ (2) বসিয়ে পাই,

$$\mathrm{I} = x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{dx}{(\log x)^2} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} = x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} + \mathrm{C}$$

উদাহরণ 41 মান নির্ণয় করো $\int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx$

সমাধান আমরা পাই

$$\mathrm{I} = \int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx = \int \sqrt{\tan x}\,(1 + \cot x)\, dx$$

$\tan x = t^2$ বসাও, যাতে $\sec^2 x\, dx = 2t\, dt$ হয়।

বা, $$dx = \frac{2t\, dt}{1+t^4}$$

তাহলে, $$\mathrm{I} = \int t\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\frac{2t}{(1+t^4)}\, dt$$

$$= 2\int \frac{(t^2+1)}{t^4+1}\, dt = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt}{\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)} = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2}$$

$t - \frac{1}{t} = y$ বসাও, যাতে $\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = dy$ হয়। তাহলে

$$\mathrm{I} = 2\int \frac{dy}{y^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\,\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}} + \mathrm{C} = \sqrt{2}\,\tan^{-1}\frac{\left(t - \frac{1}{t}\right)}{\sqrt{2}} + \mathrm{C}$$

$$= \sqrt{2}\,\tan^{-1}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}\,t}\right) + \mathrm{C} = \sqrt{2}\,\tan^{-1}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2\tan x}}\right) + \mathrm{C}$$

উদাহরণ 42 মান নির্ণয় করো $\int \frac{\sin 2x \cos 2x\, dx}{\sqrt{9 - \cos^4(2x)}}$

সমাধান ধরো, $\mathrm{I} = \int \frac{\sin 2x \cos 2x}{\sqrt{9 - \cos^4 2x}}\, dx$

$\cos^2(2x) = t$ বসাও, যাতে $4 \sin 2x \cos 2x\, dx = -\, dt$ হয়।

সুতরাং, $$I = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = -\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + C = -\frac{1}{4}\sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\cos^2 2x\right] + C$$

উদাহরণ 43 মান নির্ণয় করো $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin(\pi x)|\, dx$

সমাধান এখানে $f(x) = |x \sin \pi x| = \begin{cases} x \sin \pi x \text{ যখন } -1 \le x \le 1 \\ -x \sin \pi x \text{ যখন } 1 \le x \le \frac{3}{2} \end{cases}$

সুতরাং, $$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x|\, dx = \int_{-1}^{1} x \sin \pi x\, dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} - x \sin \pi x\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x \sin \pi x\, dx - \int_{1}^{\frac{3}{2}} x \sin \pi x\, dx$$

ডানপাশের উভয় সমাকলের সমাকলন করে পাই,

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x|\, dx = \left[\frac{-x\cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \left[-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right] = \frac{3}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

উদাহরণ 44 মান নির্ণয় করো $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

সমাধান ধরো, $I = \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\, dx}{a^2 \cos^2(\pi - x) + b^2 \sin^2(\pi - x)}$ (P_4 প্রয়োগে)

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - I$$

অতএব, $$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

বা, $$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$ (P_6 প্রয়োগে)

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\,dx}{a^2 + b^2\tan^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cosec}^2 x\,dx}{a^2\cot^2 x + b^2}\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^1 \frac{dt}{a^2 + b^2t^2} - \int_1^0 \frac{du}{a^2u^2 + b^2}\right]$$ ($\tan x = t$ এবং $\cot x = u$ বসাও)

$$= \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{bt}{a}\right]_0^1 - \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{au}{b}\right]_1^0 = \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{b}{a} + \tan^{-1}\frac{a}{b}\right] = \frac{\pi^2}{2ab}$$

অধ্যায় 7 এর বিবিধ অনুশীলনী

অনুশীলনীর 1 থেকে 24 এর অপেক্ষকসমূহের সমাকল করো।

1. $\dfrac{1}{x - x^3}$ **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$ **3.** $\dfrac{1}{x\sqrt{ax - x^2}}$ [ইঙ্গিত: $x = \dfrac{a}{t}$ বসাও]

4. $\dfrac{1}{x^2(x^4+1)^{\frac{3}{4}}}$ **5.** $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$ [ইঙ্গিত: $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right)}$, বসাও $x = t^6$]

6. $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$ **7.** $\dfrac{\sin x}{\sin(x-a)}$ **8.** $\dfrac{e^{5\log x} - e^{4\log x}}{e^{3\log x} - e^{2\log x}}$

9. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}$ **10.** $\dfrac{\sin^8 x - \cos^8 x}{1 - 2\sin^2 x\cos^2 x}$ **11.** $\dfrac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

12. $\dfrac{x^3}{\sqrt{1 - x^8}}$ **13.** $\dfrac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$ **14.** $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

15. $\cos^3 x\, e^{\log \sin x}$ **16.** $e^{3\log x}(x^4+1)^{-1}$ **17.** $f'(ax+b)\,[f(ax+b)]^n$

18. $\dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 x\sin(x+\alpha)}}$ **19.** $\dfrac{\sin^{-1}\sqrt{x} - \cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x}}$, $x \in [0, 1]$

20. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ **21.** $\dfrac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x$ **22.** $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$

23. $\tan^{1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **24.** $\dfrac{\sqrt{x^2+1}\left[\log(x^2+1)-2\log x\right]}{x^4}$

অনুশীলনী 25 থেকে 33-এর নির্দিষ্ট সমকলগুলোর মান নির্ণয় করো।

25. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x\left(\dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx$ **26.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x\ \cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$ **27.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x\,dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

28. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx$ **29.** $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$ **30.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}\,dx$

31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \tan^{-1}(\sin x)\,dx$ **32.** $\int_0^{\pi} \dfrac{x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$

33. $\int_1^4 [|x-1|+|x-2|+|x-3|]\,dx$

অনুশীলনীর নিম্নলিখিতগুলো (34 থেকে 39) প্রমাণ করো।

34. $\int_1^3 \dfrac{dx}{x^2(x+1)}=\dfrac{2}{3}+\log\dfrac{2}{3}$ **35.** $\int_0^1 x e^x dx=1$

36. $\int_{-1}^1 x^{17}\cos^4 x\,dx=0$ **37.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx=\dfrac{2}{3}$

38. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\,dx=1-\log 2$ **39.** $\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx=\dfrac{\pi}{2}-1$

40. যোগফলের সীমারূপে $\int_0^1 e^{2-3x}dx$ এর মান নির্ণয় করো।

অনুশীলনীর 41 থেকে 44 এর সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো।

41. $\int \dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}$ এর মান হল

(A) $\tan^{-1}(e^x)+C$ (B) $\tan^{-1}(e^{-x})+C$

(C) $\log(e^x-e^{-x})+C$ (D) $\log(e^x+e^{-x})+C$

42. $\int \dfrac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$ এর মান হল

(A) $\dfrac{-1}{\sin x+\cos x}+C$ (B) $\log|\sin x+\cos x|+C$

(C) $\log|\sin x-\cos x|+C$ (D) $\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}+C$

43. যদি $f(a+b-x)=f(x)$ হয়, তবে $\int_a^b x\, f(x)\, dx$ এর মান হল

(A) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b-x)\, dx$ (B) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)\, dx$

(C) $\frac{b-a}{2}\int_a^b f(x)\, dx$ (D) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\, dx$

44. $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right) dx$ এর মান হল

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) $\frac{\pi}{4}$

সারসংক্ষেপ

- সমাকলন হল অবকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া। অবকলন বিদ্যায় আমরা একটি প্রদত্ত অপেক্ষকের অবকলজ বা অবকল নির্ণয় করি, কিন্তু সমাকলন বিদ্যায় আমরা একটি অপেক্ষক নির্ণয় করি যার অবকল প্রদত্ত হয়। এরূপে, সমাকলন হল অবকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া।

  ধরো, $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x)=f(x)$। তাহলে আমরা লিখি $\int f(x)\, dx=\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}$। এই সমাকলগুলোকে অনির্দিষ্ট সমাকল বা সাধারণ সমাকল বলা হয়, C-কে বলা হয় সমাকলন ধ্রুবক। এইসব সমাকলগুলো একটি ধ্রুবক দ্বারা পার্থক্যযুক্ত হয়।

- জ্যামিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে অনির্দিষ্ট সমাকল দ্বারা বক্রের পরিবারের সংগ্রহ বোঝায় যার প্রতিটি সদস্য y-অক্ষ বরাবর উপর দিক অথবা নীচের দিকে নিজেদের মধ্যে সমান্তরালভাবে স্থানান্তরের মাধ্যমে পাওয়া যায়।

- অনির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি ধর্মাবলী নিম্নরূপ :

  1. $\int [f(x)+g(x)]\, dx=\int f(x)\, dx+\int g(x)\, dx$

  2. যে-কোনো বাস্তবসংখ্যা k-এর জন্য, $\int k\, f(x)\, dx=k\int f(x)\, dx$

  আরও সাধারণভাবে, যদি $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ হল অপেক্ষকসমূহ এবং $k_1, k_2, \ldots, k_n$ বাস্তব সংখ্যা সমূহ হয়, তবে

  $$\int [k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+\ldots+k_n f_n(x)]\, dx$$

  $$= k_1\int f_1(x)\, dx+k_2\int f_2(x)\, dx+\ldots+k_n\int f_n(x)\, dx$$

◆ কয়েকটি আদর্শ সমাকল (Some standard integrals)

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$. বিশেষ ক্ষেত্রে, $\int dx = x + C$

(ii) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(iii) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(iv) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

(v) $\int \text{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

(vi) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

(vii) $\int \text{cosec}\, x \cot x \, dx = -\text{cosec}\, x + C$

(viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$

(x) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(xi) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$

(xii) $\int e^x dx = e^x + C$

(xiii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

(xiv) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$

(xv) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\text{cosec}^{-1} x + C$

(xvi) $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$

◆ আংশিক ভগ্নাংশে বিভাজনের দ্বারা সমাকল (Integration by partial fractions)

স্মরণে এনে দেখো যে মূলদ অপেক্ষক হল $\frac{P(x)}{Q(x)}$ আকারে দুটি বহুপদী রাশিমালার অনুপাত, যেখানে $P(x)$ এবং $Q(x)$ হল x -এর দুটি বহুপদী রাশিমালা এবং $Q(x) \neq 0$। যদি বহুপদী রাশিমালা $P(x)$ -এর ঘাত বহুপদী রাশিমালা $Q(x)$ -এর ঘাতের চেয়ে বেশী হয়। তবে আমরা $P(x)$ -কে $Q(x)$ দ্বারা ভাগ করি যাতে $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ হয়, যেখানে $T(x)$ হল x এর একটি বহুপদী রাশিমালা এবং $P_1(x)$ -এর ঘাত $Q(x)$ -এর ঘাতের চেয়ে কম হয়। $T(x)$ বহুপদী রাশিমালাকে সহজেই সমাকল করা যায়। $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ -এর সমাকল করা যায় $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ -কে

নিম্নলিখিতরূপে আংশিক ভগ্নাংশে বিভাজনের মাধ্যমে :

1. $\dfrac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}, \ a \neq b$

2. $\dfrac{px+q}{(x-a)^2} = \dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}$

3. $\dfrac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$

4. $\dfrac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)} = \dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\dfrac{C}{x-b}$

5. $\dfrac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \dfrac{A}{x-a}+\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

যেখানে $x^2 + bx + c$ -কে আর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না।

◆ প্রতিস্থাপনের দ্বারা সমাকলন (Integration by substitution)

সমাকলনের চলরাশি পরিবর্তনের মাধ্যমে প্রদত্ত সমাকলকে একটি মৌলিক সমাকলে অনেক ক্ষেত্রে রূপান্তর করা যায়। এই প্রক্রিয়ায় যখন একটি চলরাশিকে অপর কোনো একটি চলরাশিতে পরিবর্তিত করা হয়, তখন এটিকে প্রতিস্থাপন প্রক্রিয়া বলা হয়। যখন সমাকল্য কোনো ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক যুক্ত থাকে, তখন সমাকল নির্ণয়ের জন্য আমরা সুপরিচিত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের প্রয়োগ করে থাকি। প্রতিস্থাপন কৌশল প্রয়োগে, আমরা নিম্নলিখিত আদর্শ সমাকলগুলোর মান পেতে পারি।

(i) $\int \tan x \, dx = \log|\sec x| + C$ (ii) $\int \cot x \, dx = \log|\sin x| + C$

(iii) $\int \sec x \, dx = \log|\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

◆ কয়েকটি বিশেষ অপেক্ষকের সমাকল (Integrals of some special functions)

(i) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

(ii) $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$ (iii) $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$ (v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

◆ **আংশিক সমাকলন (Integration by parts)**

প্রদত্ত অপেক্ষক f_1 এবং f_2-এর জন্য আমরা পাই,

$\int f_1(x) \cdot f_2(x)\, dx = f_1(x) \int f_2(x)\, dx - \int \left[\frac{d}{dx} f_1(x) \cdot \int f_2(x)\, dx\right] dx$, অর্থাৎ দুটি অপেক্ষকের গুণফলের সমাকল = প্রথম অপেক্ষক × দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল – {প্রথম অপেক্ষকের অবকল × দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল}-এর সমাকল। অবশ্য প্রথম অপেক্ষক এবং দ্বিতীয় অপেক্ষকের পছন্দের ক্ষেত্রে যত্নবান হতে হবে। অবশ্যই, আমরা সেটিকেই দ্বিতীয় অপেক্ষক হিসেবে পছন্দ করি যার সমাকল আমাদের ভালো করে জ্ঞাত আছে।

◆ $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x f(x) + C$

◆ **সমাকলের কয়েকটি বিশেষ প্রকার (Some special types of integrals)**

(i) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

(ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

(iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ অথবা $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ সমাকলগুলোর আকারকে নিম্নরূপে আদর্শ সমাকলে রূপান্তরিত করা যায়।

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

(v) $\int \frac{(px + q)\, dx}{ax^2 + bx + c}$ অথবা $\int \frac{(px + q)\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ আকারের সমাকলগুলোকে আদর্শরূপে

নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা হয়

$$px+q = A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B = A\,(2ax+b)+B\,,$$ যেখানে উভয়দিকে সহগের তুলনায় মাধ্যমে A ও B নির্ণয় করা হয়।

- আমরা $\int_a^b f(x)\,dx$ -কে $y = f(x)$ বক্র, $a \le x \le b$, x-অক্ষ এবং $x = a$, $x = b$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হিসেবে সংজ্ঞায়িত করি। ধরো x হল $[a, b]$ অন্তরালে প্রদত্ত একটি বিন্দু। তাহলে $\int_a^x f(x)\,dx$ দ্বারা **ক্ষেত্রফল অপেক্ষক** $A(x)$-কে উপস্থাপন করা হয়। ক্ষেত্রফল অপেক্ষকের এই ধারণা থেকে সমাকলন বিদ্যার মৌলিক উপপাদ্য পাওয়া যায়।

- **সমাকলন বিদ্যার প্রথম মৌলিক উপপাদ্য (First fundamental theorem of integral calculus)**

  ধরো ক্ষেত্রফল অপেক্ষক, $A(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ সকল $x \ge a$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়। যেখানে $[a, b]$-এর উপর f অপেক্ষক সন্তত ধরা হয়। তাহলে $A'(x) = f(x)$, সকল $x \in [a, b]$ এর জন্য।

- **সমাকলন বিদ্যার দ্বিতীয় মৌলিক উপপাদ্য (Second fundamental theorem of integral calculus)**

  ধরো f হল $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালের উপর সংজ্ঞাত x-এর একটি সন্তত অপেক্ষক এবং ধরো F হলো অপর একটি অপেক্ষক এরূপ যে $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, f-এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রে সকল x-এর জন্যে, তাহলে $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)+C\right]_a^b = F(b)-F(a)$ ।

  এটি হল $[a, b]$-এর উপর f-এর নির্দিষ্ট সমাকল, যেখানে a ও b -কে বলা হয় সমাকলের সীমা, a হল নিম্নসীমা এবং b হল ঊর্ধ্বসীমা।

অধ্যায় 8

সমাকলের প্রয়োগ (*Application of Integrals*)

❖ ***One should study Mathematics because it is only through Mathematics that nature can be conceived in harmonious form. – BIRKHOFF*** ❖

8.1 ভূমিকা

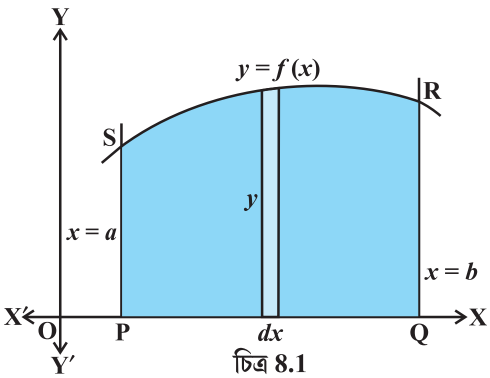
এ.এল. কাউসি
(1789-1857)

জ্যামিতিতে আমরা বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্রাবলী যেমন— ত্রিভুজ, আয়তক্ষেত্র, ট্র্যাপিজিয়াম এবং বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রাবলী শিখেছি। এইসব সূত্রাবলী বাস্তব জীবনের বিভিন্ন সমস্যায় গণিতের প্রয়োগের ক্ষেত্রে মৌলিক, প্রাথমিক জ্যামিতির সূত্রাবলী আমাদেরকে অনেক সাধারণ চিত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে সাহায্য করে। যদিও কোনো বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে এই সূত্রাবলী পর্যাপ্ত নয়। এর জন্য আমাদের সমাকলন বিদ্যার ধারনার প্রয়োজন হয়।

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আমরা যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলন নির্ণয় করার সময় $y = f(x)$ বক্র, $x = a$, $x = b$ কোটিদ্বয় এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার পদ্ধতি অধ্যয়ন করেছি। এই অধ্যায়ে আমরা সরল বক্রের অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল এবং সরলরেখা ও বৃত্তচাপ, অধিবৃত্ত ও উপবৃত্তের (কেবল আদর্শরূপে) অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে সমাকলন বিদ্যার একটি বিশেষ প্রয়োগ সম্পর্কে অধ্যয়ন করব। আমরা উপরোক্ত বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফলও নির্ণয় করবো।

8.2 সরল বক্রের অন্তর্গত ক্ষেত্রফল (Area under Simple Curves)

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আমরা যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলন এবং কলন বিদ্যার মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental Theorem of Calculus) প্রয়োগে নির্দিষ্ট সমাকলন কীভাবে নির্ণয় করা হয় তা অধ্যয়ন করেছি। এখন, $x = a$, $x = b$ কোটিদ্বয়, x-অক্ষ এবং $y = f(x)$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে আমরা সহজ এবং স্বজ্ঞাত (intuitive) পদ্ধতি বিবেচনা করব। চিত্র- 8.1 থেকে আমরা চিন্তা করতে পারি যে বক্র রেখা দ্বারা অঞ্চলের ক্ষেত্রফল



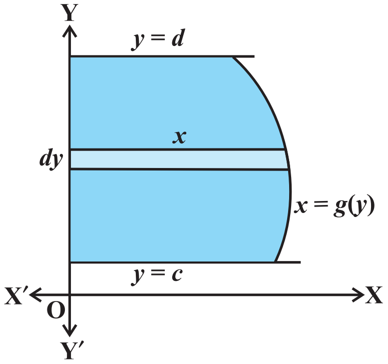
চিত্র 8.1

হল বৃহৎ সংখ্যক খুব সরু উলম্ব টুকরোর সমাহার। উচ্চতা y এবং বেধ dx এর যে কোনো একটি টুকরো বিবেচনা করো, তাহলে dA (প্রাথমিক টুকরোর ক্ষেত্রফল) $= ydx$, যেখানে, $y = f(x)$

এই ক্ষেত্রফলকে বলা হয় *প্রাথমিক ক্ষেত্রফল* (*elementary area*) যা অঞ্চলের ভিতর যে কোনো অবস্থানে অবস্থিত হয় এবং যা a এবং b এর মধ্যবর্তী x-এর কোনো মান দ্বারা নির্দেশিত হয়। x-অক্ষ, $x = a$, $x = b$ কোটিদ্বয় এবং $y = f(x)$ বক্ররেখার মধ্যবর্তী অঞ্চলের মোট ক্ষেত্রফল A কে, PQRSP অঞ্চলের সকল সরু টুকরোর প্রাথমিক ক্ষেত্রফলের যোগফল রূপে আমরা চিন্তা করতে পারি। সাংকেতিকরূপে, আমরা লিখতে পারি—

$$\mathrm{A} = \int_a^b d\mathrm{A} = \int_a^b ydx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$x = g(y)$ বক্ররেখা, y-অক্ষ এবং $y = c$, $y = d$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল A নিম্নরূপে পাওয়া যায়।



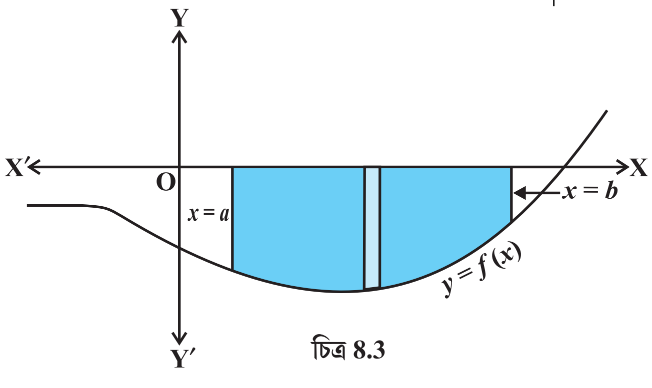
চিত্র 8.2

$$\mathrm{A} = \int_c^d xdy = \int_c^d g(y)\,dy$$

এখানে, আমরা অনুভূমিক টুকরোগুলো বিবেচনা করবো যা চিত্র 8.2 তে দেখানো হয়েছে।

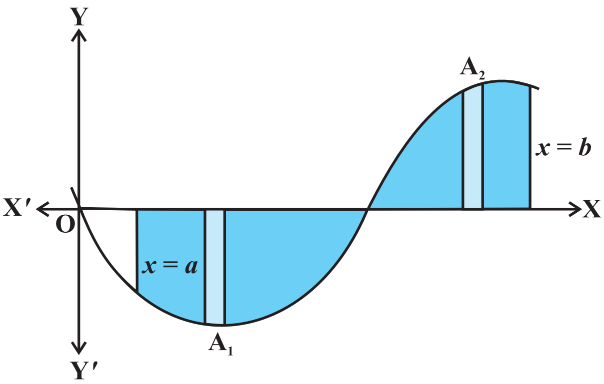
মন্তব্য যদি বিবেচনা করা বক্ররেখার অবস্থান x- অক্ষের নীচে হয়, যেহেতু $x = a$ থেকে $x = b$ পর্যন্ত $f(x) < 0$, যা চিত্র 8.3 তে দেখানো হয়েছে, তাহলে বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = a$, $x = b$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হবে। কিন্তু, এক্ষেত্রে কেবলমাত্র ক্ষেত্রফলের সংখ্যা মানকেই বিবেচনা করা হয়।

অতএব, যদি ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয়, তবে আমরা এটির পরম মান, অর্থাৎ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ কে নিই।



চিত্র 8.3

সাধারণত, এ রকমও হতে পারে যে কোনো বক্রের কিছু অংশ x- অক্ষের উপরে এবং কিছু অংশ x- অক্ষের নীচে যা চিত্র 8.4 এ দেখানো হয়েছে। এখানে $\mathrm{A}_1 < 0$ এবং $\mathrm{A}_2 > 0$। সুতরাং, $y = f(x)$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = a$, $x = b$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ A এর ক্ষেত্রফল, $\mathrm{A} = |\mathrm{A}_1| + \mathrm{A}_2$ দ্বারা পাওয়া যায়।



চিত্র 8.4

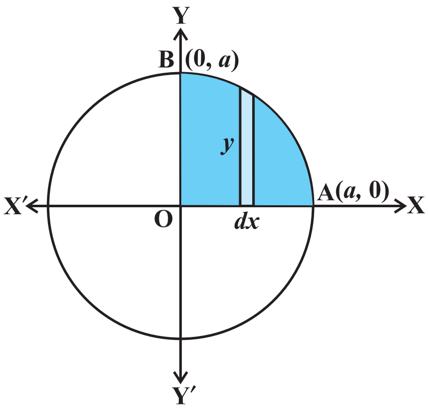
উদাহরণ 1 $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান চিত্র 8.5 হতে, প্রদত্ত বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ সমগ্র অঞ্চলের ক্ষেত্রফল = 4 x (বক্ররেখা, x-অক্ষ, x = 0 এবং $x = a$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ AOBA অঞ্চলের ক্ষেত্রফল) [যেহেতু বৃত্তটি x এবং y উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম]

$$= 4\int_0^a y\,dx \quad \text{(উলম্ব টুকরো নিয়ে)}$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

সুতরাং $x^2 + y^2 = a^2$ থেকে পাই $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$



চিত্র 8.5

যেহেতু AOBA অঞ্চলটি প্রথম পাদে অবস্থিত, তাই y কে ধনাত্মক রূপে নিতে হবে। সমাকলন করে, আমরা পাই প্রদত্ত বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ সমগ্র অঞ্চলের ক্ষেত্রফল

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi a^2 \quad \text{বর্গএকক।}$$

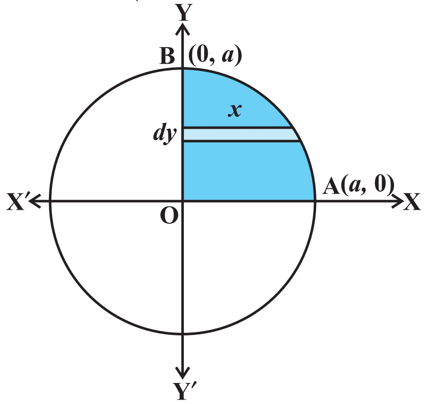
বিকল্পভাবে, চিত্র 8.6 এ দেখানে অনুভূমিক টুকরোগুলো বিবেচনা করে, বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ সমগ্র অঞ্চলের ক্ষেত্রফল

$$= 4\int_0^a x dy = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy \qquad \text{(কেন ?)}$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi a^2 \text{ বর্গএকক।}$$



চিত্র 8.6

উদাহরণ 2 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান চিত্র 8.7 থেকে, উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ABA′B′A অঞ্চলের ক্ষেত্রফল

= 4 (বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$, $x = a$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ প্রথম পাদের AOBA অঞ্চলের ক্ষেত্রফল)

(যেহেতু উপবৃত্তটি x এবং y উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম)

$$= 4\int_0^a y dx \text{ (উলম্ব টুকরোগুলো নিয়ে)}$$

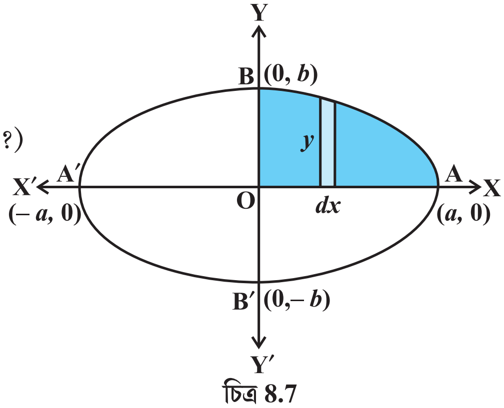
এখন $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ থেকে পাই $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, কিন্তু, যেহেতু AOBA অঞ্চলটি প্রথম পাদে অবস্থিত তাই y কে ধনাত্মক রূপে নিতে হবে। সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল হল—

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a \qquad \text{(কেন ?)}$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= \frac{4b}{a}\times\frac{a^2}{2}\times\frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ বর্গএকক।}$$



চিত্র 8.7

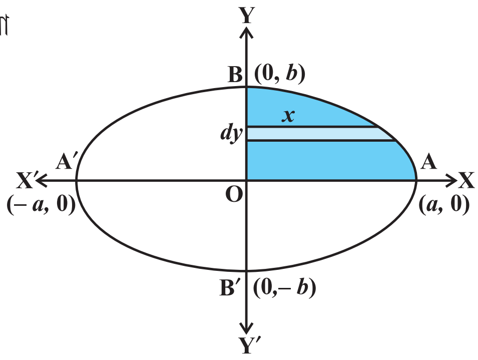
বিকল্পভাবে, চিত্র 8.8 এ দেখানো অনুভূমিক টুকরোগুলো বিবেচনা করে, উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল হল—

$$= 4\int_0^b x dy = 4\frac{a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2 - y^2}\, dy \quad (\text{কেন?})$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{b}\right]_0^b$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\left(\frac{b}{2}\times 0 + \frac{b^2}{2}\sin^{-1} 1\right) - 0\right]$$

$$\frac{4a}{b}\times\frac{b^2}{2}\times\frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ বর্গএকক।}$$



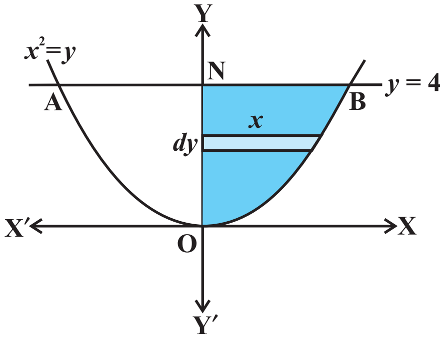
চিত্র 8.8

8.2.1 *একটি বক্ররেখা এবং একটি সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল (The area of the region bounded by a curve and a line)*

এই উপবিভাগে, আমরা একটি সরলরেখা এবং একটি বৃত্ত, একটি সরলরেখা এবং একটি অধিবৃত্ত, একটি সরলরেখা এবং একটি উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করব। উপরে উল্লেখিত বক্ররেখাগুলোর সমীকরণ কেবলমাত্র তাদের আদর্শ রূপেই থাকবে, যেহেতু সমীকরণগুলোর অন্যান্য রূপ পাঠ্য পুস্তকের আলোচনার বহির্ভূত।

উদাহরণ 3 $y = x^2$ বক্ররেখা এবং $y = 4$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান যেহেতু $y = x^2$ সমীকরণ দ্বারা প্রদর্শিত প্রদত্ত বক্ররেখাটি কেবল y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম একটি অধিবৃত্ত, সুতরাং চিত্র 8.9 থেকে নির্ণেয় AOBA অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নিম্নরূপ।



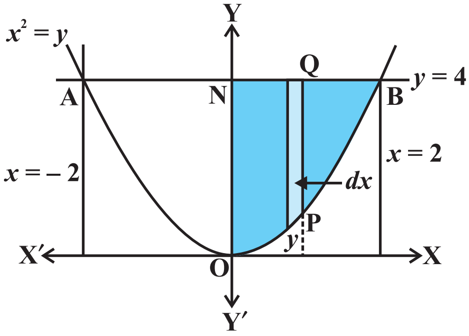
চিত্র 8.9

$2\int_0^4 x dy = 2$ (বক্ররেখা, y-অক্ষ, $y=0$ এবং $y=4$ সরলরেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল BONB এর ক্ষেত্রফল)।

$$= 2\int_0^4 \sqrt{y}\, dy = 2\times\frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{4}{3}\times 8 = \frac{32}{3} \quad \text{বর্গএকক । (কেন?)}$$

এখানে, আমরা অনুভূমিক টুকরোগুলো নিয়েছি যা চিত্র 8.9 এ দেখানো হয়েছে।

বিকল্পভাবে, AOBA অঞ্চলের ক্ষেত্রফল পাওয়ার জন্য চিত্র 8.10 এ প্রদর্শিত PQ এর মতো উলম্ব টুকরোগুলো আমরা বিবেচনা করতে পারি। এর জন্য সমীকরণ $x^2 = y$ এবং $y = 4$ সমাধান করে আমরা পাই $x = -2$ এবং $x = 2$.



চিত্র 8.10

অতএব, AOBA অঞ্চলটি বক্ররেখা $y = x^2$, $y = 4$ এবং $x = -2$ ও $x = 2$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল রূপে চিহ্নিত করা যেতে পারে।

সুতরাং, AOBA অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল

$$= \int_{-2}^{2} y dx$$

[y = (Q বিন্দুর y স্থানাঙ্ক) – (P বিন্দুর y স্থানাঙ্ক) = $4 - x^2$]

$$= 2\int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx \qquad \text{(কেন ?)}$$

$$= 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left[4 \times 2 - \frac{8}{3}\right] = \frac{32}{3} \text{ বর্গএকক।}$$

মন্তব্য উপরের উদাহরণগুলো থেকে, এটি অনুমেয় যে প্রদত্ত অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল গণনা করার জন্য আমরা হয় উলম্ব টুকরো অথবা অনুভূমিক টুকরোগুলো বিবেচনা করতে পারি। এক্ষেত্রে আমরা দুটি টুকরোর মধ্যে যে কোনো একটিকে বিবেচনা করব, তবে উলম্ব টুকরোগুলোকে বেশি প্রাধান্য দেওয়া হয়।

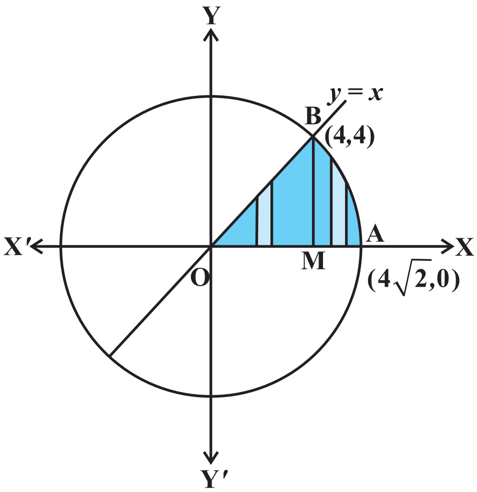
উদাহরণ 4 x-অক্ষ, $y = x$ সরলরেখা এবং $x^2 + y^2 = 32$ বৃত্ত দ্বারা প্রথম পাদে আবদ্ধ অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত সমীকরণগুলো হল

$$y = x \qquad \dots (1)$$

এবং $$x^2 + y^2 = 32 \qquad \dots (2)$$

(1) এবং (2) নং সমাধান করে, আমরা দেখতে পাই যে সরলরেখা এবং বৃত্তটি প্রথম পাদের B(4, 4)তে মিলিত হয় (চিত্র 8.11)। x অক্ষের উপর BM লম্ব অঙ্কন করো।



চিত্র 8.11

সুতরাং, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = OBMO অঞ্চলের ক্ষেত্রফল + BMAB অঞ্চলের ক্ষেত্রফল।

এখন, OBMO অঞ্চলের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^4 y dx = \int_0^4 x dx \qquad \dots (3)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^4 = 8$$

এখন, BMAB অঞ্চলের ক্ষেত্রফল

$$= \int_{4}^{4\sqrt{2}} y dx = \int_{4}^{4\sqrt{2}} \sqrt{32 - x^2}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x\sqrt{32 - x^2} + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{1} \frac{x}{4\sqrt{2}}\right]_4^{4\sqrt{2}}$$

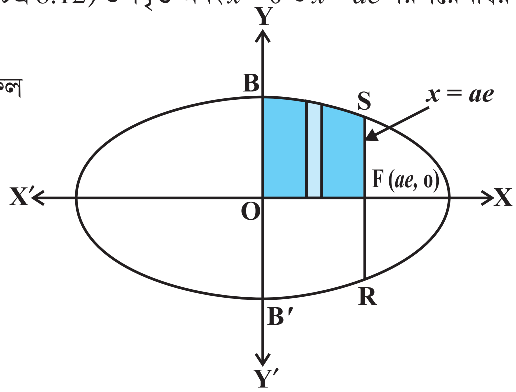
$$= \left(\frac{1}{2} 4\sqrt{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{-1} 1\right) - \left(\frac{4}{2}\sqrt{32 - 16} + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 8\,\pi - (8 + 4\pi) = 4\pi - 8 \qquad \ldots (4)$$

(3) এবং (4) যোগ করে, আমরা পাই, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 4π বর্গএকক।

উদাহরণ 5 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত এবং $x = 0$ ও $x = ae$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো, যেখানে $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ এবং $e < 1$

সমাধান BOB′RFSB অঞ্চলটির প্রাপ্ত ক্ষেত্রফল (চিত্র 8.12) উপবৃত্ত এবং $x = 0$ ও $x = ae$ সরলরেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ।



চিত্র 8.12

লক্ষ করো BOB′RFSB অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল

$$= 2\int_0^{ae} y dx = 2\frac{b}{a}\int_0^{ae} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{1}\frac{x}{a}\right]_0^{ae}$$

$$= \frac{2b}{2a}\left[ae\sqrt{a^2 - a^2e^2} + a^2 \sin^{1} e\right]$$

$$= ab\left[e\sqrt{1 - e^2} + \sin^{1} e\right] \text{বর্গএকক।}$$

অনুশীলনী 8.1

1. $y^2 = x$ বক্ররেখা এবং $x = 1$, $x = 4$ সরলরেখাদ্বয় এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ প্রথম পাদে অবস্থিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

2. $y^2 = 9x$, $x = 2$, $x = 4$ এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ প্রথম পাদে অবস্থিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

3. $x^2 = 4y$, $y = 2$, $y = 4$ এবং y-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ প্রথম পাদে অবস্থিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

4. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

5. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

6. x-অক্ষ, সরলরেখা $x = \sqrt{3}\,y$ এবং $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ প্রথম পাদে অবস্থিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

7. $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ সরলরেখা দ্বারা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত যে দুটি অংশে বিভক্ত হয়, তার ক্ষুদ্রতম অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

8. $x = y^2$ এবং $x = 4$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলকে $x = a$ সরলরেখা দুটি সমান ভাগে বিভক্ত করলে, a-এর মান নির্ণয় করো।

9. $y = x^2$ অধিবৃত্ত এবং $y = |x|$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

10. $x^2 = 4y$ বক্ররেখা এবং $x = 4y - 2$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

11. $y^2 = 4x$ বক্ররেখা এবং $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

নিম্নলিখিত 12 এবং 13নং প্রশ্ন হতে সঠিক উত্তরটি বাছাই করো।

12. $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত এবং $x = 0$ ও $x = 2$ সরলরেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ প্রথম পাদে অবস্থিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল (বর্গএককে) হল—

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

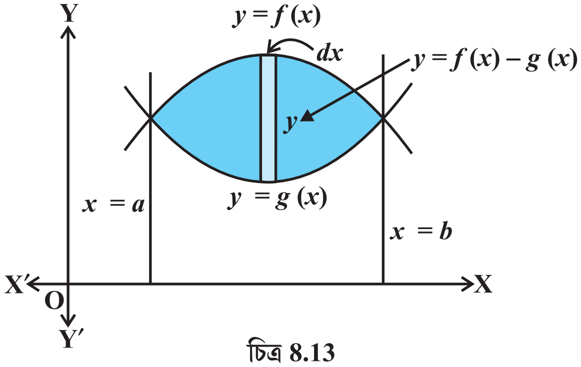
13. $y^2 = 4x$ বক্ররেখা, y-অক্ষ এবং $y = 3$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল (বর্গএকক) হল—

(A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{3}$ (D) $\frac{9}{2}$

8.3 দুটি বক্ররেখার মধ্যবর্তী অঞ্চলের ক্ষেত্রফল (Area between Two Curves)

স্বজ্ঞাতভাবে, লিবনিজের (Leibnitz) প্রকৃত ধারণা অনুযায়ী সমাকলন হল, ক্ষেত্রফল গণনার একটি কার্যকলাপ, যা সম্পন্ন করা হয়, একটি প্রাথমিক ক্ষেত্রকে অনেকগুলো ছোটো ছোটো অঞ্চলে কেটে এবং পরে টুকরোগুলোকে যুক্ত করার মাধ্যমে। মনে করো আমাদেরকে $y = f(x)$, $y = g(x)$ দুটি বক্ররেখার সমীকরণ দেওয়া হল। যেখানে $[a, b]$ বিস্তারে $f(x) \geq g(x)$, যা চিত্র 8.13 এ দেখানো হল। প্রদত্ত বক্ররেখাদ্বয়ের সমীকরণ থেকে y এর একটি সাধরণ মান নিয়ে বক্ররেখা দুটি ছেদবিন্দু $x = a$ এবং $x = b$ আকারে পাওয়া যায়।

সমাকলের একটি সূত্র স্থাপন করার জন্য প্রাথমিক ক্ষেত্রকে উলম্ব টুকরো রূপে নেওয়া সুবিধাজনক। চিত্র 8.13 এ নির্দেশিত প্রাথমিক টুকরোর উচ্চতা হল $f(x) - g(x)$ এবং বেধ dx সুতরাং প্রাথমিক



চিত্র 8.13

ক্ষেত্রফলটি হল—

$$dA = [f(x) - g(x)]\, dx,$$ এবং সমগ্র ক্ষেত্রফল A কে

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$ রূপে নেওয়া যেতে পারে।

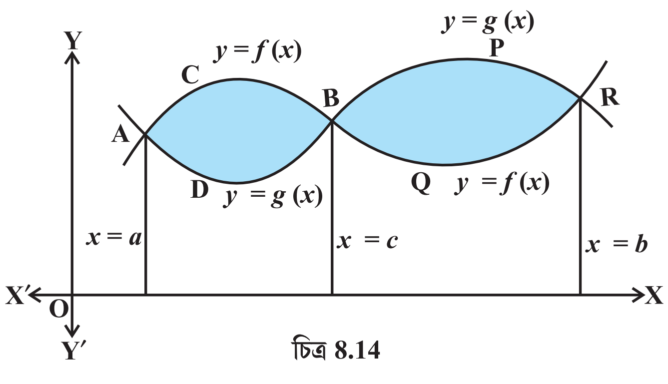
বিকল্পভাবে,

A = [$y = f(x)$, x-অক্ষ এবং $x = a$, $x = b$ সরলরেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল]

– [$y = g(x)$, x-অক্ষ এবং $x = a$, $x = b$ সরলরেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল]

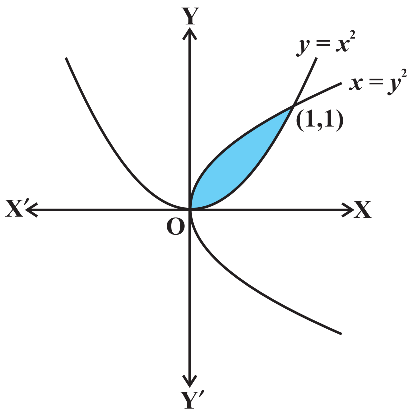
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx,$$ যেখানে $[a, b]$ অন্তরালে $f(x) \geq g(x)$

যদি $[a, c]$ অন্তরালে $f(x) \geq g(x)$ হয় এবং $[c, b]$ অন্তরালে $f(x) \leq g(x)$ হয়, যেখানে $a < c < b$, যা চিত্র 8.14 এ দেখানো হয়েছে, তখন বক্ররেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়। মোট ক্ষেত্রফল = ACBDA অঞ্চলের ক্ষেত্রফল + APRQB অঞ্চলের ক্ষেত্রফল



চিত্র 8.14

$$= \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]dx$$



চিত্র 8.15

উদাহরণ 6 $y = x^2$ এবং $y^2 = x$ অধিবৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান অধিবৃত্ত দুটির ছেদবিন্দুগুলো O (0, 0) এবং A (1, 1) যা চিত্র 8.15 এ দেখানো হয়েছে।

এখানে, আমরা $y^2 = x$ বা $y = \sqrt{x} = f(x)$ এবং $y = x^2 = g(x)$ স্থাপন করতে পারি, যেখানে [0,1] অন্তরালে $f(x) \geq g(x)$

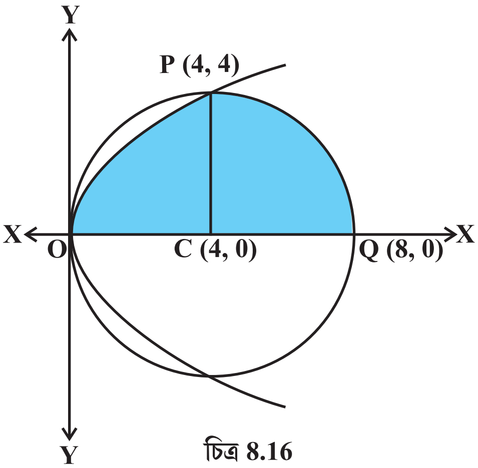
সুতরাং, ছায়াবৃত অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল হল

$$= \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right]dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ বর্গএকক।}$$

উদাহরণ 7 x-অক্ষের উপর এবং $x^2 + y^2 = 8x$ বৃত্ত ও $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের মধ্যবর্তী ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র 8.16

সমাধান বৃত্তটির প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + y^2 = 8x$ -কে $(x - 4)^2 + y^2 = 16$ রূপে প্রকাশ করা যায়। অতএব, বৃত্তের কেন্দ্র হল (4, 0) এবং ব্যাসার্ধ হল 4। $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের সহিত এটির ছেদিতাংশ থেকে পাই—

$$x^2 + 4x = 8x$$

বা, $$x^2 - 4x = 0$$

বা, $$x(x - 4) = 0$$

বা, $$x = 0, x = 4$$

এইভাবে, x-অক্ষের উপর এই দুটি বক্ররেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হল O (0,0) এবং P (4, 4)।

চিত্র 8.16 থেকে x অক্ষের উপর এই দুটি বক্ররেখার মধ্যবর্তী অঞ্চল OPQCO এর নির্ণেয় ক্ষেত্রফল হল

= (OCPO অঞ্চলের ক্ষেত্রফল) + (PCQP অঞ্চলের ক্ষেত্রফল)

$$= \int_0^4 y dx + \int_4^8 y dx$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{x}\, dx + \int_4^8 \sqrt{4^2-(x-4)^2}\, dx \quad (\text{কেন?})$$

$$= 2\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 + \int_0^4 \sqrt{4^2-t^2}\, dt, \text{ যেখানে, } x-4=t \quad (\text{কেন?})$$

$$= \frac{32}{3} + \left[\frac{t}{2}\sqrt{4^2-t^2} + \frac{1}{2}\times 4^2\times \sin^{-1}\frac{t}{4}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} + \left[\frac{4}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 4^2\times \sin^{-1}1\right] = \frac{32}{3} + \left[0+8\times\frac{\pi}{2}\right] = \frac{32}{3}+4\pi = \frac{4}{3}(8+3\pi)$$

উদাহরণ 8 চিত্র 8.17-এ, AOBA হল প্রথম পাদে অবস্থিত $9x^2 + y^2 = 36$ উপবৃত্তের একটি অংশ, যেখানে OA=2 এবং OB=6, AB চাপ এবং AB জ্যা এর মধ্যবর্তী অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

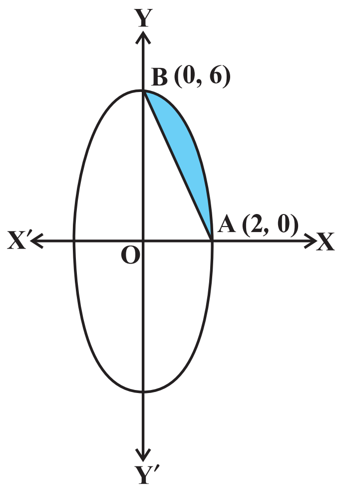
সমাধান উপবৃত্তটির প্রদত্ত সমীকরণ $9x^2 + y^2 = 36$ কে $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$ বা, $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$ আকারে প্রকাশ করা যায় এবং এটির আকার চিত্র 8.17-এ দেওয়া হল।

অতএব, AB জ্যা এর সমীকরণটি হল—

$$y-0=\frac{6-0}{0-2}(x-2)$$

বা, $$y=-3(x-2)$$

বা, $$y=-3x+6$$



চিত্র 8.17

চিত্র 8.17 -এ দেখানো ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল —

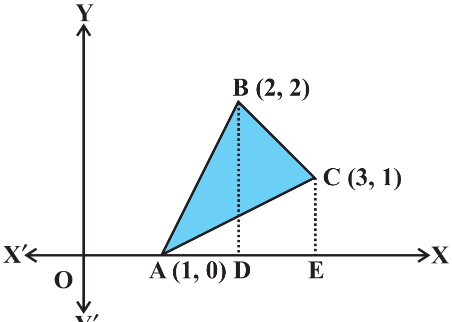
$$= 3\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx - \int_0^2 (6-3x)dx \quad (\text{কেন?})$$

$$= 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[6x-\frac{3x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= 3\left[\frac{2}{2}\times 0 + 2\sin^{-1}(1)\right] - \left[12-\frac{12}{2}\right] = 3\times 2\times\frac{\pi}{2} - 6 = 3\pi - 6$$

উদাহরণ 9 সমাকলনের সাহায্যে (1,0), (2,2) এবং (3,1) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো, A (1,0), B (2,2) এবং C (3,1) হল ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু (চিত্র 8.18 দেখো)



চিত্র 8.18

ΔABC এর ক্ষেত্রফল

= ΔABD এর ক্ষেত্রফল + BDEC ট্র্যাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল – ΔAEC এর ক্ষেত্রফল

এখন AB, BC এবং CA বাহুগুলোর সমীকরণ হল যথাক্রমে—

$$y = 2(x-1),\ y = 4-x,\ y = \frac{1}{2}(x-1).$$

সুতরাং, Δ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \int_1^2 2(x-1)\,dx + \int_2^3 (4-x)\,dx - \int_1^3 \frac{x-1}{2}\,dx$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2 + \left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_2^3 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3$$

$$=2\left[\left(\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]+\left[\left(4\times3-\frac{3^2}{2}\right)-\left(4\times2-\frac{2^2}{2}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^2}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$$

$= \frac{3}{2}$ বর্গএকক।

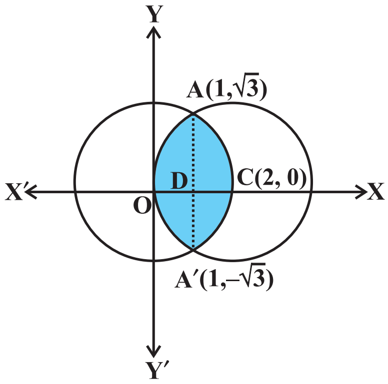
উদাহরণ 10 $x^2 + y^2 = 4$ এবং $(x-2)^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত দুটি দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণগুলো হল—

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \ldots (1)$$

এবং
$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \quad \ldots (2)$$

(1) নং সমীকরণটি একটি বৃত্তের, যার ব্যাসার্ধ 2 এবং কেন্দ্র O মূল বিন্দুতে অবস্থিত। (2) নং সমীকরণটিও একটি বৃত্তের, যার কেন্দ্র C (2,0) এবং ব্যাসার্ধ 2। (1) এবং (2) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই,



চিত্র 8.19

$$(x-2)^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

বা, $x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2$

বা, $x = 1$, যা থেকে পাওয়া যায় $y = \pm\sqrt{3}$

এইভাবে, বৃত্ত দুটির ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল $A(1, \sqrt{3})$ এবং $A'(1, \quad \sqrt{3})$ যা চিত্র 8.19 এ দেখানো হয়েছে।

বৃত্ত দুটির মধ্যবর্তী সীমাবদ্ধ অঞ্চল O ACA′O এর নির্ণেয় ক্ষেত্রফল হল—

= 2 [ODCAO অঞ্চলের ক্ষেত্রফল] (কেন?)

= 2 [ODAO অঞ্চলের ক্ষেত্রফল + DCAD অঞ্চলের ক্ষেত্রফল]

$$= 2\left[\int_0^1 y\,dx + \int_1^2 y\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^1 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx\right] \qquad \text{(কেন?)}$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} + \frac{1}{2}\times 4\sin^{1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1$$

$$+\ 2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}\times 4\sin^{1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} + 4\sin^{1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1 + \left[x\sqrt{4-x^2} + 4\sin^{1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3} + 4\sin^{1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right) - 4\sin^{-1}(-1)\right] + \left[4\sin^{1}1 - \sqrt{3} - 4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3} - 4\times\frac{\pi}{6}\right) + 4\times\frac{\pi}{2}\right] + \left[4\times\frac{\pi}{2} - \sqrt{3} - 4\times\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \left(-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + \left(2\pi - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \quad \text{বর্গএকক।}$$

অনুশীলনী 8.2

1. $4x^2 + 4y^2 = 9$ বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো যা $x^2 = 4y$ অধিবৃত্তের অন্তঃস্থ।
2. $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ এবং $x^2 + y^2 = 1$ বক্ররেখা দুটি দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
3. $y = x^2 + 2$ বক্ররেখা এবং $y = x$, $x = 0$ ও $x = 3$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
4. সমাকলনের সাহায্যে (–1,0), (1,3) এবং (3,2) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

5. সমাকলনের সাহায্যে একটি ত্রিভূজাকার অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো যার বাহুগুলোর সমীকরণ যথাক্রমে $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$ এবং $x = 4$ ।

অনুশীলনীর নিম্নলিখিত 6 এবং 7 নং প্রশ্ন হতে সঠিক উত্তরটি বাছাই করো।

6. $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত এবং $x + y = 2$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হল—

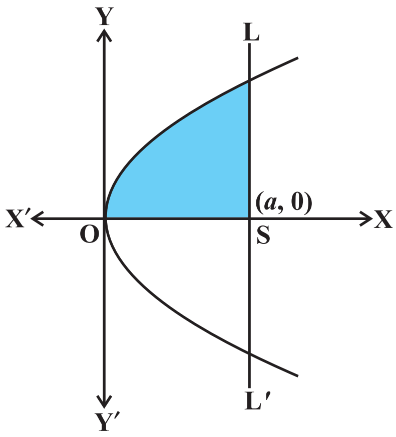
(A) $2(\pi - 2)$ (B) $\pi - 2$ (C) $2\pi - 1$ (D) $2(\pi + 2)$

7. $y^2 = 4x$ বক্ররেখা এবং $y = 2x$ এর মধ্যবর্তী অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হল—

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

বিবিধ উদাহরণমালা

উদাহরণ 11 $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটির নাভিলম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র 8.20

সমাধান চিত্র 8.20 থেকে, $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষ বিন্দুটি মূলবিন্দু (0,0) তে অবস্থিত। নাভিলম্ব LSL এর সমীকরণটি হল $x = a$, আরও, অধিবৃত্তটি x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। OLL′O অঞ্চলের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$= 2$ (OLSO অঞ্চলের ক্ষেত্রফল)

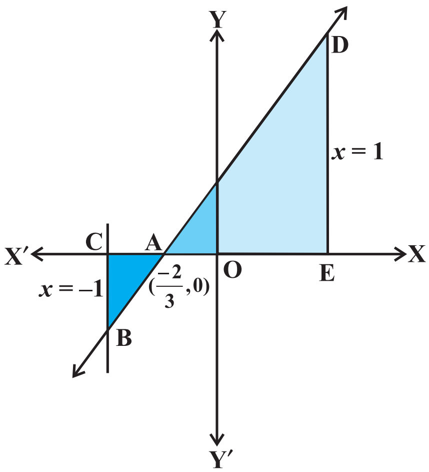
$$= 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$$

$$= 2\times 2\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{x}\,dx$$

$$= 4\sqrt{a}\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{a}\left[a^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3}a^2 \text{ বর্গএকক}$$

উদাহরণ 12 $y = 3x + 2$ সরলরেখা, x-অক্ষ এবং $x = -1$ ও $x = 1$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র 8.21

সমাধান $y = 3x + 2$ সরলরেখাটি $x = \frac{-2}{3}$ তে x অক্ষকে

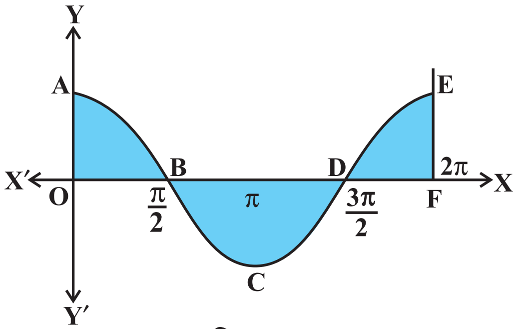
ছেদ করে এবং $x \in \left(-1, \frac{-2}{3}\right)$ এর জন্য সরলরেখাটির লেখ x-অক্ষের নীচে এবং $x \in \left(\frac{-2}{3}, 1\right)$ এর জন্য লেখটি x-অক্ষের উপরে অবস্থান করে, যা চিত্র 8.1 এ দেখানো হয়েছে।

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = ACBA অঞ্চলের ক্ষেত্রফল + ADEA অঞ্চলের ক্ষেত্রফল

$$= \left|\int_{-1}^{\frac{-2}{3}} (3x+2)dx\right| + \int_{\frac{-2}{3}}^{1} (3x+2)dx$$

$$= \left|\left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{\frac{-2}{3}}\right| + \left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{\frac{-2}{3}}^{1} = \frac{1}{6}+\frac{25}{6}=\frac{13}{3} \text{ বর্গএকক।}$$

উদাহরণ 13 $y = \cos x$ বক্ররেখা ও $x = 0$ এবং $x = 2\pi$ এর মধ্যবর্তী সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র 8.22

সমাধান চিত্র 8.22 থেকে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = OABO অঞ্চলের ক্ষেত্রফল + BCDB অঞ্চলের ক্ষেত্রফল + DEFD অঞ্চলের ক্ষেত্রফল।

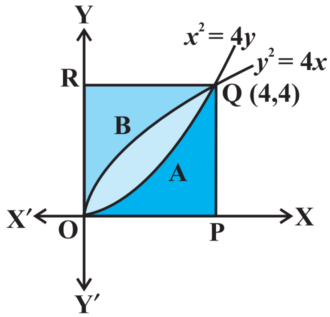
সুতরাং, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx\right| + \int_{\frac{3}{2}}^{2\pi} \cos x\, dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= 1 + 2 + 1 = 4 \text{ বর্গএকক}$$

উদাহরণ 13 প্রমাণকরো $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ এবং $y = 0$ দ্বারা উৎপন্ন বর্গক্ষেত্রকে $y^2 = 4x$ এবং $x^2 = 4y$ বক্ররেখা দুইটি, সমান তিনটি অংশে বিভক্ত করে।



চিত্র 8.23

সমাধান লক্ষ করো $y^2 = 4x$ এবং $x^2 = 4y$ বক্ররেখা দুটির ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল (0, 0) এবং (4, 4), যা চিত্র 8.23 তে দেখানো হয়েছে।

এখন $y^2 = 4x$ এবং $x^2 = 4y$ বক্ররেখা দুটি দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল OAQBO -এর ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left[2 \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \quad \text{বর্গএকক} \qquad \ldots (1)$$

আবার, $x^2 = 4y$ বক্ররেখা, $x = 0$, $x = 4$ এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল OPQAO এর ক্ষেত্রফল

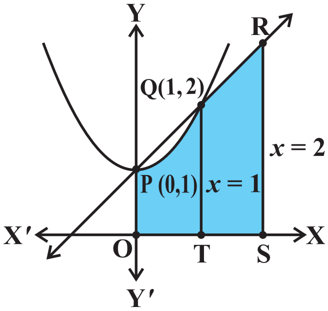
$$= \int_0^4 \frac{x^2}{4}dx = \frac{1}{12}\left[x^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \text{ বর্গএকক} \qquad \ldots (2)$$

অনুরূপে, $y^2 = 4x$ বক্ররেখা, y-অক্ষ, $y = 0$ এবং $y = 4$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল OBQRO এর ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^4 x\,dy = \int_0^4 \frac{y^2}{4}dy = \frac{1}{12}\left[y^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \text{ বর্গএকক} \qquad \ldots (3)$$

(1), (2) এবং (3) নং থেকে এই সিদ্ধান্তে আসা যায় যে, OAQBO অঞ্চলের ক্ষেত্রফল = OPQAO অঞ্চলের ক্ষেত্রফল = OBQRO অঞ্চলের ক্ষেত্রফল, অর্থাৎ $y^2 = 4x$ এবং $x^2 = 4y$ অধিবৃত্ত দুটি দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে সমান তিনটি অংশে বিভক্ত করে।

উদাহরণ 14 $\{(x, y) : 0 \le y \le x^2 + 1, 0 \le y \le x + 1, 0 \le x \le 2\}$ অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র 8.24

সমাধান চলো আমরা প্রথমে যে অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করব তা অঙ্কন করি। এই অঞ্চলটি হল নিম্নলিখিত অঞ্চলগুলোর সাধারণ অঞ্চল।

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \le y \le x^2 + 1\},$$

$$A_2 = \{(x, y) : 0 \le y \le x + 1\}$$

এবং $$A_3 = \{(x, y) : 0 \le x \le 2\}$$

$y = x^2 + 1$ এবং $y = x + 1$ এর ছেদবিন্দুর স্থানাংক হল P(0, 1) এবং Q(1, 2)। চিত্র 8.24 হতে

প্রয়োজনীয় অঞ্চলটি হল OPQRSTO ছায়াবৃত অঞ্চল, যার ক্ষেত্রফল হল

= OTQPO অঞ্চলের ক্ষেত্রফল + TSRQT অঞ্চলের ক্ষেত্রফল।

$$= \int_0^1 (x^2+1)\, dx + \int_1^2 (x+1)\, dx \qquad \text{(কেন?)}$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right]_0^1 + \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3}+1\right)-0\right] + \left[(2+2)-\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] = \frac{23}{6} \text{ বর্গএকক ।}$$

অধ্যায় 8 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. প্রদত্ত বক্ররেখা এবং সরলরেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো :

(i) $y = x^2, x = 1, x = 2$ এবং x-অক্ষ

(ii) $y = x^4, x = 1, x = 5$ এবং x-অক্ষ

2. $y = x$ এবং $y = x^2$ বক্ররেখাগুলোর মধ্যবর্তী অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

3. $y = 4x^2, x = 0, y = 1$ এবং $y = 4$ দ্বারা সীমাবদ্ধ প্রথম পাদে অবস্থিত অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

4. $y = |x+3|$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করো। অতঃপর $\int_{-6}^{0} |x+3|\, dx$ নির্ণয় করো।

5. $y = \sin x$ এবং $x = 0$ ও $x = 2\pi$ এর মধ্যবর্তী সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

6. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্ত এবং $y = mx$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

7. $4y = 3x^2$ অধিবৃত্ত এবং $2y = 3x + 12$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

8. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্ত এবং $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত এবং $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

10. $x^2 = y$ অধিবৃত্ত, $y = x + 2$ সরলরেখা এবং x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

11. সমাকলনের পদ্ধতি প্রয়োগে, $|x|+|y|=1$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

[ইঙ্গিত : $x + y = 1$, $x - y = 1$, $-x + y = 1$ এবং $-x - y = 1$ সরলরেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলই হল নির্ণেয় অঞ্চল]।

12. $\{(x, y) : y \geq x^2$ এবং $y = |x|\}$ বক্ররেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

13. সমাকলনের পদ্ধতি প্রয়োগে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো যার শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক A(2, 0), B (4, 5) এবং C (6, 3) ।

14. সমাকলনের পদ্ধতি প্রয়োগে, $2x + y = 4$, $3x - 2y = 6$ এবং $x - 3y + 5 = 0$ সরলরেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

15. $\{(x, y) : y^2 \leq 4x,\ 4x^2 + 4y^2 \leq 9\}$ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

অনুশীলনীর নিম্নলিখিত 16 থেকে 20 নং প্রশ্ন হতে সঠিক উত্তরটি বাছাই করো।

16. $y = x^3$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = -2$ ও $x = 1$ কোটি দুটি দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হলো—

(A) -9 (B) $\frac{-15}{4}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

17. $y = x|x|$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = -1$ ও $x = 1$ কোটি দুটি দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হলো—

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

[ইঙ্গিত : $y = x^2$ যদি $x > 0$ এবং $y = -x^2$ যদি $x < 0$]।

18. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের যে অংশটি $y^2 = 6x$ অধিবৃত্তের বাহিরে তার ক্ষেত্রফল হল—

(A) $\frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$ (B) $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ (C) $\frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$ (D) $\frac{4}{3}(8\pi + \sqrt{3})$

19. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ হলে, y-অক্ষ, $y = \cos x$ এবং $y = \sin x$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হল

(A) $2(\sqrt{2} - 1)$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2} + 1$ (D) $\sqrt{2}$

সারসংক্ষেপ

- $y = f(x)$ বক্র, x-অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ $(b > a)$ সরলরেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রটি হল : ক্ষেত্রফল $= \int_a^b ydx = \int_a^b f(x)dx$ ।
- $x = \phi(y)$ বক্র, y-অক্ষ এবং $y = c, y = d$ সরলরেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রটি হল : ক্ষেত্রফল $= \int_c^d xdy = \int_c^d \phi(y)dy$.
- $y = f(x), y = g(x)$ বক্ররেখাদ্বয় এবং $x = a, x = b$ সরলরেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রটি হল, ক্ষেত্রফল $= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$, যেখানে $[a, b]$ অন্তরালে $f(x) \geq g(x)$
- যদি $[a, c]$ অন্তরালে $f(x) \geq g(x)$ হয় এবং $[c, b]$ অন্তরালে $f(x) \leq g(x)$ হয়, যেখানে $a < c < b$, তখন ক্ষেত্রফল $= \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]dx$

ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

প্রাচীণকালে গণিতের বিকাশের শুরু থেকেই সমাকলন বিদ্যার সূচনা হয়েছিল এবং এটি নিঃশোষণ পদ্ধতির (method of exhaustion) সাথে সম্পর্কিত, যা প্রাচীন গ্রীক গণিতজ্ঞরা বিকাশ সাধন করেছিল। সামতলিক চিত্রের ক্ষেত্রফল, ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন-এর গণনা সম্পর্কিত সমস্যা সমাধানে এই পদ্ধতিটির উদ্ভব হয়েছিল। এই ধারণার সাহায্যে নিঃশোষণ পদ্ধতিকে সমাকলন পদ্ধতির প্রারম্ভিক রূপে প্রকাশ করা যেতে পারে। প্রাচীনকালে Eudoxus (440 খ্রিঃ পূঃ) এবং Archimedes (300 খ্রিঃ পূঃ) এর কাজের মধ্যেই নিঃশোষণ পদ্ধতির সর্বোচ্চ বিকাশ হয়েছিল।

কলন বিদ্যার তত্ত্বসমূহের ধারাবাহিক বিকাশ সপ্তদশ শতাব্দী থেকে শুরু হয়েছিল। 1665 সালে নিউটন কলনবিদ্যার উপর কাজ শুরু করেন। তার প্রবাহ তত্ত্বের বর্ণনার মাধ্যমে এবং তার এই তত্ত্ব একটি বক্ররেখার ওপর যেকোনো বিন্দুতে স্পর্শক এবং বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয়ে প্রয়োগ করেছিলেন। নিউটন বিপরীত অপেক্ষকের প্রাথমিক ধারণাটি প্রবর্তন করেছিলেন, যা বিপরীত অন্তরকলজ (অনির্দিষ্ট সমাকল) বা স্পর্শকের বিপরীত পদ্ধতি হিসেবে পরিচিত।

1684-86 সালে Leibnitz, *Acta Eruditorum* এ একটি গবেষণা পত্র প্রকাশ করেন, যাকে তিনি *Calculas summatorius* রূপে নামকরণ করেন। যেহেতু এটি অসংখ্য ক্ষুদ্র অঞ্চলের সমষ্টির সাথে যুক্ত ছিল তাই এই সমষ্টিকে তিনি '$\int$' প্রাতীক দ্বারা চিহ্নিত করেছিলেন। 1696

সালে তিনি J. Bernoulli দেওয়া পরামর্শ অনুসরণ করেছিলেন এবং এই বিষয়টিকে Calculus integrali রূপে পরিবর্তন করেন। এটি নিউটনের স্পর্শকের বিপরীত পদ্ধতির সাথে সম্পর্কিত।

নিউটন এবং লিবনিজ (Leibnitz) উভয়েই সম্পূর্ণ স্বাধীন ও স্বতন্ত্র দৃষ্টিভঙ্গির মাধ্যমে অগ্রসর হন। যদিও তত্ত্বগুলোর সম্মিলিত ফলাফলের ব্যবহারিক দিক ছিল এক। লিবনিজ নির্দিষ্ট সমাকলনের ধারণাটি প্রয়োগ করেছিলেন এবং এটি নিশ্চিত যে তিনি-ই সর্বপ্রথম বিপরীত অন্তরকলজ এবং নির্দিষ্ট সমাকলনের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের জন্য প্রসংশিত হয়েছিলেন।

সামগ্রিকভাবে, সমাকলন বিদ্যার মৌলিক ধারণা ও তত্ত্ব এবং প্রাথমিকভাবে অন্তরকলন বিদ্যার সাথে এটির সম্পর্ক সপ্তদশ শতাব্দীর শেষের দিকে পি. দে. ফারমাট (P.de Fermat), আই. নিউটন (I. Newton), জি লিবনিজ (G. Leibnitz)-এর কাজের মাধ্যমে বিকশিত হয়েছিল। যদিও, উনবিংশ শতাব্দীর শুরুতে শুধুমাত্র A.L. Cauchy এর কাজে সীমা সংক্রান্ত ধারণা প্রয়োগে, এটির যথার্থ উন্নতি সাধন হয়েছিল। সর্বশেষে, Lie Sophie's নিম্নলিখিত মূল্যবান উদ্ধৃতিটি উল্লেখ করার মতো :

"It may be said that the conceptions of differential quotient and integral which in their origin certainly go back to Archimedes were introduced in Science by the investigations of Kepler, Descartes, Cavalieri, Fermat and Wallis .... The discovery that differentiation and integration are inverse operations belongs to Newton and Leibnitz".

অধ্যায় **9**

অবকল সমীকরণ (DIFFERENTIAL EQUATIONS)

❖ *He who seeks for methods without having a definite problem in mind seeks for the most part in vain. – D. HILBERT* ❖

9.1 ভূমিকা

একাদশ শ্রেণিতে এবং বর্তমান পুস্তকের অধ্যায় 5-এ আমরা আলোচনা করেছি যে একটি স্বাধীন চলের সাপেক্ষে একটি প্রদত্ত অপেক্ষক f-কে কীভাবে অবকলন করা হয়, অর্থাৎ, প্রদত্ত কোনো অপেক্ষক f-এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রের প্রত্যেক x-এর জন্য $f'(x)$ কীভাবে নির্ণয় করা হয়। এছাড়াও সমাকলন বিদ্যার অধ্যায়ে আমরা চর্চা করেছি যে, কীভাবে একটি অপেক্ষক f নির্ণয় করা যায়, যার অন্তরকলজ হল অপেক্ষক g, যাকে নিম্নরূপেও সূত্রবন্ধ করা যায় :

Henri Poincare
(1854-1912)

প্রদত্ত একটি অপেক্ষক g-এর জন্য একটি অপেক্ষক f যেভাবে নির্ণয় করো যে,

$$\frac{dy}{dx} = g(x), \text{ যেখানে } y = f(x) \qquad \dots (1)$$

(1)নং-এর আকারের মত একটি সমীকরণ ***অবকল সমীকরণ*** *(differential equation)* হিসাবে পরিচিত। বিধিসম্মত সংজ্ঞাটি পরে দেওয়া হবে।

এই সমীকরণগুলোর প্রয়োগ মূখ্যত পদার্থবিদ্যা, রসায়ন, জীববিদ্যা, নৃতত্ত্ববিদ্যা, ভূতত্ত্ববিদ্যা, অর্থনীতি ইত্যাদির বিভিন্ন ক্ষেত্রে হয়ে থাকে। অতএব, সকল আধুনিক বৈজ্ঞানিক অনুসন্ধানের ক্ষেত্রে অবকল সমীকরণের গভীর অধ্যয়ন অত্যন্ত প্রয়োজন।

এই অধ্যায়ে আমরা অবকল সমীকরণ সম্বন্ধীয় কিছু মুখ্য ধারণা, একটি অবকল সমীকরণের সাধারণ (general) ও বিশেষ (particular) সমাধান, অবকল সমীকরণের গঠন, প্রথমক্রম ও প্রথম মাত্রা বিশিষ্ট অবকল সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ের কিছু পদ্ধতি এবং বিভিন্ন ক্ষেত্রে অবকল সমীকরণের কিছু প্রয়োগ নিয়ে অধ্যয়ন করব।

9.2 মুখ্য ধারণা (Basic Concepts)

আমরা পূর্বেই নিম্নলিখিত রূপের সমীকরণসমূহের সাথে পরিচিত :

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \qquad \dots (1)$$

$$\sin x + \cos x = 0 \qquad \dots (2)$$

$$x + y = 7 \qquad \dots (3)$$

চলো আমরা নীচের সমীকরণটি বিচার করি :

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \dots (4)$$

আমরা দেখছি যে, (1), (2) এবং (3) নং সমীকরণসমূহ কেবলমাত্র স্বাধীন এবং/অথবা অধীন চল (চলসমূহ) দ্বারা গঠিত কিন্তু (4) নং সমীকরণটি চলসমূহের পাশাপাশি স্বাধীন চল x-এর সাপেক্ষে অধীন চল y-এর অন্তরকলজ দ্বারা গঠিত। এরূপ সমীকরণকে *অবকল সমীকরণ (differential equation)* বলা হয়।

সাধারণভাবে, স্বাধীন চল (চলসমূহ) এর সাপেক্ষে অধীন চল (চলসমূহ) এর অন্তরকলজ (অন্তরকলজসমূহ) যুক্ত একটি সমীকরণকে অবকল সমীকরণ বলা হয়।

কেবলমাত্র একটি স্বাধীন চলের সাপেক্ষে অধীন চলের অন্তরকলজ যুক্ত একটি অবকল সমীকরণকে সাধারণ অবকল সমীকরণ (ordinary differential equation) বলা হয়, উদাহরণস্বরূপ;

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \text{ হল একটি সাধারণ অবকল সমীকরণ} \qquad \dots. (5)$$

স্বভাবতই, এই রূপ অবকল সমীকরণও হয় যার অন্তর্গত অন্তরকলজসমূহ একের অধিক স্বাধীন চলের সাপেক্ষে গঠিত হয়, এদের আংশিক অবকল সমীকরণ (partial differential equations) বলা হয়। কিন্তু এই স্তরে আমরা আমাদের অধ্যয়ন কেবলমাত্র সাধারণ অবকল সমীকরণেই সীমিত রাখব। এখন থেকে আমরা 'সাঘারণ অবকল সমীকরণ'-এর জন্য 'অবকল সমীকরণ' পদটি ব্যবহার করব।

দ্রষ্টব্য

1. আমরা অন্তরকলজসমূহের জন্য নিম্নলিখিত সংকেতসমূহ ব্যবহার করতে পছন্দ করব :

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

2. উচ্চক্রমের অন্তরকলজের জন্য, অনেক সংখ্যক ডেশ্ (dashes) কে উর্ধ্ব প্রত্যয় (supersuffix) রূপে ব্যবহার করা অসুবিধাজনক হয়, এজন্য n-ক্রমের অন্তরকলজ $\frac{d^ny}{dx^n}$ এর জন্য আমরা y_n সংকেত ব্যবহার করব।

9.2.1. *অবকল সমীকরণের ক্রম (Order of a differential equation)*

কোনো অবকল সমীকরণের ক্রম ওই অবকল সমীকরণে সংযুক্ত স্বাধীন চলের সাপেক্ষে অধীন চলের সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকলজের ক্রম দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়।

নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণগুলো বিবেচনা করো :

$$\frac{dy}{dx} = e^x \qquad \dots (6)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad \dots (7)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0 \qquad \dots (8)$$

(6), (7) এবং (8) নং সমীকরণ যথাক্রমে সর্বোচ্চ প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় ক্রমের অন্তরকলজ সম্মিলিত। সুতরাং, এই সমীকরণগুলোর ক্রম হল যথাক্রমে 1, 2 এবং 3।

9.2.2 *অবকল সমীকরণের মাত্রা (Degree of a differential equation)*

কোনো অবকল সমীকরণের মাত্রা বা ঘাত, অধ্যয়ন করার ক্ষেত্রে মুখ্য বিষয় এই যে ওই সমীকরণটি অবশ্যই অন্তরকলজ y', y'', y''' ইত্যাদির একটি বহুপদ রাশিমালার সমীকরণ হতে হবে। নীচের অবকল সমীকরণগুলো বিবেচনা করো :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \dots (9)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) - \sin^2 y = 0 \qquad \dots (10)$$

$$\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \dots (11)$$

আমরা লক্ষ করছি যে (9) নং সমীকরণটি একটি $y''',\ \ y''$ এবং y' এর একটি বহুপদ রাশিমালার সমীকরণ; সমীকরণ (10) হল y' এর একটি বহুপদ রাশিমালার (যদিও এটি yএর বহুপদ রাশিমালা নয়) সমীকরণ। এরূপ অবকল সমীকরণের মাত্রা সংজ্ঞায়িত করা যায়। কিন্তু (11) নং সমীকরণটি y' এর একটি বহুপদ রাশিমালার সমীকরণ নয় এবং এরূপ অবকল সমীকরণের মাত্রা সংজ্ঞায়িত করা যায় না।

যদি একটি সমীকরণ অন্তরকলজের একটি বহুপদ রাশিমালার অবকল সমীকরণ হয় তবে তার মাত্রা বলতে আমরা বুঝি প্রদত্ত অবকল সমীকরণে অন্তর্ভুক্ত সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকলজের সর্বোচ্চ মাত্রা বা ঘাত (ধনাত্মক অখণ্ড সূচক)।

উপরের সংজ্ঞা অনুযায়ী যে কেউ লক্ষ করতে পারে যে, (6), (7), (8) এবং (9) নং অবকল সমীকরণের প্রত্যেকটির মাত্রা এক, (10) নং সমীকরণের মাত্রা দুই, যদিও (11) নং অবকল সমীকরণের মাত্রা সংজ্ঞাত নয়।

দ্রষ্টব্য একটি অবকল সমীকরণের ক্রম ও মাত্রা (যদি সংজ্ঞাত হয়) সর্বদা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হবে।

উদাহরণ 1 নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণের প্রত্যেকটির ক্রম ও মাত্রা, যদি সংজ্ঞাত হয়, নির্ণয় করো :

(i) $\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$ (ii) $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $y''' + y^2 + e^{y'} = 0$

সমাধান

(i) এই অবকল সমীকরণে বিদ্যমান সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকলজ হল $\frac{dy}{dx}$। এজন্য এটির ক্রম হল 1। এটি y' এর একটি বহুপদ রাশিমালার সমীকরণ এবং $\frac{dy}{dx}$ এর উপর সর্বোচ্চ ঘাতের সূচক 1, সুতরাং এটির মাত্রা 1 (এক)।

(ii) প্রদত্ত অবকল সমীকরণে বিদ্যমান সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকলজ হল $\frac{d^2y}{dx^2}$, সুতরাং, এটির ক্রম হল 2 (দুই)। এটি $\frac{d^2y}{dx^2}$ ও $\frac{dy}{dx}$ এর বহুপদ রাশিমালার একটি সমীকরণ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর উপর সর্বোচ্চ ঘাতের সূচক 1 (এক), সুতরাং, এটির মাত্রা 1 (এক)।

(iii) প্রদত্ত অবকল সমীকরণে বিদ্যমান সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকলজ হল y''', সুতরাং, এটির ক্রম 3 (তিন)। প্রদত্ত অবকল সমীকরণটি তার অন্তরকলজসমূহের জন্য একটি বহুপদ রাশিমালার সমীকরণ নয় এবং এজন্য এটির মাত্রা সংজ্ঞাত নয়।

অনুশীলনী 9.1

1 থেকে 10 পর্যন্ত প্রশ্নের প্রতিটি অবকল সমীকরণের ক্রম এবং মাত্রা (যদি সংজ্ঞাত হয়) নির্ণয় করো :

1. $\frac{d^4y}{dx^4} + \sin(y''') = 0$ **2.** $y' + 5y = 0$ **3.** $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$

4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ **5.** $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos 3x + \sin 3x$

6. $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0$ **7.** $y''' + 2y'' + y' = 0$

8. $y' + y = e^x$ **9.** $y'' + (y')^2 + 2y = 0$ **10.** $y'' + 2y' + \sin y = 0$

11. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ অবকল সমীকরণের মাত্রা হল

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) সংজ্ঞাত নয়।

12. $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ অবকল সমীকরণের ক্রম হল

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) সংজ্ঞাত নয়।

9.3. কোনো অবকল সমীকরণের সাধারণ এবং বিশেষ সমাধান (General and Particular Solutions of a Differential Equation)

পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে আমরা নিম্নের অনুরূপ সমীকরণ সমাধান করেছি :

$$x^2 + 1 = 0 \quad \dots (1)$$

$$\sin^2 x - \cos x = 0 \quad \dots (2)$$

(1) এবং (2) নং সমীকরণের সমাধানসমূহ হল বাস্তব বা জটিল সংখ্যা; যেগুলো প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করবে, অর্থাৎ, যখন ওই সংখ্যাটি প্রদত্ত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশি x এর স্থানে প্রতিস্থাপিত করা হয় তখন বামপক্ষ, ডানপক্ষের সমান হয়।

এখন অবকল সমীকরণ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ বিবেচনা করো। ... (3)

প্রথম দুটি সমীকরণের বিপরীতে এই অবকল সমীকরণের সমাধান হল এমন একটি অপেক্ষক ϕ যা এই সমীকরণকে সিদ্ধ করবে অর্থাৎ, যখন প্রদত্ত অবকল সমীকরণের অজ্ঞাত রাশি y (অধীন চল) এর স্থানে ϕ অপেক্ষকটি প্রতিস্থাপন করা হয় তখন বামপক্ষ, ডানপক্ষের সমান হয়।

$y = \phi(x)$ বক্ররেখাকে প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সমাধান বক্র (সমাকলন বক্র) [solution curve (integral curve)] বলা হয়। নিম্নের অপেক্ষকটি বিবেচনা করো

$$y = \phi(x) = a \sin(x + b), \quad \dots (4)$$

যেখানে $a, b \in \mathbf{R}$। যখন এই অপেক্ষকটি এবং এর অন্তরকলজ সমীকরণ (3)-এ প্রতিস্থাপিত করা হয় তখন বামপক্ষ = ডানপক্ষ হয়। সুতরাং, এটি অবকল সমীকরণ (3)-এর একটি সমাধান।

ধরো, a ও b এর কোনো নির্দিষ্ট মান প্রদত্ত; ধরো, $a = 2$ এবং $b = \frac{\pi}{4}$, তাহলে আমরা একটি অপেক্ষক পাই,

$$y = \phi_1(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \dots (5)$$

যখন এই অপেক্ষকটি এবং এর অন্তরকলজ সমীকরণ (3)-এ প্রতিস্থাপিত করা হয় তখন পুণরায় বামপক্ষ = ডানপক্ষ হয়। অতএব, ϕ_1 ও সমীকরণ (3)-এর একটি সমাধান।

অপেক্ষক ϕ দুটি স্বেচ্ছ ধ্রুবক (প্রাচল) a, b নিয়ে গঠিত এবং এটিকে বলা হয় প্রদত্ত অবকল সমীকরণের ***সাধারণ সমাধান*** (*general solution*)। অপর পক্ষে অপেক্ষক ϕ_1-তে কোনো স্বেচ্ছ ধ্রুবক (*arbitary constan*) যুক্ত থাকে না কিন্তু a ও b প্রাচল দুটির কেবলমাত্র বিশেষ মান থাকে এবং এজন্য এটিকে প্রদত্ত অবকল সমীকরণের ***বিশেষ সমাধান*** (*particular solution*) বলা হয়।

অবকল সমীকরণের যে সমাধানে স্বেচ্ছ ধ্রুবক যুক্ত থাকে তাকে অবকল সমীকরণের *সাধারণ সমাধান* (*মৌলিক*) (*primitive*) বলা হয়।

যে সমাধান স্বেচ্ছ ধ্রুবক মুক্ত হয় অর্থাৎ, যে সমাধান সাধারণ সমাধানের স্বেচ্ছ ধ্রুবকের নির্দিষ্ট মানের জন্য পাওয়া যায় তাকে অবকল সমীকরণের একটি *বিশেষ সমাধান* বলা হয়।

উদাহরণ 2 যাচাই করো যে, $y = e^{-3x}$ অপেক্ষকটি অবকল সমীকরণ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ এর একটি সমাধান।

সমাধান প্রদত্ত অপেক্ষক হল $y = e^{-3x}$। সমীকরণের উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = -3e^{-3x} \qquad \ldots (1)$$

এখন, x-এর সাপেক্ষে (1)-কে অবকলন করে পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{-3x}$$

প্রদত্ত অবকল সমীকরণে $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ এবং y এর মানগুলো প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

বামপক্ষ $= 9e^{-3x} + (-3e^{-3x}) - 6.e^{-3x} = 9e^{-3x} - 9e^{-3x} = 0 =$ ডানপক্ষ।

অতএব, প্রদত্ত অপেক্ষকটি হল প্রদত্ত অবকল সমীকরণের একটি সমাধান।

উদাহরণ 3 যাচাই করো যে, $y = a\cos x + b\sin x$, যেখানে $a, b \in \mathbf{R}$ অপেক্ষকটি $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ অবকল সমীকরণের একটি সমাধান।

সমাধান প্রদত্ত অপেক্ষকটি হল

$$y = a\cos x + b\sin x \qquad \ldots (1)$$

(1) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে ক্রমানুযায়ী অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin x + b\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos x - b\sin x$$

প্রদত্ত অবকল সমীকরণে $\frac{d^2y}{dx^2}$, এবং y-এর মানগুলো বসিয়ে আমরা পাই,

বামপক্ষ = $(-a\cos x - b\sin x) + (a\cos x + b\sin x) = 0$ = ডানপক্ষ

অতএব, প্রদত্ত অপেক্ষকটি হল প্রদত্ত অবকল সমীকরণের একটি সমাধান।

অনুশীলনী 9.2

1 থেকে 10 পর্যন্ত প্রতিটি প্রশ্নে যাচাই করো যে, প্রদত্ত অপেক্ষকসমূহ (প্রত্যক্ষ অথবা অপ্রত্যক্ষ) অনুরূপ অবকল সমীকরণের একটি সমাধান :

1. $y = e^x + 1$: $y'' - y' = 0$

2. $y = x^2 + 2x + C$: $y' - 2x - 2 = 0$

3. $y = \cos x + C$: $y' + \sin x = 0$

4. $y = \sqrt{1+x^2}$: $y' = \frac{xy}{1+x^2}$

5. $y = Ax$: $xy' = y\ (x \neq 0)$

6. $y = x\sin x$: $xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$ ($x \neq 0$ এবং $x > y$ অথবা $x < -y$)

7. $xy = \log y + C$: $y' = \frac{y^2}{1-xy}\ (xy \neq 1)$

8. $y - \cos y = x$: $(y\sin y + \cos y + x)\, y' = y$

9. $x + y = \tan^{-1}y$: $y^2 y' + y^2 + 1 = 0$

10. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in (-a, a)$: $x + y\frac{dy}{dx} = 0\ (y \neq 0)$

11. চতুর্থ ক্রমের একটি অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধানে স্বেচ্ছ ধ্রুবকের সংখ্যা হল :

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. তৃতীয় ক্রমের একটি অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধানে স্বেচ্ছ ধ্রুবকের সংখ্যা হল :

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

9.4. প্রদত্ত সাধারণ সমাধান থেকে একটি অবকল সমীকরণ গঠন (Formation of a Differential Equation whose General Solution is given)

আমরা জানি যে

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0 \qquad \dots (1)$$

সমীকরণটি একটি বৃত্তকে প্রকাশ করে যার কেন্দ্র $(-1, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ 1 একক।

(1) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

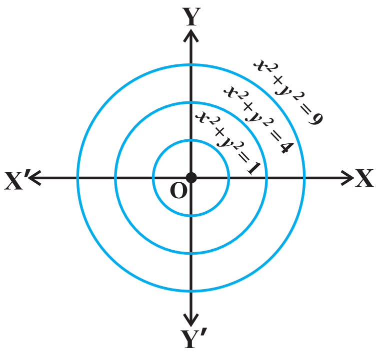
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y} \quad (y \neq 2) \qquad \ldots (2)$$

যা একটি অবকল সমীকরণ। পরবর্তী সময়ে তোমরা দেখবে [অনুচ্ছেদ 9.5.1 এর উদাহরণ 9 দেখো] যে এই সমীকরণটি বৃত্তসমূহের পরিবারকে (family of circles) প্রকাশ করে এবং বৃত্তের (1) নং সমীকরণটি হল এই পরিবারের একটি সদস্য।

চলো নীচের সমীকরণটি বিবেচনা করি

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \ldots (3)$$

r-এর বিভিন্ন মান নিলে আমরা পরিবারের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যদের পাই, উদাহরণস্বরূপ $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ ইত্যাদি (চিত্র 9.1 দেখো)। এইরূপে, (3) নং সমীকরণটি একটি সমকেন্দ্রীক বৃত্তসমূহের পরিবারকে প্রকাশ করে, যাদের কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধ যুক্ত।



চিত্র 9.1

আমরা একটি অবকল সমীকরণ নির্ণয় করতে আগ্রহী যা, পরিবারের প্রত্যেক সদস্য দ্বারা সিদ্ধ হয়। এই অবকল সমীকরণটি অবশ্যই r মুক্ত হবে, কারণ পরিবারের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের জন্য r বিভিন্ন হয়। এই সমীকরণটি (3) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যায়, অর্থাৎ

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \text{ অথবা } x + y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \ldots (4)$$

যা প্রদত্ত (3) নং সমীকরণের সমকেন্দ্রীক বৃত্তসমূহের পরিবারকে প্রকাশ করে। আবার নীচের সমীকরণটি বিবেচনা করো

$$y = mx + c \qquad \ldots (5)$$

প্রাচল m এবং c এর বিভিন্ন মানের জন্য আমরা এই পরিবারের বিভিন্ন সদস্যদের পাই, উদাহরণস্বরূপ,

$y = x$ $\quad (m = 1,\ c = 0)$

$y = \sqrt{3}\,x$ $\quad (m = \sqrt{3},\ c = 0)$

$y = x + 1$ $\quad (m = 1,\ c = 1)$

$y = -x$ $\quad (m = -1,\ c = 0)$

$y = -x - 1$ $\quad (m = -1,\ c = -1)$ ইত্যাদি। (চিত্র 9.2 দেখো)।

এভাবে সমীকরণ (5) সরলরেখা সমূহের পরিবারকে প্রকাশ করে, যেখানে m ও c হল প্রাচল।

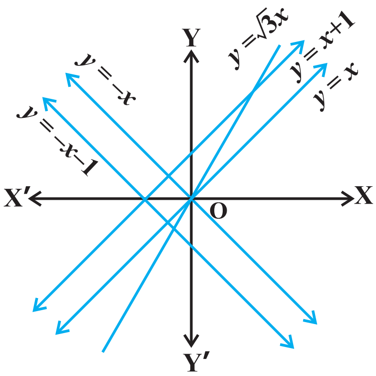
এখন আমরা একটি অবকল সমীকরণ নির্ণয় করতে আগ্রহী যা পরিবারটির প্রতিটি সদস্য দ্বারা সিদ্ধ হয়। অধিকন্তু, এই সমীকরণটি অবশ্যই m ও c মুক্ত হতে হবে, কারণ পরিবারের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ক্ষেত্রে m ও c

বিভিন্ন হয়। (5) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে ক্রমানুযায়ী অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = m \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \dots (6)$$

(6) নং সমীকরণটি, প্রদত্ত (5) নং সমীকরণের সরলরেখা সমূহের পরিবারকে প্রকাশ করে।

লক্ষ করো যে (3) নং ও (5) নং সমীকরণ দুটি হল যথাক্রমে (4) নং ও (6) নং সমীকরণের সাধারণ সমাধান।



চিত্র 9.2

9.4.1 *প্রদত্ত একটি বক্র পরিবারকে প্রকাশ করার অবকল সমীকরণ গঠন পদ্ধতি (Procedure to form a differential equation that will represent a given family of curves)*

(a) যদি প্রদত্ত বক্র পরিবার F_1 কেবলমাত্র একটি প্রাচলের উপর নির্ভর করে তবে এটি নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়

$$F_1(x, y, a) = 0 \qquad \dots (1)$$

উদাহরণস্বরূপ, $y^2 = ax$ অধিবৃত্তসমূহের পরিবারকে প্রকাশ করার সমীকরণের আকার হল $f(x, y, a) : y^2 = ax$

(1) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা y', y, x ও a সম্মিলিত একটি সমীকরণ পাই, অর্থাৎ, $g(x, y, y', a) = 0$ ... (2)

(1) এবং (2) নং সমীকরণ থেকে a অপসারণ করে নির্ণেয় অবকল সমীকরণ পাওয়া যায়

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \dots (3)$$

(b) যদি প্রদত্ত বক্রের পরিবার F_2 প্রচাল a, b (ধরো) এর উপর নির্ভরশীল হয় তবে এটি নিম্নলিখিত আকারের সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়

$$F_2(x, y, a, b) = 0 \qquad \dots (4)$$

(4) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা y', x, y, a, b, সম্মিলিত একটি সমীকরণ পাই, অর্থাৎ,

$$g(x, y, y', a, b) = 0 \qquad \dots (5)$$

কিন্তু দুটি সমীকরণ থেকে দুটি প্রাচল a এবং b কে অপসারণ করা সম্ভব নয় এবং তাই আমাদের প্রয়োজন তৃতীয় সমীকরণের। এই সমীকরণটি পাওয়া যায় (5) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে নিম্নের সম্পর্কের আকারে

$$h(x, y, y', y'', a, b) = 0 \qquad \dots (6)$$

(4), (5) এবং (6) নং সমীকরণ থেকে a ও b অপসারণ করে নিম্নের প্রয়োজনীয় অবকল সমীকরণ পাওয়া যায়
$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad \ldots (7)$$

☛ দ্রষ্টব্য কোনো বক্র পরিবারের প্রতিনিধিত্বকারী অবকল সমীকরণের ক্রম, অনুরূপ বক্র পরিবারের সমীকরণে সংযুক্ত স্বেচ্ছ ধ্রুবকের সংখ্যার সমান হয়।

উদাহরণ 4 $y = mx$ বক্র পরিবারের প্রতিনিধিত্বকারী অবকল সমীকরণ নির্ণয় করো, যেখানে m হল স্বেচ্ছ ধ্রুবক।

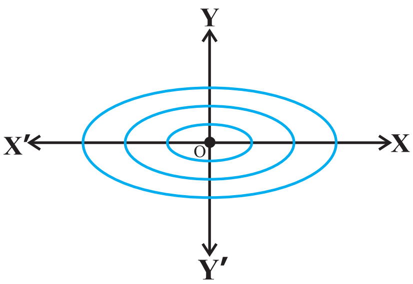
সমাধান : আমরা জানি
$$y = mx \qquad \ldots (1)$$
x এর সাপেক্ষে (1) নং সমীকরণকে অবকলন করে আমরা পাই
$$\frac{dy}{dx} = m$$
m এর মান (1) নং সমীকরণে প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই, $y = \frac{dy}{dx} \cdot x$

বা,
$$x\frac{dy}{dx} - y = 0$$
যা প্রাচল m মুক্ত এবং তাই এটি হল নির্ণেয় অবকল সমীকরণ।

উদাহরণ 5 বক্র পরিবার $y = a \sin(x + b)$, যেখানে a, b স্বেচ্ছ ধ্রুবক, এর প্রতিনিধিত্বকারী অবকল সমীকরণ গঠন করো।

সমাধান আমরা জানি
$$y = a\sin(x + b) \qquad \ldots (1)$$
(1) নং সমীকরণের উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে পর পর অবকলন করে আমরা পাই,
$$\frac{dy}{dx} = a\cos(x + b) \qquad \ldots (2)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\sin(x + b) \qquad \ldots (3)$$
(1), (2) এবং (3) নং সমীকরণ থেকে a ও b অপসারণ করে আমরা পাই
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad \ldots (4)$$
যা স্বেচ্ছ ধ্রুবক a এবং b মুক্ত এবং এজন্য এটি হল নির্ণেয় অবকল সমীকরণ।

উদাহরণ 6 এমন একটি উপবৃত্ত পরিবারের প্রতিনিধিত্বকারী অবকল সমীকরণ গঠন করো যার নাভি x-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং কেন্দ্র মূলবিন্দু।



চিত্র 9.3

সমাধান আমরা জানি যে বিবৃত উপবৃত্ত পরিবারের সমীকরণ (চিত্র 9.3 দেখো) হল

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \dots (1)$$

(1) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই, $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$

বা, $$\frac{y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{-b^2}{a^2} \quad \dots (2)$$

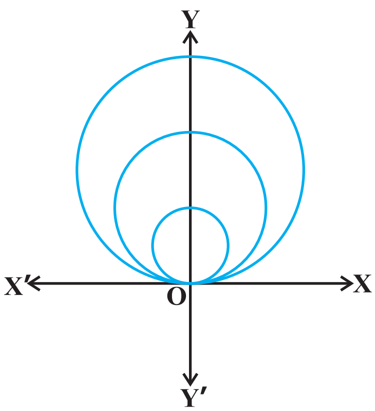
(2) নং সমীকরণের উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই

$$\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\left(\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

বা $$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0 \quad \dots (3)$$

এটি হল নির্ণেয় অবকল সমীকরণ।

উদাহরণ 7 x- অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্ত পরিবারের অবকল সমীকরণ গঠন করো।



চিত্র 9.4

সমাধান ধরো, C হল x- অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্ত পরিবার। ধরো $(0, a)$ হল পরিবারের যে-কোনো সদস্যের কেন্দ্র (চিত্র 9.4 দেখো)। সুতরাং, C পরিবারের সমীকরণ হল

$$x^2+(y-a)^2=a^2 \text{ বা, } x^2+y^2=2ay \quad \dots (1)$$

যেখানে, a হল একটি স্বেচ্ছ ধ্রুবক। (1) নং সমীকরণের উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=2a\frac{dy}{dx}$$

বা, $$x + y\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dx} \text{ বা, } a = \frac{x + y\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{dy}{dx}} \qquad \text{... (2)}$$

(2) নং সমীকরণ থেকে a এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে আমরা পাই

$$x^2 + y^2 = 2y\frac{\left[x + y\dfrac{dy}{dx}\right]}{\dfrac{dy}{dx}}$$

বা, $$\frac{dy}{dx}(x^2 + y^2) = 2xy + 2y^2\frac{dy}{dx}$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 \quad y^2}$$

এটি হল প্রদত্ত বৃত্ত পরিবারের নির্ণেয় অবকল সমীকরণ।

উদাহরণ 8 শীর্ষ মূলবিন্দুতে এবং x- অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর অক্ষ, এরূপ অধিবৃত্ত পরিবারের প্রতিনিধিত্বকারী অবকল সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো, P হল উপরে বর্ণিত অধিবৃত্ত পরিবার (চিত্র 9.5 দেখো) এবং ধরো, $(a, 0)$ হল প্রদত্ত পরিবারের একটি সদস্যের নাভি, যেখানে a হল স্বেচ্ছ ধ্রুবক। সুতরাং P পরিবারের সমীকরণ হল

$$y^2 = 4ax \qquad \text{... (1)}$$

(1) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

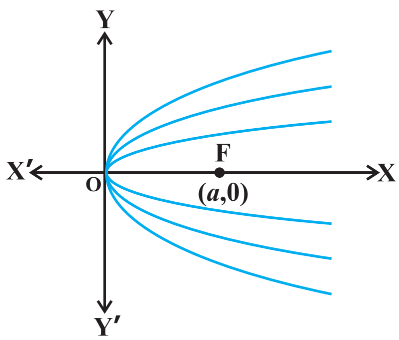
$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \qquad \text{... (2)}$$

(2) নং সমীকরণ থেকে $4a$ এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে আমরা পাই,

$$y^2 = \left(2y\frac{dy}{dx}\right)(x)$$

বা, $$y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

এটি হল প্রদত্ত অধিবৃত্ত পরিবারের অবকল সমীকরণ।



চিত্র 9.5

অনুশীলনী 9.3

1 থেকে 5 নং প্রশ্নের প্রত্যেকটির স্বেচ্ছ ধ্রুবক a ও b কে অপনয়ন করে নিম্নে প্রদত্ত বক্র পরিবারের প্রতিনিধিত্বকারী অবকল সমীকরণ গঠন করো :

1. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ **2.** $y^2 = a\,(b^2 - x^2)$ **3.** $y = a\,e^{3x} + b\,e^{-2x}$

4. $y = e^{2x}\,(a + bx)$ **5.** $y = e^x\,(a \cos x + b \sin x)$

6. y-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্ত পরিবারের অবকল সমীকরণ গঠন করো।

7. এরূপ অধিবৃত্ত পরিবারের অবকল সমীকরণ গঠন করো, যার শীর্ষ মূলবিন্দুতে এবং অক্ষ ধনাত্মক y-অক্ষ বরাবর।

8. এরূপ উপবৃত্ত পরিবারের অবকল সমীকরণ গঠন করো, যার নাভিদ্বয় y-অক্ষের ওপর অবস্থিত এবং কেন্দ্র মূলবিন্দু।

9. এরূপ পরাবৃত্ত পরিবারের অবকল সমীকরণ গঠন করো, যার নাভিদ্বয় x-অক্ষের ওপর অবস্থিত এবং কেন্দ্র মূলবিন্দু।

10. এরূপ বৃত্ত পরিবারের অবকল সমীকরণ গঠন করো, যার ব্যাসার্ধ 3 একক এবং কেন্দ্র y-অক্ষের ওপর অবস্থিত।

11. নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণগুলোর কোনটির সাধারণ সমাধান $y = c_1\,e^x + c_2\,e^{-x}$?

(A) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$ (C) $\frac{d^2y}{dx^2}+1=0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2}-1=0$

12. নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণগুলোর মধ্যে কোনটির একটি বিশেষ সমাধান $y = x$?

(A) $\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}+xy=x$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+xy=x$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}+xy=0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+xy=0$

9.5. প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রার অবকল সমীকরণ সমাধানের পদ্ধতি সমূহ (Methods of Solving First Order, First Degree Differential Equations)

এই অনুচ্ছেদে আমরা প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রার অবকল সমীকরণ সমাধানের তিনটি পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব।

9.5.1 *চলরাশির পৃথকীকরণযোগ্য অবকল সমীকরণ (Differential equations with variables separable)*

একটি প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রার অবকল সমীকরণের আকার হল

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}(x, y) \qquad \ldots (1)$$

যদি F (x, y) -কে g (x) $h(y)$ আকারের গুণফল রূপে প্রকাশ করা যায়, যেখানে $g(x)$ হল x এর একটি অপেক্ষক এবং $h(y)$ হল y এর একটি অপেক্ষক, তাহলে (1) নং অবকল সমীকরণকে বলা হয় চলরাশির পৃথকীকরণযোগ্য আকারের অবকল সমীকরণ। তাহলে (1) নং অবকল সমীকরণের আকার হয়

$$\frac{dy}{dx} = h(y) \cdot g(x) \qquad \ldots (2)$$

যদি $h(y) \neq 0$ হয়, তবে চলরাশি দুটি পৃথক করে (2) নং সমীকরণকে পুনরায় লেখা যায়

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx \qquad \ldots (3)$$

(3) নং এর উভয়পক্ষকে সমাকলন করে আমরা পাই,

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx \qquad \ldots (4)$$

এভাবে (4) নং সমীকরণ, প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সমাধান নিম্নলিখিত আকারে দেয়

$$\mathrm{H}(y) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{C}$$

এখানে, H (y) এবং G (x) হল যথাক্রমে $\frac{1}{h(y)}$ এবং $g(x)$ এর বিপরীত অবকলন এবং C হল স্বেচ্ছ ধ্রুবক।

উদাহরণ 9 অবকল সমীকরণ $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}$, $(y \neq 2)$ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা জানি

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y} \qquad \ldots (1)$$

(1) নং সমীকরণের চলরাশিসমূহ পৃথক করে আমরা পাই

$$(2 - y)\, dy = (x + 1)\, dx \qquad \ldots (2)$$

(2) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে সমাকলন করে আমরা পাই,

$$\int (2-y)\, dy = \int (x+1)\, dx$$

বা, $$2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + \mathrm{C}_1$$

বা, $$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2\,\mathrm{C}_1 = 0$$

বা, $$x^2 + y^2 + 2x - 4y + \mathrm{C} = 0, \text{ যেখানে } \mathrm{C} = 2\mathrm{C}_1$$

এটি হল (1) নং সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ 10 অবকল সমীকরণ $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

সমাধান যেহেতু $1 + y^2 \neq 0$, সুতরাং, চলরাশিগুলো পৃথক করে প্রদত্ত অবকল সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \ldots (1)$$

(1) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে সমাকলন করে আমরা পাই,

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

বা, $$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C$$

যা হল (1) নং সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ 11 অবকল সমীকরণ $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$ এর বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, প্রদত্ত $y = 1$, যখন $x = 0$।

সমাধান যদি $y \neq 0$ হয় তবে প্রদত্ত অবকল সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$\frac{dy}{y^2} = -4x\, dx \qquad \ldots (1)$$

(1) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে সমাকলন করে আমরা পাই

$$\int \frac{dy}{y^2} = -4\int x\, dx$$

বা, $$-\frac{1}{y} = -2x^2 + C$$

বা, $$y = \frac{1}{2x^2 - C} \qquad \ldots (2)$$

(2) নং সমীকরণে $y = 1$ এবং $x = 0$ বসিয়ে আমরা পাই, $C = -1$ ।

এখন C এর মান (2) নং সমীকরণে বসিয়ে আমরা প্রদত্ত অবকল সমীকরণের যে বিশেষ সমাধান পাই তা হল $y = \frac{1}{2x^2 + 1}$ ।

উদাহরণ 12 (1, 1) বিন্দুগামী বক্রের সমীকরণ নির্ণয় করো, যার অবকল সমীকরণ হল $x\, dy = (2x^2 + 1)\, dx$ $(x \neq 0)$।

সমাধান : প্রদত্ত অবকল সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$dy^* = \left(\frac{2x^2+1}{x}\right)dx^*$$

বা, $$dy = \left(2x+\frac{1}{x}\right)dx \qquad \ldots (1)$$

(1) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে সমাকলন করে আমরা পাই

$$\int dy = \int\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx$$

বা, $$y = x^2 + \log|x| + C \qquad \ldots (2)$$

(2) নং সমীকরণ প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সমাধান বক্র পরিবারকে প্রকাশ করে কিন্তু আমরা ওই পরিবারের এমন বিশেষ সদস্যের সমীকরণ নির্ণয় করতে আগ্রহী, যা (1, 1) বিন্দুগামী। সুতরাং, (2) নং সমীকরণে $x = 1, y = 1$ বসিয়ে আমরা পাই, $C = 0$।

এখন, (2) নং সমীকরণে C এর মান বসিয়ে আমরা নির্ণেয় বক্রের যে সমীকরণ পাই, তা হল $y = x^2 + \log|x|$।

উদাহরণ 13 (–2, 3) বিন্দুগামী এরূপ একটি বক্রের সমীকরণ নির্ণয় করো, যার কোনো বিন্দু (x, y)-তে স্পর্শকের নতি হল $\frac{2x}{y^2}$ ।

সমাধান আমরা জানি যে-কোনো বক্রের স্পর্শকের নতি $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা পাওয়া যায়।

সুতরাং, $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \qquad \ldots (1)$$

(1) নং সমীকরণের চলরাশিগুলো পৃথক করে লেখা যায়

$$y^2\, dy = 2x\, dx \qquad \ldots (2)$$

(2) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে সমাকলন করে আমরা পাই,

$$\int y^2 dy = \int 2x\, dx$$

বা, $$\frac{y^3}{3} = x^2 + C \qquad \ldots (3)$$

---

* লিব্‌নিজ (Leibnitz) এর দেওয়া সংকেত $\frac{dy}{dx}$ অত্যন্ত নমনীয় এবং অনেক গণনা ও বিধিসম্মত রূপান্তরের এটি উপযোগী, যেখানে আমরা dx ও dy প্রতীকগুলো নিয়ে সঠিকভাবে কাজ করতে পারি যদি এরা সাধারণ সংখ্যার মতো হয়। dx ও dy কে পৃথক পৃথক সত্তা ধরে আমরা অনেক গণনার সুস্পষ্ট ব্যাখ্যা করতে পারি।

সূত্র : Introduction to Calculus and Analysis, volume-I page 172, By Richard Courant, Fritz John Spinger – Verlog New York.

(3) নং সমীকরণে $x = -2, y = 3$ বসিয়ে আমরা পাই, $C = 5$।

C এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে আমরা নির্ণেয় বক্রের সমীকরণ পাই,

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + 5 \quad \text{বা,} \quad y = (3x^2 + 15)^{\frac{1}{3}}$$

উদাহরণ 14 কোনো একটি ব্যাঙ্কে, মূলধন বার্ষিক 5% হারে ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পায়। কত বছরে 1000 টাকা তার দ্বিগুণ হবে?

সমাধান ধরো, কোনো সময় t-তে মূলধন P। প্রদত্ত সমস্যা অনুযায়ী,

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{5}{100}\right) \times \text{P}$$

বা,
$$\frac{dp}{dt} = \frac{\text{P}}{20} \qquad \dots (1)$$

(1) নং সমীকরণের চলরাশি পৃথক করে আমরা পাই,

$$\frac{dp}{\text{P}} = \frac{dt}{20} \qquad \dots (2)$$

(2) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে সমাকলন করে আমরা পাই,

$$\log \text{P} = \frac{t}{20} + \text{C}_1$$

বা,
$$\text{P} = e^{\frac{t}{20}} \cdot e^{\text{C}_1}$$

বা,
$$\text{P} = \text{C}\, e^{\frac{t}{20}} \quad (\text{যেখানে } e^{\text{C}_1} = \text{C}) \qquad \dots (3)$$

এখন
$$\text{P} = 1000, \quad \text{যখন } t = 0$$

P ও t এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে আমরা পাই, C = 1000। সুতরাং, (3) নং থেকে পাই,

$$\text{P} = 1000\, e^{\frac{t}{20}}$$

ধরো, t বছরে মূলধন দ্বিগুণ হয়। তাহলে

$$2000 = 1000\, e^{\frac{t}{20}} \quad \Rightarrow \quad t = 20 \log_e 2$$

অনুশীলনী 9.4

1 থেকে 10 নং প্রশ্নের প্রতিটি অবকল সমীকরণের জন্য সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো :

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{4 - y^2} \quad (-2 < y < 2)$

3. $\dfrac{dy}{dx}+y=1\,(y\neq 1)$

4. $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$

5. $(e^x + e^{-x})\, dy - (e^x - e^{-x})\, dx = 0$

6. $\dfrac{dy}{dx}=(1+x^2)\,(1+y^2)$

7. $y \log y\, dx - x\, dy = 0$

8. $x^5\dfrac{dy}{dx}=-\,y^5$

9. $\dfrac{dy}{dx}=\sin^{-1} x$

10. $e^x \tan y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$

11 থেকে 14 নং প্রশ্নের প্রতিটি অবকল সমীকরণের জন্য বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, যা প্রদত্ত শর্তসিদ্ধ করে :

11. $(x^3+x^2+x+1)\dfrac{dy}{dx}=2x^2+x$; $y = 1$ যখন $x = 0$

12. $x\,(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}=1$; $y = 0$ যখন $x = 2$

13. $\cos\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=a$ $(a \in \mathbf{R})$; $y = 1$ যখন $x = 0$

14. $\dfrac{dy}{dx}=y\tan x$; $y = 1$ যখন $x = 0$

15. (0, 0) বিন্দুগামী একটি বক্রের সমীকরণ নির্ণয় করো, যার অবকল সমীকরণ $y' = e^x \sin x$।

16. অবকল সমীকরণ $xy\dfrac{dy}{dx}=(x+2)\,(y+2)$ এর জন্য (1, –1) বিন্দুগামী সমাধান বক্রটি নির্ণয় করো।

17. (0, –2) বিন্দুগামী এমন একটি বক্রের সমীকরণ নির্ণয় করো যার কোনো বিন্দু (x, y)-তে স্পর্শকের নতি ও ওই বিন্দুর y-স্থানাঙ্কের গুণফল ওই বিন্দুর x-স্থানাঙ্কের সমান।

18. একটি বক্রের কোনো বিন্দু (x, y)-তে স্পর্শকের নতি, স্পর্শবিন্দু ও (– 4, –3) বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের নতির দ্বিগুণ। বক্রের সমীকরণটি নির্ণয় করো, যেখানে প্রদত্ত বক্রটি (–2, 1) বিন্দুগামী।

19. বায়ু দ্বারা স্ফীত করা হচ্ছে এরূপ একটি গোলাকৃতি বেলুনের আয়তন একটি নির্দিষ্ট হারে পরিবর্তিত হয়। যদি প্রাথমিক অবস্থায় এটির ব্যাসার্ধ 3 একক এবং 3 সেকেন্ড পরে এটির ব্যাসার্ধ 6 একক হয়, তাহলে t সেকেন্ড পরে বেলুনের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

20. একটি ব্যাঙ্কে মূলধন বার্ষিক r% হারে ক্রমাগত বৃদ্ধি পায়। r এর মান নির্ণয় করো, যদি 100 টাকা 10 বছরে তার দ্বিগুণ হয়। ($\log_e 2 = 0.6931$)।

21. একটি ব্যাঙ্কে মূলধন বার্ষিক 5% হারে ধারাবাহিকভাবে বৃদ্ধি পায়। মূলধন রূপে 1000 টাকা এই ব্যাঙ্কে জমা করা হলে, 10 বছর পর মূলধনটি কত হবে? ($e^{0.5} = 1.648$)

22. কোনো একটি গবেষণায়, ব্যাকটেরিয়ার সংখ্যা 1,00,000 পাওয়া গেলো। 2 ঘন্টায় এই সংখ্যা 10% বৃদ্ধি পায়। কত ঘণ্টায় এই গণনা 2,00,000 -এ পৌঁছবে, যদি ব্যাকটেরিয়ার বৃদ্ধির হার উপস্থিত ব্যাকটেরিয়ার সংখ্যার সাথে সমানুপাতিক হয়?

23. অবকল সমীকরণ $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$ এর সাধারণ সমাধান হল

(A) $e^x + e^{-y} = C$ (B) $e^x + e^y = C$

(C) $e^{-x} + e^y = C$ (D) $e^{-x} + e^{-y} = C$

9.5.2 *সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ (Homogeneous differential equations)*

x ও y এর নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলো বিবেচনা করো

$$F_1(x, y) = y^2 + 2xy, \qquad F_2(x, y) = 2x - 3y,$$

$$F_3(x, y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right), \qquad F_4(x, y) = \sin x + \cos y$$

যদি উপরোক্ত অপেক্ষকগুলোতে x ও y -কে কোনো অশূন্য ধ্রুবক λ এর জন্য যথাক্রমে λx ও λy দ্বারা প্রতিস্থাপন করি তবে আমরা পাই—

$$F_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 (y^2 + 2xy) = \lambda^2 F_1(x, y)$$

$$F_2(\lambda x, \lambda y) = \lambda (2x - 3y) = \lambda F_2(x, y)$$

$$F_3(\lambda x, \lambda y) = \cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^0 F_3(x, y)$$

$F_4(\lambda x, \lambda y) = \sin \lambda x + \cos \lambda y \neq \lambda^n F_4(x, y)$, যে-কোনো $n \in \mathbf{N}$ এর এর জন্য।

এখানে, আমরা লক্ষ করছি যে F_1, F_2, F_3 অপেক্ষকসমূহকে $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ আকারে লেখা যায়। কিন্তু F_4 কে এই আকারে লেখা যায় না। এ থেকে আমরা নিম্নলিখিত সংজ্ঞা পাই :

একটি অপেক্ষক $F(x, y)$ কে ***n* মাত্রা বা ঘাত বিশিষ্ট সমসত্ত্ব অপেক্ষক** (*homogeneous function of degree n*) বলা হয়, যদি কোনো অশূন্য ধ্রবক λ এর জন্য $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ হয়।

উপরের উদাহরণগুলোতে আমরা লক্ষ করছি যে F_1, F_2, F_3 হল যথাক্রমে 2, 1, 0 মাত্রা বিশিষ্ট সমসত্ত্ব অপেক্ষক, কিন্তু F_4 সমসত্ত্ব অপেক্ষক নয়।

আমরা আরও লক্ষ করছি যে,

$$F_1(x, y) = x^2\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}\right)= x^2 h_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

বা, $$F_1(x, y) = y^2\left(1+\frac{2x}{y}\right)= y^2 h_2\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F_2(x, y) = x^1\left(2-\frac{3y}{x}\right)= x^1 h_3\left(\frac{y}{x}\right)$$

বা, $$F_2(x, y) = y^1\left(2\frac{x}{y}-3\right)= y^1 h_4\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F_3(x, y) = x^0 \cos\left(\frac{y}{x}\right)= x^0\, h_5\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$F_4(x, y) \neq x^n\, h_6\left(\frac{y}{x}\right)$$, যে-কোনো $n \in \mathbf{N}$ এর জন্য।

বা, $$F_4(x, y) \neq y^n\, h_7\left(\frac{x}{y}\right)$$, যে-কোনো $n \in \mathbf{N}$ এর জন্য।

সুতরাং, একটি অপেক্ষক $F(x, y)$ একটি n-মাত্রা বিশিষ্ট সমসত্ত্ব অপেক্ষক হবে যদি

$$F(x, y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right) \text{ বা, } y^n h\left(\frac{x}{y}\right)$$ হয়।

$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ আকারের অবকল সমীকরণকে **সমসত্ত্ব** (homogeneous) বলা হয়, যদি $F(x, y)$ একটি শূন্য মাত্রা বিশিষ্ট সমসত্ত্ব অপেক্ষক হয়।

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \ldots (1)$$

আকারের সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণের সমাধান করার জন্য আমরা প্রতিস্থাপন করব $y = v.x$ ... (2)

(2) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অবকলন বা অন্তরকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots (3)$$

(3) নং সমীকরণের $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং সমীকরণে প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

বা, $$x\frac{dv}{dx} = g(v) - v \quad \text{... (4)}$$

(4) নং সমীকরণের চলরাশিসমূহ পৃথক করে আমরা পাই,

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \quad \text{... (5)}$$

(5) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে সমাকলন করে আমরা পাই,

$$\int \frac{dv}{g(v) - v} = \int \frac{1}{x} dx + C \quad \text{... (6)}$$

(6) নং সমীকরণ হল (1) নং অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান (মৌলিক), যখন আমরা v এর স্থলে $\frac{y}{x}$ প্রতিস্থাপন করি।

> **দ্রষ্টব্য** যদি সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণের আকার $\frac{dx}{dy} = F(x, y)$ হয়, যেখানে $F(x, y)$ হল শূন্য মাত্রা বিশিষ্ট সমসত্ত্ব অপেক্ষক, তাহলে আমরা $\frac{x}{y} = v$ অর্থাৎ, $x = vy$ প্রতিস্থাপন করি এবং উপরোক্ত আলোচনা অনুসারে $\frac{dx}{dy} = F(x, y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$ রূপে লিখে সাধারণ সমাধান নির্ণয়ে অগ্রসর হই।

উদাহরণ 15 দেখাও যে, $(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ অবকল সমীকরণটি সমসত্ত্ব এবং এটি সমাধান করো।

সমাধান প্রদত্ত অবকল সমীকরণটিকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{x - y} \quad \text{... (1)}$$

ধরো, $$F(x, y) = \frac{x + 2y}{x - y}$$

এখন, $$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda(x + 2y)}{\lambda(x - y)} = \lambda^0 \cdot f(x, y)$$

সুতরাং, $F(x, y)$ হল একটি শূন্য মাত্রা বিশিষ্ট সমসত্ত্ব অপেক্ষক। এজন্য, প্রদত্ত অবকল সমীকরণটি একটি সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ।

বিকল্পভাবে,

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1+\frac{2y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \ldots (2)$$

(2) নং অবকল সমীকরণের ডানপক্ষের আকার হল $g\left(\frac{y}{x}\right)$ এবং তাই এটি একটি শূন্য মাত্রার অবকল অপেক্ষক। সুতরাং, (1) নং সমীকরণটি একটি সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ। এটি সমাধান করার জন্য আমরা প্রতিস্থাপন করব

$$y = vx \qquad \ldots (3)$$

(3) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots (4)$$

y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে আমরা পাই,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v}$$

বা, $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v} - v$$

বা, $$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+v+1}{1-v}$$

বা, $$\frac{v-1}{v^2+v+1}dv = \frac{-dx}{x} \qquad \ldots (4)$$

(5) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে সমাকলন করে আমরা পাই,

$$\int \frac{v-1}{v^2+v+1}dv = -\int \frac{dx}{x}$$

বা, $$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right|-\frac{3}{2}\int\frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dv=-\log\left|x\right|+C_1$$

বা, $$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right|-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right)=-\log\left|x\right|+C_1$$

বা, $$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right|+\frac{1}{2}\log x^2=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right)+C_1$$ (কেন?)

v এর পরিবর্তে $\frac{y}{x}$ বসিয়ে আমরা পাই,

বা, $$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{2}\log x^2=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+C_1$$

বা, $$\frac{1}{2}\log\left|\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right)x^2\right|=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+C_1$$

বা, $$\log\left|(y^2+xy+x^2)\right|=2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+2C_1$$

বা, $$\log\left|(x^2+xy+y^2)\right|=2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{\sqrt{3}x}\right)+C$$

এটি হল (1) নং অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ 16 দেখাও যে, $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x$ অবকল সমীকরণটি সমসত্ত্ব এবং এটি সমাধান করো।

সমাধান প্রদত্ত অবকল সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \ldots (1)$$

এটি হল একটি $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ আকারের অবকল সমীকরণ।

এখানে, $$F(x, y) = \frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

x এর স্থানে λx এবং y এর স্থানে λy প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda[y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x]}{\lambda\left(x\cos\frac{y}{x}\right)} = \lambda^0[F(x, y)]$$

অতএব $F(x, y)$ হল একটি শূন্য মাত্রার সমসত্ত্ব অপেক্ষক।

সুতরাং, প্রদত্ত অবকল সমীকরণটি হল একটি সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ। এটি সমাধান করার জন্য আমরা প্রতিস্থাপন করব

$$y = vx \qquad \dots (2)$$

(2) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \dots (3)$$

y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং সমীকরণে প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v}$$

বা, $$x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v} - v$$

বা, $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos v}$$

বা, $$\cos v\, dv = \frac{dx}{x}$$

সুতরাং, $$\int\cos v\, dv = \int\frac{1}{x}\, dx$$

বা, $$\sin v = \log|x| + \log|C|$$

বা, $$\sin v = \log|Cx|$$

v এর স্থানে $\frac{y}{x}$ প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|Cx|$$

যা হল (1) নং অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ 17 দেখাও যে, $2y\,e^{\frac{x}{y}}dx + \left(y - 2x\,e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0$ অবকল সমীকরণটি সমসত্ত্ব এবং এটির বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, প্রদত্ত $x = 0$ যখন $y = 1$।

সমাধান প্রদত্ত অবকল সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\,e^{\frac{x}{y}} - y}{2y\,e^{\frac{x}{y}}} \qquad \text{... (1)}$$

ধরো, $$F(x, y) = \frac{2xe^{\frac{x}{y}} - y}{2ye^{\frac{x}{y}}}$$

তাহলে, $$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda\left(2xe^{\frac{x}{y}} - y\right)}{\lambda\left(2ye^{\frac{x}{y}}\right)} = \lambda^0[F(x, y)]$$

অতএব, $F(x, y)$ হল একটি শূন্য মাত্রার সমসত্ত্ব অপেক্ষক। সুতরাং, প্রদত্ত অবকল সমীকরণটি হল একটি সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ।

এটি সমাধান করার জন্য আমরা প্রতিস্থাপন করব

$$x = vy \qquad \text{... (2)}$$

(2) নং সমীকরণকে y -এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

(1) নং সমীকরণে x এবং $\frac{dx}{dy}$ এর মান প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,e^{v} - 1}{2e^{v}}$$

বা, $$y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,e^{v} - 1}{2e^{v}} - v$$

বা, $$y\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{2e^{v}}$$

বা, $$2e^{v}\,dv = \frac{-dy}{y}$$

বা, $$\int 2e^{v}\cdot dv = -\int\frac{dy}{y}$$

বা, $$2\,e^{v} = -\log|y| + C$$

এবং v কে $\frac{x}{y}$ দিয়ে প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$2\,e^{\frac{x}{y}} + \log|y| = C \qquad \ldots (3)$$

(3) নং সমীকরণে $x = 0$ এবং $y = 1$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$2\,e^{0} + \log|1| = C \Rightarrow C = 2$$

C এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে আমরা পাই,

$$2\,e^{\frac{x}{y}} + \log|y| = 2$$

এটি হল প্রদত্ত অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান।

উদাহরণ 18 দেখাও যে, বক্রসমূহের পরিবার, যার ওপর কোনো বিন্দু (x, y)-তে স্পর্শকের নতি $\frac{x^2 + y^2}{2xy}$, তা হল $x^2 - y^2 = cx$ ।

সমাধান আমরা জানি যে, একটি বক্রের উপর কোনো বিন্দুতে স্পর্শকের নতি হল $\frac{dx}{dy}$ ।

সুতরাং, $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}} \qquad \ldots (1)$$

স্পষ্টতই, (1) নং একটি সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ। এটি সমাধান করার জন্য আমরা প্রতিস্থাপন করব

$$y = vx$$

x এর সাপেক্ষে $y = vx$-কে অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

বা, $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v}$$

বা, $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v}$$

$$\frac{2v}{1-v^2}dv = \frac{dx}{x}$$

বা, $$\frac{2v}{v^2-1}dv = -\frac{dx}{x}$$

সুতরাং, $$\int \frac{2v}{v^2-1}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

বা, $$\log|v^2 - 1| = -\log|x| + \log|C_1|$$

বা, $$\log|(v^2 - 1)(x)| = \log|C_1|$$

বা, $$(v^2 - 1)x = \pm C_1$$

v এর পরিবর্তে $\frac{y}{x}$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)x = \pm C_1$$

বা, $(y^2 - x^2) = \pm C_1 x$ বা, $x^2 - y^2 = Cx$

অনুশীলনী 9.5

দেখাও যে, 1 থেকে 10 নংপর্যন্ত প্রতিটি প্রশ্নে প্রদত্ত অবকল সমীকরণটি সমসত্ত্ব এবং এদের প্রতিটি সমাধান করো :

1. $(x^2 + xy)\, dy = (x^2 + y^2)\, dx$

2. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

3. $(x - y)\, dy - (x + y)\, dx = 0$

4. $(x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

5. $x^2 \dfrac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy$

6. $x\, dy - y\, dx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$

7. $\left\{x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\right\} y\, dx = \left\{y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right\} x\, dy$

8. $x\dfrac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$

9. $y\, dx + x\log\left(\dfrac{y}{x}\right)dy - 2x\, dy = 0$

10. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$

11 থেকে 15 নং প্রশ্নে প্রতিটি অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, যা প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে :

11. $(x + y)\, dy + (x - y)\, dx = 0;\ y = 1$ যখন $x = 1$

12. $x^2\, dy + (xy + y^2)\, dx = 0;\ y = 1$ যখন $x = 1$

13. $\left[x\sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right) - y\right]dx + x\, dy = 0;\ y = \dfrac{\pi}{4}$ যখন $x = 1$

14. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} + \operatorname{cosec}\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0;\ y = 0$ যখন $x = 1$

15. $2xy + y^2 - 2x^2\dfrac{dy}{dx} = 0;\ y = 2$ যখন $x = 1$

16. $\dfrac{dx}{dy} = h\left(\dfrac{x}{y}\right)$ আকারের সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করতে প্রতিস্থাপন করতে হয়—

(A) $y = vx$ (B) $v = yx$ (C) $x = vy$ (D) $x = v$

17. নিম্নলিখিতগুলোর কোনটি সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ ?

(A) $(4x + 6y + 5)\, dy - (3y + 2x + 4)\, dx = 0$

(B) $(xy)\, dx - (x^3 + y^3)\, dy = 0$

(C) $(x^3 + 2y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

(D) $y^2\, dx + (x^2 - xy - y^2)\, dy = 0$

9.5.3 রৈখিক অবকল সমীকরণ (Linear differential equations)

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$$

আকার বিশিষ্ট একটি অবকল সমীকরণ যেখানে, P ও Q ধ্রুবক অথবা শুধুমাত্র x -এর অপেক্ষক, তাকে বলা হয় প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ। প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণের কিছু উদাহরণ হল

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{y}{x\log x}\right) = \frac{1}{x}$$

প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণের অপর রূপটি হল

$$\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}_1 x = \mathrm{Q}_1$$

যেখানে, P_1 এবং Q_1 হল ধ্রুবক অথবা কেবলমাত্র y -এর অপেক্ষক। এই আকারের কিছু অবকল সমীকরণের উদাহরণ হল

$$\frac{dx}{dy} + x = \cos y$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{-2x}{y} = y^2 e^{-y}$$

প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q} \qquad \ldots (1)$$

এর সমাধান করার জন্য সমীকরণের উভয়পক্ষকে x এর একটি অপেক্ষক, ধরো $g(x)$ দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়

$$g(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}.(g(x))\, y = \mathrm{Q}\,.\, g(x) \qquad \ldots (2)$$

$g(x)$ কে এরূপে নির্বাচন করো যাতে ডানপক্ষ $y.g(x)$ এর অন্তরকলজ হয়।

অর্থাৎ, $$g(x)\frac{dy}{dx}+\text{P}.g(x)\,y=\frac{d}{dx}[y.g(x)]$$

বা, $$g(x)\frac{dy}{dx}+\text{P}.g(x)\,y=g(x)\frac{dy}{dx}+y\,g'(x)$$

$\Rightarrow$ $$\text{P}.g(x)=g'(x)$$

বা, $$\text{P}=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে সমাকলন করে আমরা পাই,

$$\int \text{P}dx=\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx$$

বা, $$\int \text{P}\cdot dx=\log(g(x))$$

বা, $$\text{g}(x)=e^{\int \text{P}\,dx}$$

(1) নং সমীকরণকে $g(x)=e^{\int \text{P}\,dx}$ দিয়ে গুণ করলে বামপক্ষটি x এবং y এর কোনো অপেক্ষকের অন্তরকলজে পরিণত হয়। এই অপেক্ষক $g(x)=e^{\int \text{P}\,dx}$-কে বলা হয় প্রদত্ত অবকল সমীকরণের **সমাকল গুণক** (I.F.) (*Integrating Factor*)।

(2) নং সমীকরণে $g(x)$ এর মান প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$e^{\int \text{P}\,dx}\frac{dy}{dx}+\text{P}e^{\int \text{P}\,dx}y=\text{Q}\cdot e^{\int \text{P}\,dx}$$

বা, $$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int \text{P}dx}\right)=\text{Q}e^{\int \text{P}dx}$$

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে সমাকলন করে আমরা পাই

$$y\cdot e^{\int \text{P}dx}=\int\left(\text{Q}.e^{\int \text{P}dx}\right)dx$$

বা, $$y=e^{-\int \text{P}\,dx}.\int\left(\text{Q}.e^{\int \text{P}\,dx}\right)dx+\text{C}$$

এটি হল অবকল সমীকরণটির সাধারণ সমাধান।

প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ সমাধানের ধাপসমূহ (Steps involved to solve first order linear differential equation) :

(i) প্রদত্ত অবকল সমীকরণটি $\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}y=\mathrm{Q}$ আকারে লেখো, যেখানে P, Q হল ধ্রুবক অথবা শুধুমাত্র x এর অপেক্ষক।

(ii) সমাকল গুণক (I.F) = $e^{\int \mathrm{P}\,dx}$ নির্ণয় করো।

(iii) প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সমাধানকে নিম্নরূপে লেখো

$$y\ (\mathrm{I.F}) = \int (\mathrm{Q}\times \mathrm{I.F})\,dx + \mathrm{C}$$

যদি প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণটির আকার $\frac{dx}{dy}+\mathrm{P}_1x=\mathrm{Q}_1$ হয়, যেখানে P_1 এবং Q_1 ধ্রুবক অথবা শুধুমাত্র y -এর অপেক্ষক, তাহলে I.F = $e^{\int \mathrm{P}_1\,dy}$ এবং অবকল সমীকরণের সমাধান হল

$$x\ .\ (\mathrm{I.F}) = \int (\mathrm{Q}_1\quad \mathrm{I.F})\,dy + \mathrm{C}$$

উদাহরণ 19 $\frac{dy}{dx}-y=\cos x$ অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত অবকল সমীকরণের আকার হল

$$\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}y=\mathrm{Q}\text{, যেখানে } \mathrm{P}=-1 \text{ এবং } \mathrm{Q}=\cos x$$

সুতরাং, $$\mathrm{I.F} = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$$

সমীকরণের উভয়পক্ষকে I . F দিয়ে গুণ করে আমরা পাই,

$$e^{-x}\frac{dy}{dx}-e^{-x}y = e^{-x}\cos x$$

বা, $$\frac{d}{dx}\left(ye^{-x}\right)=e^{-x}\cos x$$

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে সমাকলন করে আমরা পাই,

$$ye^{-x}=\int e^{-x}\cos x\,dx+\mathrm{C} \qquad \ldots (1)$$

ধরি, $$\mathrm{I}=\int e^{-x}\cos x\,dx$$

$$=\cos x\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right)-\int(-\sin x)\,(-e^{-x})\,dx$$

$$= -\cos x\, e^{-x} - \int \sin x\, e^{-x}\, dx$$

$$= -\cos x\, e^{-x} - \left[\sin x(\ e^{-x}) - \int \cos x\,(-e^{-x})\, dx\right]$$

$$= -\cos x\, e^{-x} + \sin x\, e^{-x} - \int \cos x\, e^{-x}\, dx$$

বা, $\quad \mathrm{I} = -\, e^{-x} \cos x + \sin x\, e^{-x} - \mathrm{I}$

বা, $\quad 2\mathrm{I} = (\sin x - \cos x)\, e^{-x}$

বা, $\quad \mathrm{I} = \dfrac{(\sin x - \cos x)\, e^{-x}}{2}$

(1) নং সমীকরণে I এর মান প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$y e^{-x} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right) e^{-x} + \mathrm{C}$$

বা, $\quad y = \left(\dfrac{\sin x - \cos x}{2}\right) + \mathrm{C} e^{x}$

এটি হল প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ 20 $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 \ (x \neq 0)$ অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত অবকল সমীকরণটি হল

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \qquad \ldots (1)$$

(1) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে x দিয়ে ভাগ করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = x$$

এটি হল একটি $\dfrac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ আকারের রৈখিক অবকল সমীকরণ, যেখানে $\mathrm{P} = \dfrac{2}{x}$ এবং $\mathrm{Q} = x$.

সুতরাং, $\quad \mathrm{I.F} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \log x} = e^{\log x^2} = x^2$ [যেহেতু $e^{\log f(x)} = f(x)$]

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান হল

$$y \,.\, x^2 = \int (x)\,(x^2)\, dx + \mathrm{C} = \int x^3 dx + \mathrm{C}$$

বা, $\quad y = \dfrac{x^2}{4} + \mathrm{C} x^{-2}$

এটি হল প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ 21 $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত অবকল সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y$$

এটি হল একটি $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ আকারের রৈখিক অবকল সমীকরণ, যেখানে $P_1 = -\frac{1}{y}$ এবং $Q_1 = 2y$। সুতরাং, $I.F = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{-\log y} = e^{\log (y)^{-1}} = \frac{1}{y}$

অতএব, প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সমাধান হল

$$x\frac{1}{y} = \int (2y)\left(\frac{1}{y}\right) dy + C$$

বা, $$\frac{x}{y} = \int (2dy) + C$$

বা, $$\frac{x}{y} = 2y + C$$

বা, $$x = 2y^2 + Cy$$

এটি হল প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ 22 অবকল সমীকরণ $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x + x^2 \cot x \ (x \neq 0)$ এর বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো; প্রদত্ত $y = 0$ যখন $x = \frac{\pi}{2}$ ।

সমাধান প্রদত্ত সমীকরণটি একটি $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ আকারের রৈখিক অবকল সমীকরণ যেখানে $P = \cot x$ এবং $Q = 2x + x^2 \cot x$। সুতরাং,

$$I.F = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

অতএব, অবকল সমীকরণের সমাধান হল

$$y \,.\, \sin x = \int (2x + x^2 \cot x) \sin x \, dx + C$$

বা, $$y \sin x = \int 2x \sin x \, dx + \int x^2 \cos x \, dx + C$$

বা, $$y \sin x = \sin x\left(\frac{2x^2}{2}\right) - \int \cos x\left(\frac{2x^2}{2}\right) dx + \int x^2 \cos x \, dx + C$$

বা, $$y \sin x = x^2 \sin x - \int x^2 \cos x \, dx + \int x^2 \cos x \, dx + C$$

বা, $$y \sin x = x^2 \sin x + C \qquad \ldots (1)$$

(1) নং সমীকরণে $y = 0$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$$

বা, $$C = \frac{-\pi^2}{4}$$

(1) নং সমীকরণে C এর মান বসিয়ে পাই

$$y \sin x = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4}$$

বা, $$y = x^2 - \frac{\pi^2}{4 \sin x} \ (\sin x \neq 0)$$

যা হল প্রদত্ত অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান।

উদাহরণ 23 (0, 1) বিন্দুগামী একটি বক্ররেখার সমীকরণ নির্ণয় করো, যদি এই বক্রের কোনো বিন্দু (x, y) -তে স্পর্শকের নতি,ওই বিন্দুর x স্থানাঙ্ক (ভুজ) ও y স্থানাঙ্ক (কোটি) এর গুণফল এবং x স্থানাঙ্কের সমষ্টির সমান হয়।

সমাধান আমরা জানি যে কোনো বক্রের স্পর্শকের নতি হল $\frac{dy}{dx}$।

সুতরাং, $$\frac{dy}{dx} = x + xy$$

বা, $$\frac{dy}{dx} - xy = x \qquad \ldots (1)$$

এটি হল $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ আকারের রৈখিক অবকল সমীকরণ, যেখানে $P = -x$ এবং $Q = x$।

সুতরাং, $$\text{I.F} = e^{\int -x \, dx} = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

অতএব, সমীকরণটির সমাধান হল

$$y \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} = \int (x) \left(e^{\frac{-x^2}{2}} \right) dx + \text{C} \qquad \text{... (2)}$$

ধরো, $$\text{I} = \int (x)\, e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx$$

ধরো, $\dfrac{-x^2}{2} = t$, তাহলে $-\, x\ dx = dt$ বা, $x\ dx = -\, dt$।

সুতরাং, $$\text{I} = -\int e^t\, dt = -e^t = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

(2) নং সমীকরণে I এর মান প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$y\, e^{\frac{-x^2}{2}} = -e^{\frac{-x^2}{2}} + \text{C}$$

বা, $$y = -1 + \text{C}\, e^{\frac{x^2}{2}} \qquad \text{... (3)}$$

এখন, (3) নং বক্র পরিবারের সমীকরণকে প্রকাশ করে। কিন্তু আমরা এই পরিবারের এরূপ সদস্যের সমীকরণ নির্ণয় করতে আগ্রহী যা (0, 1) বিন্দুগামী। (3) নং সমীকরণে $x = 0$ এবং $y = 1$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$1 = -\,1 + \text{C} \,.\, e^0 \quad \text{বা,} \quad \text{C} = 2$$

C এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে আমরা পাই,

$$y = -1 + 2\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

এটি হল নির্ণেয় বক্ররেখার সমীকরণ।

অনুশীলনী 9.6

1 থেকে 12 নং পর্যন্ত প্রতিটি প্রশ্নে প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো :

1. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ **2.** $\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$ **3.** $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^2$

4. $\dfrac{dy}{dx} + (\sec x)\, y = \tan x \left(0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \right)$ **5.** $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x \left(0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \right)$

6. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$ **7.** $x \log x \dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{2}{x} \log x$

8. $(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx\ (x \neq 0)$

9. $x\dfrac{dy}{dx}+y-x+xy\cot x=0 \;\; (x\neq 0)$ **10.** $(x+y)\dfrac{dy}{dx}=1$

11. $y\,dx + (x - y^2)\,dy = 0$ **12.** $(x+3y^2)\dfrac{dy}{dx}=y \;\; (y>0)$

13 থেকে 15 নং পর্যন্ত প্রতিটি প্রশ্নের অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো যা প্রদত্ত শর্তকে সিদ্ধ করে :

13. $\dfrac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x;\; y=0$ যখন $x=\dfrac{\pi}{3}$

14. $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+2xy=\dfrac{1}{1+x^2};\; y=0$ যখন $x=1$

15. $\dfrac{dy}{dx}-3y\cot x=\sin 2x;\; y=2$ যখন $x=\dfrac{\pi}{2}$

16. মূলবিন্দুগামী একটি বক্রের সমীকরণ নির্ণয় করো, যদি এই বক্রের কোনো বিন্দু (x, y) -তে স্পর্শকের নতি, ওই বিন্দুর স্থানাঙ্কের সমষ্টির সমান হয়।

17. $(0, 2)$ বিন্দুগামী বক্রের সমীকরণ নির্ণয় করো, যদি এই বক্রের ওপর কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের সমষ্টি, ওই বিন্দুতে বক্রের স্পর্শকের নতির পরিমাণ থেকে 5 অধিক হয়।

18. অবকল সমীকরণ $x\dfrac{dy}{dx}-y=2x^2$ এর সমাকল গুণক হল

(A) e^{-x} (B) e^{-y} (C) $\dfrac{1}{x}$ (D) x

19. অবকল সমীকরণ $(1-y^2)\dfrac{dx}{dy}+yx=ay\,(-1<y<1)$ এর সমাকল গুণক হল

(A) $\dfrac{1}{y^2-1}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ (C) $\dfrac{1}{1-y^2}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

বিবিধ উদাহরণমালা

উদাহরণ 24 অপেক্ষক $y = c_1 e^{ax}\cos bx + c_2 e^{ax}\sin bx$, যেখানে c_1, c_2 স্বেচ্ছ ধ্রুবক, হল অবকল সমীকরণ $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2a\dfrac{dy}{dx}+\left(a^2+b^2\right)y=0$ এর একটি সমাধান, এর যথার্থতা যাচাই করো।

সমাধান প্রদত্ত অপেক্ষকটি হল

$$y = e^{ax} [c_1 \cos bx + c_2 \sin bx] \quad \ldots (1)$$

(1) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}[\;\; bc_1 \sin bx + bc_2 \cos bx] + [c_1 \cos bx + c_2 \sin bx] e^{ax} \cdot a$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx] \quad \ldots (2)$$

(2) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)(-b\sin bx) + (ac_2 - bc_1)(b\cos bx)]$$

$$+ [(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]\, e^{ax}.a$$

$$= e^{ax}[(a^2 c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2 c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ এবং y এর মানগুলো প্রদত্ত অবকল সমীকরণে প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই

$$\text{বামপক্ষ} = e^{ax}[a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

$$-2ae^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]$$

$$+(a^2 + b^2)e^{ax}[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$$

$$= e^{ax}\begin{bmatrix} \left(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2 - 2a^2c_2 + 2abc_1 + a^2c_2 + b^2c_2\right)\sin bx \\ +(a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1 - 2abc_2 - 2a^2c_1 + a^2c_1 + b^2c_1)\cos bx \end{bmatrix}$$

$$= e^{ax}[0 \times \sin bx + 0\cos bx] = e^{ax} \times 0 = 0 = \text{ডানপক্ষ}$$

অতএব, প্রদত্ত অপেক্ষকটি হল প্রদত্ত অবকল সমীকরণের একটি সমাধান।

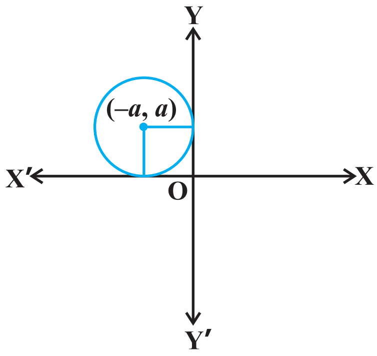
উদাহরণ 25 দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত এবং স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তসমূহের পরিবারের অবকল সমীকরণ গঠন করো।

সমাধান ধরো, C হল দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত এবং স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তসমূহের পরিবার। ধরো, $(-a, a)$ হল বৃত্ত পরিবারের কোনো সদস্যের কেন্দ্র (চিত্র 9.6 দেখো)।

C পরিবারকে প্রতিনিধিত্বকারী সমীকরণ হল

$$(x + a)^2 + (y - a)^2 = a^2 \qquad \dots (1)$$

বা, $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + a^2 = 0 \qquad \dots (2)$



চিত্র 9.6

(2) নং সমীকরণকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2a - 2a\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $$x + y\frac{dy}{dx} = a\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)$$

বা, $$a = \frac{x + y\,y'}{y' - 1}$$

(1) নং সমীকরণে a-এর মান প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$\left[x + \frac{x + y\,y'}{y' - 1}\right]^2 + \left[y - \frac{x + y\,y'}{y' - 1}\right]^2 = \left[\frac{x + y\,y'}{y' - 1}\right]^2$$

বা, $[xy' - x + x + y\,y']^2 + [y\,y' - y - x - y\,y']^2 = [x + y\,y']^2$

বা, $(x + y)^2\,y'^2 + [x + y]^2 = [x + y\,y']^2$

বা, $(x + y)^2\,[(y')^2 + 1] = [x + y\,y']^2$

এটি হল প্রদত্ত বৃত্তসমূহের পরিবারকে প্রকাশ করার অবকল সমীকরণ।

উদাহরণ 26 অবকল সমীকরণ $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$, প্রদত্ত $y = 0$ যখন $x = 0$। এর বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত অবকল সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\frac{dy}{dx} = e^{(3x + 4y)}$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = e^{3x} \,.\, e^{4y} \qquad \dots (1)$$

চলরাশিগুলো পৃথক করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{e^{4y}} = e^{3x}\,dx$$

অতএব, $$\int e^{-4y}\,dy = \int e^{3x}\,dx$$

বা, $$\frac{e^{-4y}}{-4} = \frac{e^{3x}}{3} + C$$

বা, $$4\,e^{3x} + 3\,e^{-4y} + 12\,C = 0 \qquad \dots (2)$$

(2) নং সমীকরণে $x = 0$ এবং $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$$4 + 3 + 12\,C = 0 \text{ বা, } C = \frac{-7}{12}$$

(2) নং সমীকরণে C-এর মান প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$4\,e^{3x} + 3\,e^{-4y} - 7 = 0,$$

এটি হল প্রদত্ত অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান।

উদাহরণ 27 নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণটি সমাধান করো :

$$(x\,dy - y\,dx)\,y\sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y\,dx + x\,dy)\,x\cos\left(\frac{y}{x}\right).$$

সমাধান প্রদত্ত অবকল সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\left[xy\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]dy = \left[xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = \frac{xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{xy\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

ডানপক্ষের লব ও হরকে x^2 দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \dots (1)$$

স্পষ্টতই, (1) নং সমীকরণটি হল $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ আকারের সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ।

এটি সমাধান করার জন্য আমরা প্রতিস্থাপন করব

$$y = vx \qquad \dots (2)$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

বা, $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + v^2 \sin v}{v\sin v - \cos v}$$ ((1) ও (2) ব্যবহার করে)

বা, $$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v\cos v}{v\sin v - \cos v}$$

বা, $$\left(\frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}\right)dv = \frac{2\,dx}{x}$$

সুতরাং, $$\int\left(\frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}\right)dv = 2\int\frac{1}{x}\,dx$$

বা, $$\int \tan v\,dv - \int\frac{1}{v}\,dv = 2\int\frac{1}{x}\,dx$$

বা, $$\log|\sec v| - \log|v| = 2\log|x| + \log|C_1|$$

বা, $$\log\left|\frac{\sec v}{v\,x^2}\right| = \log|C_1|$$

বা, $$\frac{\sec v}{v\,x^2} = \pm C_1 \qquad \ldots (3)$$

(3) নং সমীকরণে v এর স্থানে $\frac{y}{x}$ বসিয়ে পাই,

$$\frac{\sec\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)(x^2)} = C \text{ যেখানে, } C = \pm C_1$$

বা, $$\sec\left(\frac{y}{x}\right) = C\,xy$$

এটি হল প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ 28 নীচের অবকল সমীকরণটি সমাধান করো :

$$(\tan^{-1}y - x)\,dy = (1 + y^2)\,dx.$$

সমাধান প্রদত্ত অবকল সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \qquad \ldots (1)$$

এখন (1) নং সমীকরণটি $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ আকারের একটি রৈখিক অবকল সমীকরণ,

যেখানে, $P_1 = \frac{1}{1+y^2}$ এবং $Q_1 = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$ ।

সুতরাং, $I.F = e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy} = e^{\tan^{-1}y}$

অতএব, প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সমাধান হল

$$x e^{\tan^{-1}y} = \int \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1}y}\, dy + C \qquad \dots (2)$$

ধরো, $$I = \int \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1}y}\, dy$$

$\tan^{-1} y = t$ প্রতিস্থাপন করি। সুতরাং, $\left(\frac{1}{1+y^2}\right)dy = dt$; তাহলে আমরা পাই,

$$I = \int t\, e^t dt = t\, e^t - \int 1 \,.\, e^t\, dt = t\, e^t - e^t = e^t\,(t-1)$$

বা, $$I = e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y - 1)$$

I-এর মান (2) নং সমীকরণে বসিয়ে আমরা পাই,

$$x \,.\, e^{\tan^{-1}y} = e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y - 1) + C$$

বা, $$x = (\tan^{-1}y - 1) + C\, e^{-\tan^{-1}y}$$

যা হল প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

অধ্যায় 9 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. নিম্নে প্রদত্ত প্রতিটি অবকল সমীকরণের ক্রম ও মাত্রা (যদি সংজ্ঞাত হয়) উল্লেখ করো।

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = \log x$ (ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 7y = \sin x$

(iii) $\frac{d^4y}{dx^4} - \sin\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$

2. নিম্নে প্রদত্ত প্রতিটি প্রশ্নের ক্ষেত্রে, প্রদত্ত অপেক্ষকটি (প্রত্যক্ষ বা অপ্রত্যক্ষ) অনুরূপ অবকল সমীকরণের একটি সমাধান কি না যাচাই করো।

(i) $xy = a\,e^x + b\,e^{-x} + x^2$: $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$

(ii) $y = e^x\,(a\cos x + b\sin x)$: $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(iii) $y = x\sin 3x$: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y - 6\cos 3x = 0$

(iv) $x^2 = 2y^2\log y$: $(x^2 + y^2)\dfrac{dy}{dx} - xy = 0$

3. $(x-a)^2 + 2y^2 = a^2$ দ্বারা প্রকাশিত বক্র পরিবারের অবকল সমীকরণ গঠন করো, যেখানে a হল একটি স্বেচ্ছ ধ্রুবক।

4. প্রমাণ করো যে, $x^2 - y^2 = c\,(x^2 + y^2)^2$ হল অবকল সমীকরণ $(x^3 - 3x\,y^2)\,dx = (y^3 - 3x^2y)\,dy$ -এর সাধারণ সমাধান, যেখানে C একটি প্রাচল।

5. প্রথম পাদে অবস্থিত এরূপ বৃত্ত পরিবারের অবকল সমীকরণ গঠন করো, যা স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করে।

6. অবকল সমীকরণ $\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

7. দেখাও যে, অবকল সমীকরণ $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y^2+y+1}{x^2+x+1} = 0$ এর সাধারণ সমাধান $(x + y + 1) = A\,(1 - x - y - 2xy)$, যেখানে A হল প্রাচল।

8. $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ বিন্দুগামী বক্ররেখার সমীকরণ নির্ণয় করো, যার অবকল সমীকরণ $\sin x\cos y\,dx + \cos x\sin y\,dy = 0$।

9. নীচের অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো
$(1 + e^{2x})\,dy + (1 + y^2)\,e^x\,dx = 0$, প্রদত্ত $y = 1$, যখন $x = 0$।

10. নীচের অবকল সমীকরণটি সমাধান করো $y\,e^{\frac{x}{y}}dx = \left(x\,e^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dy\ (y \neq 0)$।

11. $(x - y)\,(dx + dy) = dx - dy$ অবকল সমীকরণের একটি বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, প্রদত্ত $y = 1$, যখন $x = 0$ (ইঙ্গিত : $x - y = t$ বসাও)

12. অবকল সমীকরণ $\left[\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}-\frac{y}{\sqrt{x}}\right]\frac{dx}{dy}=1\,(x\neq 0)$ এর সমাধান নির্ণয় করো।

13. অবকল সমীকরণ $\frac{dy}{dx}+y\cot x=4x\operatorname{cosec} x\ (x\neq 0)$, এর একটি বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, প্রদত্ত $y=0$ যখন $x=\frac{\pi}{2}$।

14. অবকল সমীকরণ $(x+1)\frac{dy}{dx}=2\,e^{-y}-1$, এর একটি বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, প্রদত্ত যে $y=0$ যখন $x=0$।

15. কোনো এক সময় একটি গ্রামের জনসংখ্যা বৃদ্ধির ধারাবাহিক হার ওই গ্রামে বসবাসকারী জনসংখ্যার সাথে সমানুপাতিক। যদি 1999 সালে গ্রামের জনসংখ্যা 20000 এবং 2004 সালে জনসংখ্যা 25000 হয়ে থাকে, তবে 2009 সালে গ্রামের জনসংখ্যা কত হবে?

16. অবকল সমীকরণ $\frac{y\,dx-x\,dy}{y}=0$ এর সাধারণ সমাধান হল

(A) $xy=C$ (B) $x=Cy^2$ (C) $y=Cx$ (D) $y=Cx^2$

17. $\frac{dx}{dy}+P_1x=Q_1$ আকারের অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান হল

(A) $y\,e^{\int P_1\,dy}=\int\left(Q_1e^{\int P_1\,dy}\right)dy+C$

(B) $y\,.\,e^{\int P_1\,dx}=\int\left(Q_1e^{\int P_1\,dx}\right)dx+C$

(C) $x\,e^{\int P_1\,dy}=\int\left(Q_1e^{\int P_1\,dy}\right)dy+C$

(D) $x\,e^{\int P_1\,dx}=\int\left(Q_1e^{\int P_1\,dx}\right)dx+C$

18. অবকল সমীকরণ $e^x\,dy+(y\,e^x+2x)\,dx=0$ এর সাধারণ সমাধান হল

(A) $x\,e^y+x^2=C$ (B) $x\,e^y+y^2=C$

(C) $y\,e^x+x^2=C$ (D) $y\,e^y+x^2=C$

সারসংক্ষেপ

- একটি সমীকরণ যা স্বাধীন চল (চলসমূহ) এর সাপেক্ষে অধীন চলের অন্তরকলজ যুক্ত হয় তাকে বলা হয় একটি অবকল সমীকরণ।
- অবকল সমীকরণের ক্রম হল ওই সমীকরণে অন্তর্গত সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকলজের ক্রম।
- অবকল সমীকরণের মাত্রা বা ঘাত সংজ্ঞাত হয় যদি এটি তার অন্তরকলজ সমূহের বহুপদ রাশিমালার সমীকরণ হয়।
- অবকল সমীকরণের মাত্রা (যখন সংজ্ঞাত) হল ওই সমীকরণে সংযুক্ত সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকলজের মাত্রা বা ঘাত (কেবলমাত্র ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)।
- একটি অপেক্ষক যা প্রদত্ত অবকল সমীকরণকে সিদ্ধ করে তাকে ওই সমীকরণের সমাধান বলা হয়। যে সমাধানে অবকল সমীকরণের ক্রমসংখ্যার সমসংখ্যক স্বেচ্ছ ধ্রুবক যুক্ত থাকে তাকে বলা হয় সাধারণ সমাধান এবং যে সমাধানটি স্বেচ্ছ ধ্রুবক মুক্ত হয় তাকে বলা হয় বিশেষ সমাধান।
- একটি প্রদত্ত অপেক্ষক থেকে একটি অবকল সমীকরণ গঠন করার জন্য আমরা অপেক্ষকটিতে যত সংখ্যক স্বেচ্ছ ধ্রুবক আছে ততবার অপেক্ষকটিকে ধারাবাহিকভাবে অবকলন করব এবং তারপর স্বেচ্ছ ধ্রুবকগুলোকে অপসারিত করব।
- চলের পৃথকীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগ করে এমন একটি সমীকরণ সমাধান করা যায় যার চলরাশি সমূহকে সম্পূর্ণরূপে পৃথক করা সম্ভব। অর্থাৎ, y যুক্ত পদসমূহ dy এর সাথে এবং x যুক্ত পদসমূহ dx এর সাথে সর্বদা থাকবে।
- একটি অবকল সমীকরণ যাকে $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ অথবা $\frac{dx}{dy} = g(x, y)$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে $f(x, y)$ এবং $g(x, y)$ হল শূন্য মাত্রা বিশিষ্ট সমসত্ত্ব অপেক্ষক, তাকে সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ বলা হয়।
- একটি $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = Q$ আকার বিশিষ্ট অবকল সমীকরণ, যেখানে P এবং Q হল ধ্রুবক অথবা কেবলমাত্র x এর অপেক্ষক, তাকে বলা হয় একটি প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ।

ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

বিজ্ঞানের মুখ্য ভাষাসমূহের মধ্যে একটি হল অবকল সমীকরণ। মজার বিষয় হল অবকল সমীকরণের জন্মদিন হিসাবে ধরা হয় নভেম্বর 11,1675 তারিখকে, যখন Gottfried Wilthelm Freiherr Leibnitz (1646 - 1716), সর্বপ্রথম অভেদ $\int y\, dy = \frac{1}{2} y^2$ -কে লিখিত রূপে উপস্থাপন করেন, যাতে তিনি উভয় চিহ্ন $\int$ ও dy এর প্রয়োগ করেন। বস্তুতঃ Leibnitz তখন একটি বক্র নির্ণয়ের

সমস্যায় মগ্ন ছিলেন যার স্পর্শকসমূহ ছিল যথাবিহিত। এটিই তাঁকে 1691 সালে **'চলসমূহের পৃথকীকরণ পদ্ধতি'** আবিষ্কারে সহায়তা করে। এক বছর পর তিনি 'প্রথম ক্রমের সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ সমাধান পদ্ধতি' প্রণয়ন করেন। খুব অল্প সময়ের মধ্যে তিনি আবার আবিষ্কার করে **'প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ সমাধান পদ্ধতি'**। কি আশ্চর্যের বিষয় এটি যে, এই পদ্ধতিসমূহের সবগুলো এসেছে এক ব্যক্তি থেকে এবং অবকল সমীকরণের সৃষ্টির 25 বছরের মধ্যেই।

এখন আমরা যাকে অবকল সমীকরণের 'solution' (সমাধান) বলি, তাকে প্রাচীনকালে অবকল সমীকরণের 'integral' (সম্পূর্ণ) বলে অবিহিত করা হত যার উদ্ভাবন 1690 সালে James Bernoulli (1654 - 1705) করেছিলেন। 'solution' শব্দটি প্রথম ব্যবহার করেছিলেন Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) 1774 সালে, যা হল অবকলন সমীকরণের সৃষ্টির প্রায় একশ বছর পর। Jules Henri Poincare (1854 - 1912)

হলেন সেই ব্যক্তি যিনি, 'solution' শব্দটি ব্যবহারের জন্য জোড়ালো যুক্তি দেন এবং তারপর 'solution' শব্দটি আধুনিক পরিভাষায় তার যোগ্য স্থান পায়। **'চলের পৃথকীকরণ পদ্ধতি'** নামকরণটি হয়েছে John Bernoulli (1667 - 1748) এর জন্যে, যিনি ছিলেন James Bernoulli এর ছোট ভাই।

জ্যামিতিক সমস্যায় এর প্রয়োগও উল্লেখযোগ্য। এখানেও আবার John Bernoulli যিনি অবকল সমীকরণের জটিল গঠনতন্ত্রে প্রথম আলোকপাত করেন। 1715 সালের 20 শে মে তারিখে Leibnitz কে লেখা উনার একটি চিঠিতে তিনি নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণের সমাধান প্রকাশ করেন

$$x^2 y'' = 2y,$$

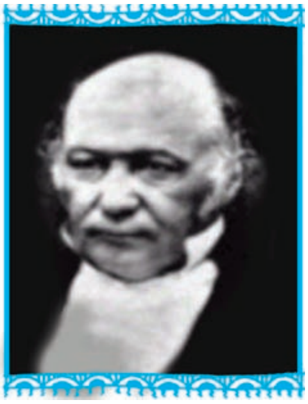
যার সমাধান তিন প্রকার বক্র যথা, অধিবৃত্ত, পরাবৃত্ত এবং ঘন বক্রসমূহের একটি শ্রেণিকে প্রকাশ করে। এটি দেখায় যে, এরূপ সহজ সরল অবকল সমীকরণের সমাধান কত নানা রূপ ধারণ করে। বিংশ শতাব্দীর দ্বিতীয়ার্ধ থেকে অবকল সমীকরণের সমাধানের এই জটিল বৈশিষ্টের অনুসন্ধানের দিকে মনোযোগ দেওয়া হয় যার শীর্ষক ছিল **'অবকল সমীকরণের গুণগত বিশ্লেষণ'**। আজকাল প্রায় প্রতিটি আবিষ্কারে এটির প্রয়োজনীয়তা একটি মুখ্য স্থান অধিকার করেছে।

অধ্যায় **10**

ভেক্টর বীজগণিত (VECTOR ALGEBRA)

❖ ***In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In Mathematics alone each generation builds a new story to the old structure. – HERMAN HANKEL*** ❖

10.1 ভূমিকা



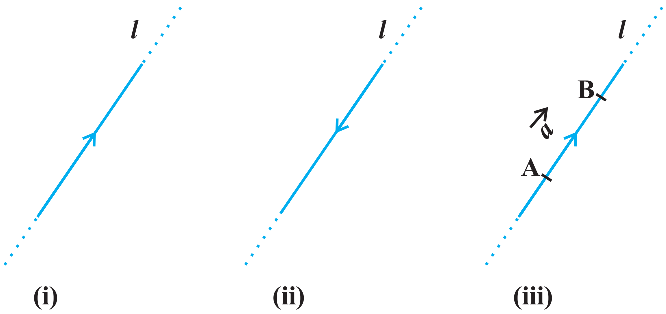
W.R. Hamilton
(1805-1865)

আমাদের প্রাত্যহিক জীবনে, আমরা অনেকগুলো প্রশ্নের সম্মুখীন হই, যেমন—তোমার উচ্চতা কত? কোনো ফুটবল খেলোয়ার কীভাবে তার দলের অন্য খেলোয়াড়কে বল পাস দেওয়ার জন্য বলটি আঘাত করতে পারে? লক্ষ করো যে প্রথম প্রশ্নের একটি সম্ভাব্য উত্তর হতে পারে 1.6 মিটার, এমন একটি রাশি যা কেবলমাত্র একটি বাস্তব সংখ্যাযুক্ত মান। এই জাতীয় রাশিগুলিকে স্কেলার (*scalars*) বলা হয়। যাই হোক, দ্বিতীয় প্রশ্নটির একটি উত্তর হল একটি রাশি (যাকে বল বলা হয়) যা পেশিশক্তি (মান) এবং দিক (যেখানে অন্য খেলোয়ার অবস্থান করে) এর সাথে যুক্ত। এই জাতীয় রাশিগুলিকে ভেক্টর (*vectors*) বলা হয়। গণিত, পদার্থবিদ্যা এবং ইঞ্জিনিয়ারিং ইত্যাদি ক্ষেত্রে, আমরা প্রায়শই উভয় প্রকার রাশি সম্বন্ধে জেনেছি, যথা স্কেলার রাশি যেমন- দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, দূরত্ব, গতি, ক্ষেত্রফল, আয়তন, তাপমাত্রা, কার্য, টাকা, ভোল্টেজ, ঘনত্ব, রোধ ইত্যাদি এবং ভেক্টর রাশি যেমন- সরণ, গতিবেগ, ত্বরণ, বল, ওজন, ভরবেগ, তড়িৎক্ষেত্রের তীব্রতা ইত্যাদি।

এই অধ্যায়ে, আমরা ভেক্টর, ভেক্টরের বিভিন্ন ক্রিয়াপ্রণালী (operations) এবং তাদের বীজগাণিতিক ও জ্যামিতিক ধর্মাবলী সম্পর্কে কিছু প্রাথমিক ধারণা অধ্যয়ন করব। যখন এই দুই ধরনের বৈশিষ্ট্যকে আমরা একসাথে বিবেচনা করি তখন ভেক্টরের ধারণার একট পরিপূর্ণ বোধগম্যতা প্রাপ্ত হয় এবং উপরে উল্লেখিত বিভিন্ন ক্ষেত্রগুলিতে এদের গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগযোগ্যতাকে পরিচালিত করে।

10.2 কিছু প্রাথমিক ধারণা (Some Basic Concepts)

ধরা যাক, '*l*' হল যে-কোনো সমতল বা ত্রিমাত্রিক দেশে একটি সরলরেখা। তীর চিহ্নের দ্বারা এই সরলরেখাটির দুইটি দিক্‌নির্দেশিত করা যায়। এই দুইটি দিকের মধ্যে নির্ধারিত যে-কোনো দিকে একটি সরলরেখাকে দিক্‌নির্দেশিত সরলরেখা বলা হয় (চিত্র 10.1 (i), (ii))।



চিত্র 10.1

এখন লক্ষ করো যে যদি আমরা সরলরেখা l কে AB রেখাংশ পর্যন্ত সীমাবদ্ধ করি, তবে সরলরেখাটির উপর দুইটি দিকের যে কোনো একদিকে একটি মান নির্ধারিত হয়, এইভাবে আমরা একটি দিক্‌নির্দেশিত রেখাংশ পাই (চিত্র 10.1(iii))। অতএব, দিক্‌নির্দেশিত রেখাংশের মান এবং পাশাপাশি দিকও আছে।

সংজ্ঞা 1 একটি রাশি যার মান এবং পাশাপাশি দিকও আছে, তাকে ভেক্টর বলে।

লক্ষ করো যে, একটি দিক্‌নির্দেশিত রেখাংশ হল একটি ভেক্টর (চিত্র 10.1(iii)), যা $\overrightarrow{AB}$ বা সহজভাবে $\vec{a}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায় এবং একে 'ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$' বা 'ভেক্টর $\vec{a}$' হিসেবে পড়া হয়।

একটি বিন্দু A যেখান থেকে ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ শুরু হয় তাকে এর প্রারম্ভিক বিন্দু (initial point) বলে, এবং B বিন্দু যেখানে ভেক্টরটি শেষ হয়, তাকে এর অন্তিম বিন্দু (terminal point) বলে। ভেক্টরের প্রারম্ভিক এবং অন্তিম বিন্দুর মধ্যেকার দূরত্বকে ভেক্টরটির মান (বা দৈর্ঘ্য) বলা হয়, যা $|\overrightarrow{AB}|$ বা $|\vec{a}|$ বা a এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। তীরচিহ্নটি ভেক্টরের দিক নির্দেশ করে।

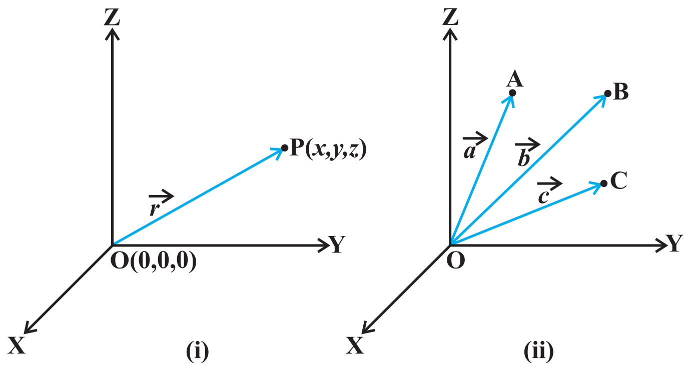
দ্রষ্টব্য যেহেতু দৈর্ঘ্য কখনও ঋনাত্মক হয় না, তাই $|\vec{a}| < 0$ এই প্রতীকটি অর্থহীন।

অবস্থান ভেক্টর (Position Vector)

একাদশ শ্রেণি থেকে, ত্রিমাত্রিক দক্ষিণাবর্তী লম্ব স্থানাঙ্ক পদ্ধতি স্মরণ করো (চিত্র 10.2(i))। ধরা যাক, মূলবিন্দু O(0, 0, 0) এর সাপেক্ষে ত্রিমাত্রিক দেশে একটি বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y, z) । তবে, $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরকে O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়, যেখানে O এবং P হল যথাক্রমে এর প্রারম্ভিক এবং অন্তিম বিন্দু। দূরত্ব সূত্র প্রয়োগে (একাদশ শ্রেণিথেকে), $\overrightarrow{OP}$ (বা $\vec{r}$) এর মান নিম্নরূপে প্রদত্ত।

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

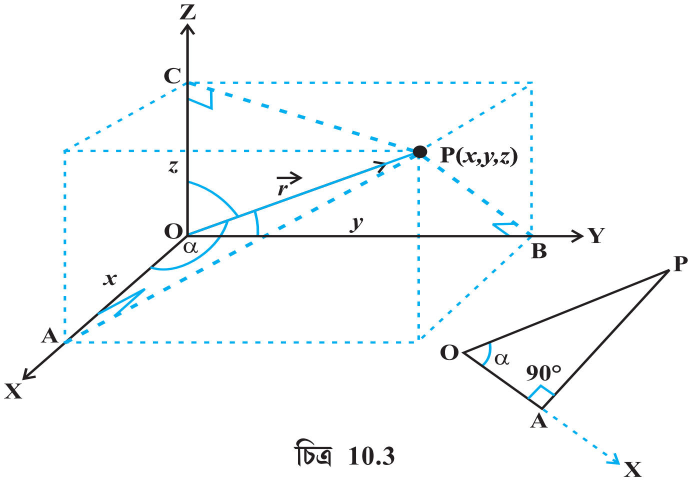
ব্যবহারিকভাবে, মূলবিন্দু O-এর সাপেক্ষে A, B, C ইত্যাদি বিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ইত্যাদি রূপে প্রকাশ করা যায় (চিত্র -10.2 (ii))।



চিত্র 10.2

দিক্-কোসাইন (Direction Cosines)

ধরা যাক, চিত্র 10.3-এ প্রদর্শিত $P(x, y, z)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হল $\overrightarrow{OP}$(বা $\vec{r}$)। $\vec{r}$ ভেক্টর ধণাত্মক x, y এবং z -অক্ষের সঙ্গে যথাক্রমে α, β, γ কোণ উৎপাদন করলে, কোণগুলোকে $\vec{r}$ এর দিক্-কোণ *(direction angles)* বলা হয়। এই কোণগুলোর কোসাইনের মান অর্থাৎ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ এবং $\cos\gamma$ কে $\vec{r}$ ভেক্টরের দিক্-কোসাইন বলা হয় এবং যথাক্রমে l, m এবং n, দ্বারা সাধারণত প্রকাশ করা হয়।



চিত্র 10.3

চিত্র 10.3 থেকে, আমরা পাই যে OAP হল একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং এর থেকে পাই $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ (যেখানে $r = |\vec{r}|$)। একইভাবে, OBP এবং OCP সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা লিখতে পারি $\cos\beta = \frac{y}{r}$ এবং $\cos\gamma = \frac{z}{r}$। এইভাবে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (lr, mr, nr) রূপেও প্রকাশ করা যায়। দিক্-কোসাইনের সঙ্গে সমানুপাতিক, lr, mr এবং nr সংখ্যা তিনটিকে $\vec{r}$ ভেক্টরের দিক্-অনুপাত(direction ratios) বলা হয় এবং যথাক্রমে a, b এবং c দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

> দ্রষ্টব্য লক্ষ করো যে $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ কিন্তু সাধারণত $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$.

10.3 ভেক্টরের বিভিন্ন প্রকার (Types of Vectors)

শূন্য ভেক্টর (Zero Vector) কোনো ভেক্টরের প্রারম্ভিক এবং অন্তিম বিন্দু সমাপতিত হলে, তাকে শূন্য ভেক্টর (বা অকার্যকর ভেক্টর) বলা হয় এবং এটি $\vec{0}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। শূন্য ভেক্টরের কোনো নির্দিষ্ট দিক আরোপিত করা যায় না কারণ এর মান শূন্য। অথবা বিকল্পভাবে অন্যথায় এটি কোনো দিক্-নির্দেশক হিসেবে বিবেচিত হতে পারে। $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ ভেক্টরদ্বয় শূন্য ভেক্টরকে উপস্থাপিত করে।

একক ভেক্টর (Unit Vector) একটি ভেক্টর যার মান এক (অর্থাৎ 1 একক), তাকে একক ভেক্টর বলা হয়। প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{a}$ এর দিক বরাবর একক ভেক্টর কে $\hat{a}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সম-প্রারম্ভিক ভেক্টর (Coinitial Vectors) দুই বা ততোধিক ভেক্টরের একই প্রারম্ভিক বিন্দু থাকলে তাদের সম-প্রারম্ভিক ভেক্টর বলা হয়।

সমরেখ ভেক্টর (Collinear Vectors) দুই বা ততোধিক ভেক্টরকে সমরেখ বলা হবে, যদি মান এবং দিক নির্বিশেষে তারা একই সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

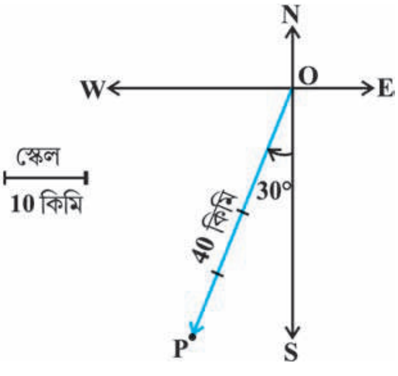
সমান ভেক্টর (Equal Vectors) দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ কে সমান বলা হবে, যদি তাদের মান সমান হয় এবং দিকের ক্ষেত্রে তাদের প্রারম্ভিক বিন্দুর অবস্থান অগ্রাহ্য করা হয় এবং তা $\vec{a} = \vec{b}$ রূপে লেখা হয়।

ঋণাত্মক ভেক্টর (Negative of a Vector) একটি ভেক্টর যার মান প্রদত্ত ভেক্টরের (ধরা যাক, $\overrightarrow{AB}$) সমান কিন্তু এর দিক প্রদত্ত ভেক্টরের বিপরীত, তাকে প্রদত্ত ভেক্টরের ঋণাত্মক ভেক্টর বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ, ভেক্টর $\overrightarrow{BA}$ হল $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের ঋণাত্মক ভেক্টর এবং $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ রূপে লেখা যায়।

মন্তব্য উপরের সংজ্ঞায়িত ভেক্টরগুলো এমন যে, এদের যে-কোনো একটি তার মান এবং দিক পরিবর্তন না করে সমান্তরাল সরণ হতে পারে। এই জাতীয় ভেক্টরকে মুক্ত ভেক্টর (free vector) বলা হয়। এ অধ্যায় জুড়ে, আমরা শুধুমাত্র মুক্ত ভেক্টর নিয়ে আলোচনা করব।

উদাহরণ 1 দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে 30° কোণের 40 কিমি সরণকে লেখচিত্র উপস্থাপন করো।

সমাধান $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরটি প্রয়োজনীয় সরণকে উপস্থাপন করে (চিত্র 10.4).



চিত্র 10.4

উদাহরণ 2 নিম্নলিখিত পরিমাপগুলোকে স্কেলার এবং ভেক্টররূপে শ্রেণিবিভাগ করো।

(i) 5 সেকেন্ড

(ii) 1000 সেমি^{3}

(iii) 10 নিউটন (iv) 30 কিমি/ঘন্টা (v) 10 গ্রাম/সেমি^{3}

(vi) উত্তর দিকে 20 মি/সে

সমাধান

(i) সময়-স্কেলার (ii) আয়তন-স্কেলার (iii) বল-ভেক্টর

(iv) দ্রুতি-স্কেলার (v) ঘনত্ব-স্কেলার (vi) গতিবেগ-ভেক্টর

উদাহরণ 3 চিত্র 10.5 -এ , কোন্ ভেক্টরগুলো ঃ

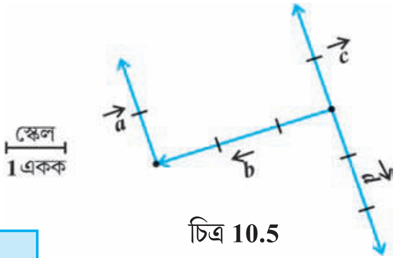
(i) সমরেখ (ii) সমান (iii) সম-প্রারম্ভিক

সমাধান

(i) সমরেখ ভেক্টর : $\vec{a}, \vec{c}$ এবং $\vec{d}$.

(ii) সমান ভেক্টর : $\vec{a}$ এবং $\vec{c}$

(iii) সম-প্রারম্ভিক ভেক্টর : $\vec{b}, \vec{c}$ এবং $\vec{d}$.



চিত্র 10.5

অনুশীলনী 10.1

1. উত্তর-পূর্ব দিকে 30° কোণে 40 কিমি সরণকে লেখচিত্রে উপস্থাপন করো।

2. নিম্নলিখিত পরিমাপগুলোকে স্কেলার এবং ভেক্টর রূপে শ্রেণিবিভাগ করো।

(i) 10 কেজি (ii) 2 মিটার উত্তর-পশ্চিম দিকে (iii) 40°

(iv) 40 ওয়াট (v) 10^{-19} কুলম্ব (vi) 20 মি/সেকেন্ড^2

3. নিম্নলিখিতগুলোকে স্কেলার এবং ভেক্টর রাশি রূপে শ্রেণিবিভাগ করো।

(i) সময় কাল (ii) দূরত্ব

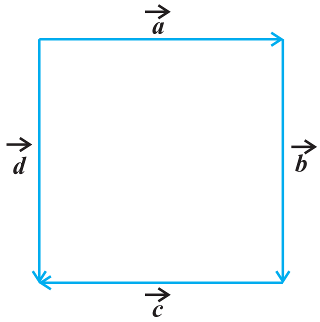
(iii) বল

(iv) গতিবেগ (v) কৃতকার্য

4. চিত্র 10.6 (একটি বর্গক্ষেত্র) নিম্নলিখিত ভেক্টরগুলো সনাক্ত করো।

(i) সম-প্রারম্ভিক (ii) সমান

(iii) সমরেখ কিন্তু সমান নয়



চিত্র 10.6

5. নিম্নলিখিতগুলো সত্য বা মিথ্যা কিনা উত্তর দাও।

(i) $\vec{a}$ এবং $-\vec{a}$ হল সমরেখ।

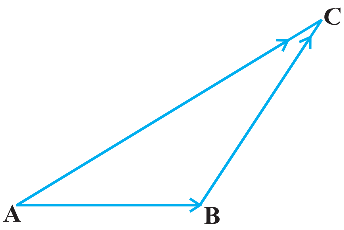
(ii) দুটি সমরেখ ভেক্টরের মান সর্বদা সমান হয়।

(iii) দুটি ভেক্টরের একই মান থাকলে তারা সমরেখ হয়।

(iv) দুটি সমরেখ ভেক্টরের একই মান থাকলে তারা সমান হয়।

10.4 ভেক্টরের যোগ (Addition of Vectors)

একটি ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ সাধারণত A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে সরণ বোঝায়। এখন একটি পরিস্থিতি বিবেচনা করো যে, একটি বালিকা A থেকে B তে এবং তারপর B থেকে C তে অগ্রসর হল (চিত্র 10.7)। বালিকাটি দ্বারা A থেকে C বিন্দুতে মোট সরন হল $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টর এবং এটিকে .. নিম্নরূপে প্রকাশ করা হয়।

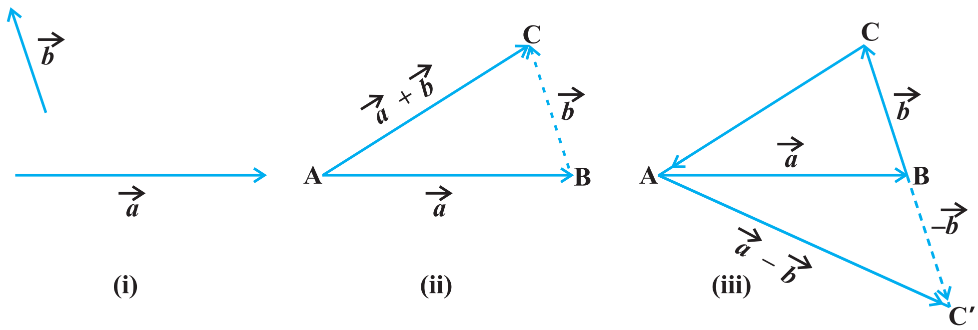


চিত্র 10.7

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

এটি ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র (*triangle law of vector addition*) হিসেবে পরিচিত।

সাধারণত, যদি আমাদের $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি ভেক্টর (চিত্র 10.8 (i)) থাকে, তবে তাদের যোগ করার জন্য, এমন অবস্থায় নিয়ে আসা হয় যে একটির প্রারম্ভিক বিন্দু অন্যটির অন্তিম বিন্দুর সাথে সমাপতিত হয় (চিত্র 10.8(ii))।



চিত্র 10.8

উদাহরণস্বরূপ, চিত্র 10.8 (ii)-এ, আমরা $\vec{b}$ ভেক্টরটির মান ও দিক পরিবর্তন না করে এমনভাবে স্থানান্তর করব যেন এর প্রারম্ভিক বিন্দু $\vec{a}$ -এর অন্তিম বিন্দুর সাথে সমাপতিত হয়। তবে, $\vec{a} + \vec{b}$ ভেক্টরটি, ত্রিভুজ ABC এর তৃতীয় বাহু AC দ্বারা উপস্থাপন করা হয়, যা $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরের যোগফল (বা ফলাফল) দেয়। অর্থাৎ, ত্রিভুজ ABC (চিত্র 10.8 (ii)) থেকে আমরা পাই,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

আবার যেহেতু, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$, উপরের সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

এ থেকে এটি বোঝায় যে, যখন কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোকে একই ক্রমে নেওয়া হয়, তবে এটি শূন্য ফলাফলের দিকে চালিত হয়, যেহেতু প্রারম্ভিক এবং অন্তিম বিন্দুদ্বয় সমাপতিত হয় (চিত্র 10.8(iii))।

এখন, ভেক্টর $\overrightarrow{BC'}$ এর সমমান সম্পন্ন একটি ভেক্টর $\overrightarrow{BC'}$ গঠন করো, কিন্তু এর দিক $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরের বিপরীত হবে (চিত্র 10.8 (iii)), অর্থাৎ

$$\overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{BC}$$

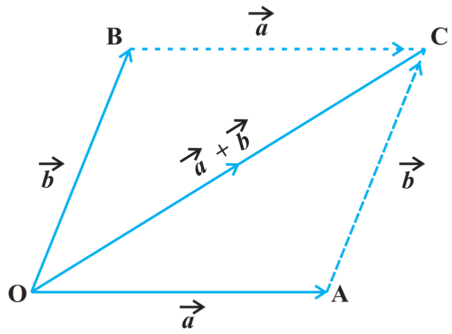
তবে, ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগে চিত্র 10.8 (iii)থেকে আমরা পাই,

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC}) = \vec{a} - \vec{b}$$

ভেক্টর, $\overrightarrow{AC'}$ $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর অন্তরকে প্রকাশ করে।

এখন কোনো নদীর এক তীর থেকে অন্য তীরে নদীর স্রোতের সঙ্গে লম্বভাবে গতিশীল একটি নৌকা বিবেচনা করো। তবে, এটির উপর দুটি গতিবেগ ভেক্টর কার্যকর হচ্ছে— একট হল নৌকাটির ইঞ্জিন কর্তৃক আরোপিত গতিবেগ এবং অন্যটি হল নদীর জলের স্রোতের গতিবেগ। এই দুটি গতিবেগের একযোগে প্রভাবের ফলে, নৌকা প্রকৃতপক্ষে একটি ভিন্ন গতিতে চলতে শুরু করে। নৌকার কার্যকর গতি এবং দিক নির্দেশ (যেমন-ফলস্বরূপ বেগ) সম্পর্কে একটি সুনির্দিষ্ট ধারণা পেতে, আমাদের নীচের ভেক্টর সংযোজন সম্পর্কিত সূত্র রয়েছে।

যদি দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা মান ও দিককে (চিত্র 10.9) প্রকাশ করা হয়। বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণ ভেক্টরদ্বয়ের সমষ্টি $\vec{a} + \vec{b}$ এর মান ও দিক নির্দেশ করে। এটি *ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র (parallelogram law of vector addition)* হিসেবে পরিচিত।



চিত্র 10.9

> **দ্রষ্টব্য** চিত্র 10.9 থেকে, ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগে, লক্ষ করা যায় যে,
>
> $$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$
>
> বা $$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \qquad (\text{যেহেতু, } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB})$$
>
> যা হল সামান্তরিক সূত্র। অতএব, আমরা বলতে পারি যে ভেক্টর যোগের দুটি সূত্র পরস্পর সমতুল্য।

ভেক্টর যোগের ধর্মাবলী (Properties of vector addition)

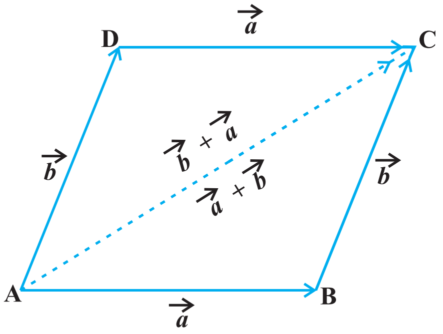
ধর্ম 1 যে কোন দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$, এর জন্য

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{(বিনিময় ধর্ম)}$$

প্রমাণ ABCD একটি সামান্তরিক বিবেচনা করো (চিত্র 10.10)। ধরা যাক, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, তবে ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগে, ত্রিভুজ ABC থেকে আমরা পাই,

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

এখন, যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলো সমান এবং সমান্তরাল, চিত্র 10.10 থেকে আমরা পাই, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$. আবার ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগে, ত্রিভুজ ADC থেকে আমরা পাই,



চিত্র 10.10

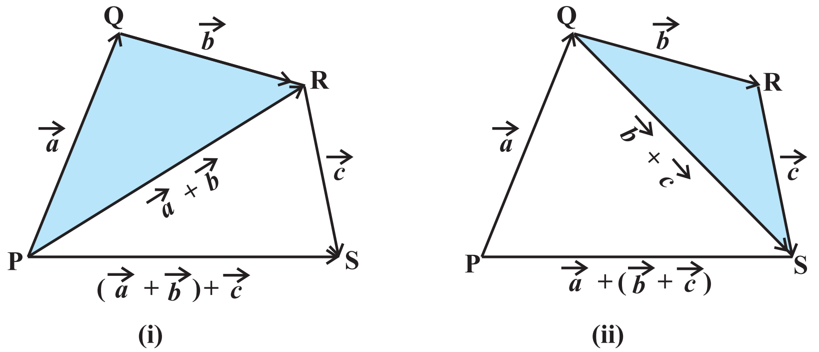
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$$

অতএব, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

ধর্ম 2 যে, কোনো তিনটি ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ এর জন্য

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \qquad \text{(সংযোগ ধর্ম)}$$

প্রমাণ ধরা যাক, চিত্র 10.11(i) এবং (ii) এ ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ কে যথাক্রমে $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ এবং $\overrightarrow{RS}$ রূপে প্রকাশ করা হয়েছে।



চিত্র 10.11

তবে $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

এবং $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QS}$

সুতরাং, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$

এবং $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$

অতএব $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

মন্তব্য ভেক্টর যোগের সংযোগ ধর্ম আমাদের তিনটি ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ এর সমষ্টিকে বন্ধনী ছাড়া $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ রূপে লিখতে সাহায্য করে।

লক্ষ করো যে কোনো ভেক্টর $\vec{a}$ এর জন্য, আমরা পাই

$$\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$$

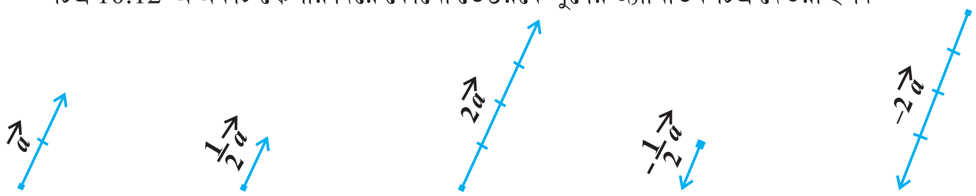
এখানে শূন্য ভেক্টর $\vec{0}$ কে ভেক্টর যোগের ক্ষেত্রে যোগজ অভেদ (additive identity) বলা হয়।

10.5 কোনো ভেক্টরকে একটি স্কেলার দিয়ে গুন (Multiplication of a vector by a Scalar)

ধরা যাক, $\vec{a}$ হল একটি প্রদত্ত ভেক্টর এবং λ একটি স্কেলার। তবে ভেক্টর $\vec{a}$ -এর সাথে স্কেলার λ-এর গুনকে স্কেলার λ দিয়ে ভেক্টর $\vec{a}$ কে গুন করা বলা হয়, যা $\lambda\vec{a}$ রূপে প্রকাশ করা হয়। লক্ষ করো যে, $\lambda\vec{a}$ হল একটি ভেক্টর, যা ভেক্টর $\vec{a}$ -এর সমরেখ। λ এর মান ধনাত্মক (বা ঋণাত্মক) অনুযায়ী ভেক্টর $\lambda\vec{a}$ এর দিক, ভেক্টর $\vec{a}$ এর একই দিকে (বা বিপরীতে) হয়। আবার, ভেক্টর $\lambda\vec{a}$ এর মান, ভেক্টর $\vec{a}$ এর মানের $|\lambda|$ গুন হয়, অর্থাৎ,

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$

চিত্র 10.12-এ একটি স্কেলার দিয়ে কোনো ভেক্টরকে গুণের জ্যামিতিক চিত্র দেওয়া হল।



চিত্র 10.12

যখন $\lambda = -1$, তখন $\lambda\vec{a} = -\vec{a}$, যা ভেক্টর $\vec{a}$ এর সমমান যুক্ত এবং এর দিক ভেক্টর $\vec{a}$ এর বিপরীত। ভেক্টর $-\vec{a}$ কে, ভেক্টর $\vec{a}$ এর ঋনাত্মক (বা যোগজ বিপরীত) বলা হয় এবং আমরা সর্বদা পাই,

$$\vec{a}+(-\vec{a}) = (-\vec{a})+\vec{a} = \vec{0}$$

তাছাড়া, যদি $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$, যেখানে $\vec{a} \neq 0$ অর্থাৎ $\vec{a}$ শূন্য ভেক্টর নয়, তবে

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$$

সুতরাং, $\lambda \vec{a}$ ভেক্টর, $\vec{a}$ এর দিকে একটি একক ভেক্টরকে প্রকাশ করে। আমরা এটিকে লিখতে পারি যে,

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

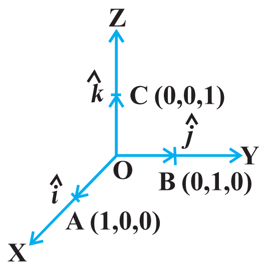
দ্রষ্টব্য যে-কোনো স্কেলার k এর জন্য, $k\vec{0} = \vec{0}$.

10.5.1 *একটি ভেক্টরের উপাংশ (Components of a vector)*

চলো আমরা x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং z-অক্ষের ওপর যথাক্রমে A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) এবং C(0, 0, 1) বিন্দুগুলো নেই। স্পষ্টতই,

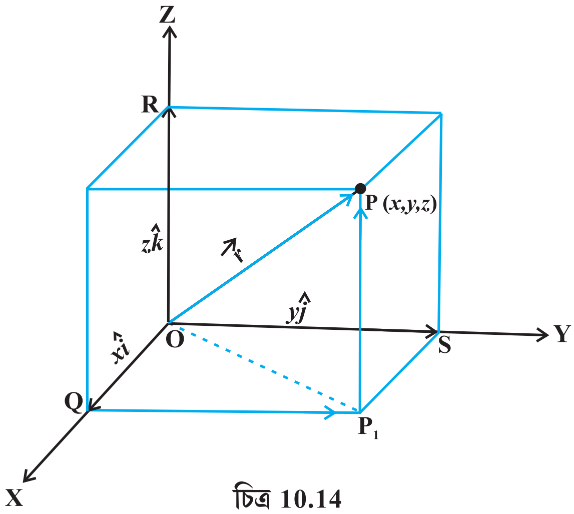
$$|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = 1 \text{ এবং } |\overrightarrow{OC}| = 1$$

এক মান বিশিষ্ট ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ এবং $\overrightarrow{OC}$ কে যথাক্রমে OX, OY এবং OZ অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর বলা হয় এবং যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয় (চিত্র 10.13)।



চিত্র 10.13

এখন, চিত্র 10.14-এ একটি বিন্দু P (x, y, z) এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$ বিবেচনা করি। ধরা যাক, P_1 হল P বিন্দু থেকে XOY সমতলের উপর লম্বের পাদবিন্দু।



চিত্র 10.14

এইভাবে,আমরা দেখতে পারি যে P_1P হল z-অক্ষের সমান্তরাল। যেহেতু $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ হল, যথাক্রমে x, y এবং z-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্কের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই, $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OR} = z\hat{k}$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QP_1} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j}$ এবং $\overrightarrow{Sp_1} = \overrightarrow{OQ} = x\hat{i}$.

অতএব, এটি বোঝায় যে $\qquad \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP_1} = x\hat{i} + y\hat{j}$

এবং $\qquad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

সুতরাং, O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়

$$\overrightarrow{OP} \text{ (বা } \vec{r}) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

এই আকারের কোনো ভেক্টরকে এর *উপাংশ আকার (component form)* বলে। এখানে x, y এবং z কে ভেক্টর $\vec{r}$, এর *স্কেলার উপাংশ (scalar components)* বলা হয় এবং $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ এবং $z\hat{k}$ কে যথাক্রমে অনুরূপ অক্ষ বরাবর $\vec{r}$ এর *ভেক্টর উপাংশ (vector components)* বলা হয়। অনেক সময় x, y এবং z কেও লম্ব উপাংশ (*rectangular components*) বলা হয়।

যে কোনো ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ এর দৈর্ঘ্য, পীথাগোরাসের উপপাদ্য দুইবার প্রয়োগ করে সহজে নির্ণয় করা যায়। আমরা সমকোণী ত্রিভুজ OQP_1 (চিত্র 10.14) এ লক্ষ করি যে

$$|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{QP_1}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

এবং সমকোণী ত্রিভুজ OP_1P থেকে আমরা পাই,

$$\overrightarrow{OP} = \sqrt{|\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{P_1P}|^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) + z^2}$$

সুতরাং, যে কোনো ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ এর দৈর্ঘ্য নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়

$$|\vec{r}| = |x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুটির উপাংশ আকার যথাক্রমে $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ এবং $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, হয় তবে

(i) ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর সমষ্টি (বা ফলাফল) হল

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$$

(ii) ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর অন্তর হল

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$$

(iii) ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ সমান হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2 \quad \text{এবং} \quad a_3 = b_3$$

(iv) যেকোনো স্কেলার λ দ্বারা ভেক্টর $\vec{a}$ এর গুণফল হল

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

ভেক্টরের যোগ এবং স্কেলার দ্বারা ভেক্টরের গুণ একত্রে বন্টন নিয়ম অনুযায়ী নিম্নরূপে লেখা যায় :
ধরা যাক, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ হল দুটি ভেক্টর, k এবং m হল যে-কোনো স্কেলার। তবে—

(i) $k\vec{a} + m\vec{a} = (k+m)\vec{a}$

(ii) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$

(iii) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

মন্তব্য

(i) এটি লক্ষ করা যায় যে, λ এর মান যাই হোক না কেন, ভেক্টর $\lambda\vec{a}$ সর্বদা ভেক্টর $\vec{a}$ এর সমরেখ হবে। কার্যত, দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ সমরেখ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি একটি অশূন্য স্কেলার λ এর অস্তিত্ব থাকে যাতে $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ হয়। যদি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ উপাংশ আকারে দেওয়া থাকে অথাৎ, $\vec{a} = \vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ তবে দুটি ভেক্টর সমরেখ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = \lambda(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1 = \lambda a_1,\ b_2 = \lambda a_2,\ b_3 = \lambda a_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$$

(ii) যদি $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, তবে a_1, a_2, a_3 কে ও $\vec{a}$ এর দিক্ অনুপাত বলা হয়।

(iii) যদি একটি ভেক্টরের দিক্ কোসাইন l, m, n দেওয়া হয়, তবে $l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k} = (\cos\alpha)\hat{i} + (\cos\beta)\hat{j} + (\cos\gamma)\hat{k}$ হল প্রদত্ত ভেক্টরটির দিক বরাবর একক ভেক্টর, যেখানে α, β এবং γ হল যথাক্রমে x, y এবং z-অক্ষের সাথে ভেক্টরের উৎপন্ন কোণ।

উদাহরণ 4 $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুটি সমান হলে x, y এবং z এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান লক্ষ করো যে, দুটি ভেক্টর সমান হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি তাদের অনুরূপ উপাংশগুলো সমান হয়। অতএব, প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ সমান হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$x = 2,\ y = 2,\ z = 1 \text{ হয়।}$$

উদাহরণ 5 ধরো $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ এবং $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ । $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ হবে কী? $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুটি কি সমান?

সমাধান আমরা পাই $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ এবং $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

সুতরাং, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ । কিন্তু, ভেক্টর দুটি সমান নয় যেহেতু তাদের অনুরূপ উপাংশগুলো ভিন্ন।

উদাহরণ 6 $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় করো।

সমাধান $\vec{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টরটি হলো $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

এখন
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

অতএব
$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$$

উদাহরণ 7 $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ ভেক্টরের অভিমুখ বরাবর একটি ভেক্টর নির্ণয় করো যার মান 7 একক।

সমাধান প্রদত্ত $\vec{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর হল

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

অতএব, $\vec{a}$ এর দিক বরাবর এবং যার মান 7 ভেক্টরটি হল

$$7\hat{a} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

উদাহরণ 8 $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টর দুটির সমষ্টির দিক বরাবর একক ভেক্টরটি নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত ভেক্টর দুটির সমষ্টি হলো

$$\vec{a} + \vec{b}\ (= \vec{c}, \text{ ধরা যাক}) = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

এবং
$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

এইভাবে, নির্ণেয় একক ভেক্টরটি হল

$$\hat{c} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i}+\frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j}-\frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k}$$

উদাহরণ 9 $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরটির দিক্ অনপাতগুলো লেখো এবং এর থেকে ভেক্টরটির দিক্ কোসাইনগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান লক্ষ করো যে, ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ এর দিক্ অনুপাত a, b, c গুলো হল যথাক্রমে ভেক্টরের x, y এবং z উপাংশ। সুতরাং, প্রদত্ত ভেক্টরের জন্য আমরা পাই, $a = 1, b = 1$ এবং $c = -2$। উপরন্তু, যদি l, m এবং n প্রদত্ত ভেক্টরের দিক্ কোসাইন হয়, তবে

$$l = \frac{a}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}},\quad m = \frac{b}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}},\quad n = \frac{c}{|\vec{r}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}} \text{ যেহেতু } |\vec{r}| = \sqrt{6}$$

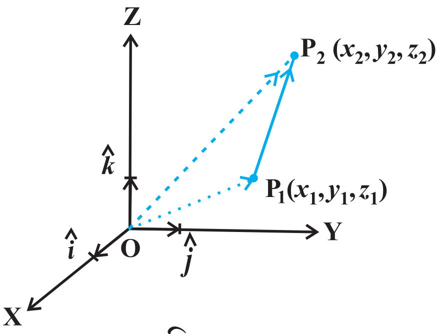
অতএব, দিক্ কোসাইনগুলো হল $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

10.5.2 *দুটি বিন্দুর সংযোগ ভেক্টর (Vector joining two points)*

যদি $P_1(x_1, y_1, z_1)$ এবং $P_2(x_2, y_2, z_2)$ যে-কোনো দুটি বিন্দু হয়, তবে P_1 এবং P_2-এর সংযোগকারী ভেক্টরটি হলো $\overrightarrow{P_1P_2}$ (চিত্র 10.15)

P_1 এবং P_2 বিন্দুদ্বয়কে মূল বিন্দু O এর সঙ্গে করে এবং ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে, ত্রিভুজ OP_1P_2 থেকে আমরা পাই,

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}.$$



চিত্র 10.15

ভেক্টর যোগের ধর্ম প্রয়োগে, উপরের সমীকরণটি থেকে পাই,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

অর্থাৎ $$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ ভেক্টরটির মান হল

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

উদাহরণ 10 P(2, 3, 0) এবং Q(– 1, – 2, – 4) বিন্দুদ্বয় সংযোগকারী ভেক্টরটি নির্ণয় করো, যার অভিমুখ P থেকে Q এর দিকে।

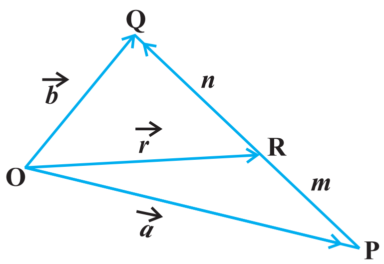
সমাধান যেহেতু ভেক্টরটির অভিমুখ P থেকে Q এর দিকে, স্পষ্টতই P হল প্রারম্ভিক বিন্দু এবং Q হল অন্তিম বিন্দু। সুতরাং P এবং Q সংযোগকারী নির্ণেয় ভেক্টর $\overrightarrow{PQ}$ হল নিম্নরূপ

$$\overrightarrow{PQ} = (-1-2)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-4-0)\hat{k}$$

অর্থাৎ,
$$\overrightarrow{PQ} = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

10.5.3 *বিভক্তিকরণ সূত্র (Section formula)*

ধরা যাক মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P এবং Q বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টরকে যথাক্রমে $\overrightarrow{OP}$ এবং $\overrightarrow{OQ}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তাহলে P এবং Q সংযোগকারী রেখাংশকে, তৃতীয় একটি বিন্দু, ধরো R দ্বারা দুই ভাবে বিভক্ত করা যেতে পারে, যথা– অন্তর্বিভক্ত (internally) (চিত্র 10.16) এবং বহির্বিভক্ত (externally) (চিত্র 10.17)। এখানে, আমরা মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OR}$ নির্ণয় করতে চাই। আমরা এক এক করে দুটি ক্ষেত্রই আলোচনা করব।



চিত্র 10.16

ক্ষেত্র I যখন R বিন্দু PQ -কে অন্তর্বিভক্ত করে (চিত্র 10.16)।

যদি R বিন্দু $\overrightarrow{PQ}$, -কে এমনভাবে বিভক্ত করে যে $m\overrightarrow{RQ} = n\overrightarrow{PR}$, যেখানে m এবং n হল ধনাত্মক স্কেলার, তবে আমরা বলব যে R বিন্দু $\overrightarrow{PQ}$ -কে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে। এখন ত্রিভুজ ORQ এবং OPR থেকে আমরা পাই,

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \vec{b} - \vec{r}$$

এবং
$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - \vec{a},$$

সুতরাং আমরা পাই,
$$m(\vec{b} - \vec{r}) = n(\vec{r} - \vec{a}) \quad \text{(কেন?)}$$

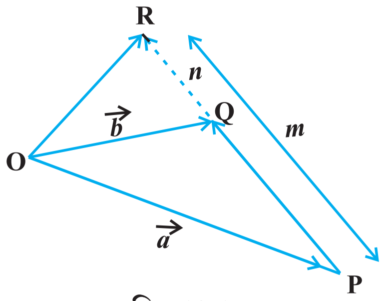
বা,
$$\vec{r} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n} \quad \text{(সরলীকরণ করে)}$$

অতএব, R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যা P এবং Q -কে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তা হল

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$

ক্ষেত্র II যখন R বিন্দু PQ কে বহির্বিভক্ত করে (চিত্র 10.17)। আমরা R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যাচাই করার জন্য এটিকে পাঠকের কাছে অনুশীলনের জন্য রেখেছি, যাহা PQ রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে $\left(\text{অর্থাৎ } \frac{PR}{QR} = \frac{m}{n}\right)$ বহির্বিভক্ত করে, যা হল

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$



চিত্র 10.17

মন্তব্য যদি R বিন্দু PQ এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে $m = n$ হবে।

অতএব, ক্ষেত্র I থেকে, $\overrightarrow{PQ}$ এর মধ্যবিন্দু R এর অবস্থান ভেক্টর হল

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

উদাহরণ 11 দুটি বিন্দু P এবং Q এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \vec{b}$ বিবেচনা করো। একটি বিন্দু R এর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করো যা P এবং Q সংযোগকারী রেখাংশকে 2:1 অনুপাতে (i) অন্তর্বিভক্ত এবং (ii) বহির্বিভক্ত করে।

সমাধান

(i) P এবং Q সংযোগকারী রেখাংশকে 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী কোনো বিন্দু R এর অবস্থান ভেক্টর হল

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) + (3\vec{a} - 2\vec{b})}{2+1} = \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) P এবং Q সংযোগকারী রেখাংশকে 2:1 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী কোনো বিন্দু R এর অবস্থান ভেক্টর হল

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) - (3\vec{a} - 2\vec{b})}{2-1} = 4\vec{b} - \vec{a}$$

উদাহরণ 12 দেখাও যে $A(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$, $B(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$, $C(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ বিন্দুগুলো হল একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

সমাধান আমরা পাই,

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (-5-1)\hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\hat{i} + (-4+3)\hat{j} + (-4+5)\hat{k} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

এবং

$$\overrightarrow{CA} = (2-3)\hat{i} + (-1+4)\hat{j} + (1+4)\hat{k} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

উপরন্তু, লক্ষ করো যে

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 41 = 6 + 35 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

অতএব, ত্রিভুজটি হল একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

অনুশীলনী 10.2

1. নিম্নলিখিত ভেক্টরগুলোর মান নির্ণয় করো :

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + k;\ \vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 3\hat{k};\ \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

2. সমমানযুক্ত দুটি ভিন্ন ভেক্টর লেখো।
3. একই অভিমুখ বরাবর দুটি ভিন্ন ভেক্টর লেখো।
4. $2\hat{i} + 3\hat{j}$ এবং $x\hat{i} + y\hat{j}$ ভেক্টর দুটি সমান হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় করো।
5. প্রারম্ভিক বিন্দু (2, 1) এবং অন্তিম বিন্দু (– 5, 7) বিশিষ্ট কোনো ভেক্টরের স্কেলার এবং ভেক্টর উপাংশ নির্ণয় করো।
6. $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$ ভেক্টরগুলোর সমষ্টি নির্ণয় করো।
7. $\vec{a} = \vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিমুখ বরাবর একক ভেক্টরটি নির্ণয় করো?
8. $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের অভিমুখ বরাবর একক ভেক্টরটি নির্ণয় করো, যেখানে P এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 2, 3) এবং (4, 5, 6)।
9. প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এরজন্য, $\vec{a} + \vec{b}$ ভেক্টরের অভিমুখ বরাবর একক ভেক্টরটি নির্ণয় করো।
10. $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিমুখে একটি ভেক্টর নির্ণয় করো যার মান 8 একক।
11. দেখাও যে $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ ভেক্টর দুটি সমরেখ।
12. $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরের দিক্ কোসাইনগুলো নির্ণয় করো।
13. A থেকে B অভিমুখে, A (1, 2, –3) এবং B(–1, –2, 1) বিন্দু দুটির সংযোগকারী ভেক্টরের দিক্ কোসাইন নির্ণয় করো।
14. দেখাও যে, $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরটি OX, OY এবং OZ অক্ষের সহিত সমভাবে নত (equally inclined)।
15. P এবং Q এর অবস্থান যথাক্রমে $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ হলে R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করো, যা P এবং Q সংযোগকারী রেখাংশকে 2 : 1 অনুপাতে
    (i) অন্তর্বিভক্ত (ii) বহির্বিভক্ত করে

16. P(2, 3, 4) এবং Q(4, 1, –2) বিন্দুর সংযোগকারী ভেক্টরের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করো।

17. A, B এবং C বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ হলে, দেখাও যে বিন্দু তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

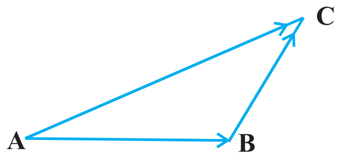
18. ত্রিভুজ ABC (চিত্র 10.18) এর ক্ষেত্রে, নিম্নলিখিত কোণগুলো সত্য নয় :

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

(D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$



চিত্র 10.18

19. যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি সমরেখ ভেক্টর হয়, তবে নিম্নলিখিত কোণগুলো অশুদ্ধ :

(A) $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, কোনো স্কেলার λএর জন্য

(B) $\vec{a} = \pm\vec{b}$

(C) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর অনুরূপ উপাংশগুলো সমানুপাতিক নয়।

(D) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ উভয়ের একই অভিমুখ, কিন্তু ভিন্ন মানবিশিষ্ট।

10.6 দুটি ভেক্টরের গুণ (Product of Two Vectors)

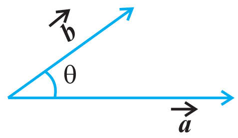
এখন পর্যন্ত আমরা ভেক্টরের যোগ এবং বিয়োগ সম্পর্কে অধ্যয়ন করেছি। এখন আমাদের উদ্দেশ্য হল ভেক্টর সম্পর্কিত একটি অন্য বজিগাণিতিক প্রক্রিয়া আলোচনা করা, যা হল ভেক্টরের গুণ। আমরা স্মরণ করব যে, দুটি সংখ্যার গুণফল হল একটি সংখ্যা, দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণফল আবার একটি ম্যাট্রিক্স, কিন্তু অপেক্ষকের ক্ষেত্রে আমরা তাদের দুইভাবে গুণ করতে পারি, যথা, দুটি অপেক্ষকের বিন্দু আকারে গুণ এবং দুটি অপেক্ষকের সংযোজন। অনুরূপভাবে, দুটি ভেক্টরের গুণও দুই পদ্ধতিতে সংজ্ঞাত হয়, যথা, স্কেলার (বা ডট্) গুণ, যেখানে গুণফল হল একটি স্কেলার এবং ভেক্টর (বা ক্রস) গুণ, যেখানে গুণফল হল একটি ভেক্টর। ভেক্টরের এই দুই প্রকাশ গুণের উপর নির্ভর করে, তারা জ্যামিতি, বল বিজ্ঞান এবং প্রকৌশল বিদ্যায় বিভিন্ন প্রয়োগ খুঁজে পেয়েছে। এই অনুচ্ছেদে, আমরা এই দুই ধরনের গুণ নিয়ে আলোচনা করব।

10.6.1 *দুটি ভেক্টরের স্কেলার (বা ডট্) গুণ (Scalar (or dot) product of two vectors)*

সংজ্ঞা 2 দুটি অশূন্য ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর স্কেলার গুণফল $\vec{a} \cdot \vec{b}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং

এটিকে $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, রূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়, যেখানে θ হল $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ মধ্যবর্তী কোণ -এর (চিত্র 10.19)

যদি $\vec{a}=0$ অথবা $\vec{b}=0$ হয় তবে θ সংজ্ঞাত নয় এবং এই ক্ষেত্রে, আমরা $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করি।



চিত্র 10.19

পর্যবেক্ষণ

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ হল একটি বাস্তব সংখ্যা।
2. ধরো $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি অশূন্য ভেক্টর, তবে $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ পরস্পর লম্ব হয়। অর্থাৎ,

   $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

3. যদি $\theta = 0$ হয়, তবে $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

   বিশেষক্ষেত্রে, $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, যেহেতু এই ক্ষেত্রে θ এর মান শূন্য (0) হয়।

4. যদি $\theta = \pi$ হয়, তবে $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$

   বিশেষক্ষেত্রে, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$, যেহেতু এই ক্ষেত্রে θ এর মান π হয়।

5. 2 এবং 3 পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে, পরস্পর লম্ব তিনটি একক ভেক্টর $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ থেকে আমরা পাই,

   $$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1,$$
   $$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$

6. দুটি অশূন্য ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোন θ হলে,

   $$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ বা, } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

7. স্কেলার গুণ, বিনিময় (commutative) ধর্ম মেনে চলে, অর্থাৎ

   $$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \qquad \text{(কেন?)}$$

স্কেলার গুণের দুটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম (Two important properties of scalar product)

ধর্ম 1 যোগের সাপেক্ষে ভেক্টর গুণের বণ্টন নিয়ম ধরা যাক $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ হল যে-কোনো তিনটি ভেক্টর, তবে

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

ধর্ম 2 ধরা যাক $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ যে-কোনো দুটি ভেক্টর এবং λ হল যে-কোনো স্কেলার। তবে

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$$

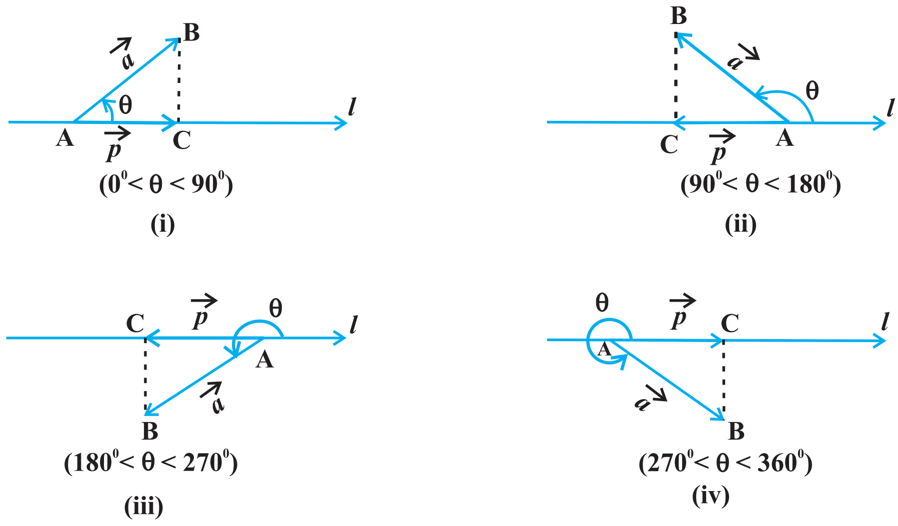
যদি দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ -কে $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ এবং $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ উপাংশ আকারে লেখা যায়, তবে তাদের স্কেলার গুণফল হল

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}) \\
&= a_1\hat{i}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})+a_2\hat{j}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})+a_3\hat{k}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}) \\
&= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k}) \\
&\quad +a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k}) \qquad \text{(উপরের 1 এবং 2 ধর্ম প্রয়োগে)} \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad \text{(পর্যবেক্ষণ 5 প্রয়োগে)}
\end{aligned}$$

এইভাবে, $\qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

10.6.2 *কোনো সরলরেখার উপর একটি ভেক্টরের অভিক্ষেপ (Projection of a vector on a line)*

ধরা যাক একটি ভেক্টর $\overline{AB}$ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (চিত্র 10.20) একটি প্রদত্ত দিক নির্দেশিত রেখা l (ধরো) এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তবে l এর উপর $\overline{AB}$ এর অভিক্ষেপ হল একটি ভেক্টর $\vec{p}$ (ধরো) যার মান $|\overrightarrow{AB}|\,|\cos\theta|$ এবং $\vec{p}$ ও সরলরেখা l এর অভিমুখ একই দিকে (বা বিপরীতে) হবে তা নির্ভর করে $\cos\theta$ এর মান ধনাত্মক না কি ঋণাত্মক। ভেক্টর $\vec{p}$ কে বলা হয় অভিক্ষেপ ভেক্টর



চিত্র 10.20

(*projection vector*) এবং এর মান $|\vec{p}|$ কে সাধারণত দিক্‌নির্দেশিত রেখা l এর উপর ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ এর অভিক্ষেপ বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, উপরের প্রতিটি চিত্রে (চিত্র 10.20 (i) থেকে(iv)), l রেখা বরাবর $\overrightarrow{AB}$ এর অভিক্ষেপ ভেক্টর হল ভেক্টর $\overrightarrow{AC}$।

পর্যবেক্ষণ

1. যদি l রেখা বরাবর $\hat{p}$ একটি একক ভেক্টর হয়, তবে l রেখার উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ হল $\vec{a}.\hat{p}$
2. $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$\vec{a}\cdot\hat{b},\text{ বা }\quad \vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right),\quad\text{বা}\quad \frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

3. যদি $\theta = 0$ হয়, তবে $\overrightarrow{AB}$ এর অভিক্ষেপ ভেক্টর হবে $\overrightarrow{AB}$ নিজেই এবং যদি $\theta = \pi$ হয়, তবে $\overrightarrow{AB}$ এর অভিক্ষেপ ভেক্টর হবে $\overrightarrow{BA}$।
4. যদি $\theta = \frac{\pi}{2}$ বা $\theta = \frac{3\pi}{2}$ হয়, তবে $\overrightarrow{AB}$ এর অভিক্ষেপ ভেক্টর হবে শূন্য ভেক্টর।

মন্তব্য যদি α, β এবং γ ভেক্টর $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ এর দিক্-কোণসমূহ হয়, তবে এর দিক্-কোসাইনসমূহ নিম্নরূপে পাওয়া যেতে পারে।

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\hat{i}}{|\vec{a}||\hat{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|},\quad \text{এবং}\quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

আরও, লক্ষ করো যে, OX, OY এবং OZ অক্ষ বরাবর $\vec{a}$ এর অভিক্ষেপগুলো হল যথাক্রমে $|\vec{a}|\cos\alpha$, $|\vec{a}|\cos\beta$ এবং $|\vec{a}|\cos\gamma$ অর্থাৎ, ভেক্টর $\vec{a}$ এর স্কেলার উপাংশ a_1, a_2 এবং a_3 হল যথাক্রমে x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং z- অক্ষ বরাবর $\vec{a}$ এর অনুরূপ অভিক্ষেপ। উপরন্তু, যদি $\vec{a}$ একটি একক ভেক্টর হয়, তবে এটিকে তার দিক্ কোসাইন আকারে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যেতে পারে

$$\vec{a} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$$

উদাহরণ 13 দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মান যথাক্রমে 1 এবং 2 হলে তাদের মধ্যবর্তী কোন নির্ণয় করো এবং যেখানে $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$.

সমাধান দেওয়া আছে, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1, |\vec{a}| = 1$ এবং $|\vec{b}| = 2$

আমরা পাই,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

উদাহরণ 14 $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ ‘θ’ নির্ণয় করো।

সমাধান $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

এখন $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=1-1-1=-1$

অতএব, আমরা পাই, $\quad \cos\theta = \frac{-1}{3}$

সুতরাং, নির্ণেয় কোণটি হল $\quad \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

উদাহরণ 15 যদি $\vec{a}=5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{b}=\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$ হয়, তবে দেখাও যে $\vec{a}+\vec{b}$ এবং $\vec{a}-\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় লম্ব।

সমাধান আমরা জানি যে দুটি অশূন্য ভেক্টর লম্ব হবে, যদি তাদের স্কেলার গুণফল শূন্য হয়।

এখানে $\quad \vec{a}+\vec{b}=(5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+(\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})=6\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$

এবং $\quad \vec{a}-\vec{b}=(5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})-(\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})=4\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}$

তাই, $\quad (\vec{a}+\vec{b})\,.\,(\vec{a}-\vec{b})=(6\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k})\cdot(4\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k})=24-8-16=0.$

অতএব, $\quad \vec{a}+\vec{b}$ এবং $\vec{a}-\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় লম্ব।

উদাহরণ 16 $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় করো।

সমাধান $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ হল

$$\frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{(2\times1+3\times2+2\times1)}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{6}}=\frac{5}{3}\sqrt{6}$$

উদাহরণ 17 যদি দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এরূপ যে $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ এবং $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ হয়, তবে $|\vec{a}-\vec{b}|$ নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা পাই,

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2$$

$$= (2)^2 - 2(4) + (3)^2$$

অতএব $\qquad |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$

উদাহরণ 18 যদি $\vec{a}$ একটি একক ভেক্টর এবং $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a}) = 8$ হয়, তবে $|\vec{x}|$ নির্ণয় করো।

সমাধান যেহেতু $\vec{a}$ হল একটি একক ভেক্টর, তাই $|\vec{a}| = 1$. তাছাড়া,

$$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a}) = 8$$

বা, $\qquad \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{x} - \vec{a}\cdot\vec{a} = 8$

বা, $\qquad |\vec{x}|^2 - 1 = 8$ অর্থাৎ, $|\vec{x}|^2 = 9$

সুতরাং, $\qquad |\vec{x}| = 3 \qquad$ (যেহেতু ভেক্টরের মান অঋণাত্মক)

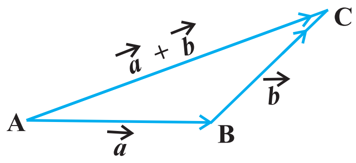
উদাহরণ 19 যে কোনো দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ *এবং* $\vec{b}$ এর জন্য, আমরা সর্বদা পাই $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ (অসমতা)

সমাধান প্রদত্ত অসমতাটি সহজরূপে স্পষ্ট হবে, যদি $\vec{a} = \vec{0}$ বা $\vec{b} = \vec{0}$। প্রকৃতপক্ষে, এই ধরনের পরিস্থিতিতে আমরা পাই, $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = 0 = |\vec{a}||\vec{b}|$ সুতরাং চলো আমরা অনুমান করি যে $|\vec{a}| \ne 0 \ne |\vec{b}|$

তবে আমরা পাই, $\qquad \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \le 1$

অতএব, $\qquad |\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$

উদাহরণ 20 যে, কোনো দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ *এবং* $\vec{b}$ এর জন্য, আমরা সর্বদা পাই $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (ত্রিভুজ অসমতা)



চিত্র 10.21

সমাধান প্রদত্ত অসমতাটি সহজরূপে স্পষ্ট হবে, যদি $\vec{a} = \vec{0}$ বা $\vec{b} = \vec{0}$ হয় (কীভাবে?)। তাই, ধরা যাক $|\vec{a}| \ne \vec{0} \ne |\vec{b}|$ তবে,

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \qquad \text{(স্কেলার গুণ বিনিময় নিয়মে)}$$

$$\le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \qquad \text{(যেহেতু } x \le |x|\ \forall x \in \mathbf{R}\text{)}$$

$$\le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \qquad \text{(উদাহরণ 19 থেকে)}$$

$$= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

অতএব, $$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

মন্তব্য যদি ত্রিভুজ অসমতার ক্ষেত্রে সমতা প্রযোজ্য হয় (উপরিউক্ত উদাহরণ 20 থেকে) অর্থাৎ,
$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|,$$

তবে $$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$$

যা দেখায় যে A, B এবং C বিন্দুগুলো সমরেখ।

উদাহরণ 21 দেখাও যে $A(-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})$, $B(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ এবং $C(7\hat{i}-\hat{k})$ বিন্দুগুলো সমরেখ।

সমাধান আমরা পাই,

$$\overrightarrow{AB} = (1+2)\hat{i}+(2-3)\hat{j}+(3-5)\hat{k} = 3\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k},$$
$$\overrightarrow{BC} = (7-1)\hat{i}+(0-2)\hat{j}+(-1-3)\hat{k} = 6\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k},$$
$$\overrightarrow{AC} = (7+2)\hat{i}+(0-3)\hat{j}+(-1-5)\hat{k} = 9\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14},\ |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{14} \text{ এবং } |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{14}$$

সুতরাং, $$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$$

অতএব, A, B এবং C বিন্দুগুলো সমরেখ।

দ্রষ্টব্য উদাহরণ 21-এ, এটিও লক্ষ করা যায় যে, যদিও $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \vec{0}$ কিন্তু A, B এবং C বিন্দুগুলো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু গঠন করে না।

অনুশীলনী 10.3

1. $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুটির মান যথাক্রমে $\sqrt{3}$ এবং 2, যেখানে $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{6}$ হলে ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।
2. $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।
3. $\hat{i}+\hat{j}$ ভেক্টরের উপর $\hat{i}-\hat{j}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় করো।
4. $7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় করো।
5. দেখাও যে, প্রদত্ত তিনটি ভেক্টরের প্রতিটি একটি একক ভেক্টর ঃ
$$\frac{1}{7}(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}),\quad \frac{1}{7}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}),\quad \frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$$
তাছাড়া, দেখাও যে ভেক্টরগুলো পরস্পর লম্ব।

6. যদি $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=8$ *এবং* $|\vec{a}|=8|\vec{b}|$ হয়, তবে $|\vec{a}|$ *এবং* $|\vec{b}|$ নির্ণয় করো।

7. $(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot(2\vec{a}+7\vec{b})$ -এর গুণফল নির্ণয় করো।

8. সমমান বিশিষ্ট দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ *এবং* $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 60^o এবং তাদের স্কেলার গুণফল $\frac{1}{2}$ হলে, ভেক্টর দুটির মান নির্ণয় করো।

9. যদি একটি একক ভেক্টর $\vec{a}$ এর জন্য, $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a})=12$ হয়, তবে $|\vec{x}|$ নির্ণয় করো।

10. যদি $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ *এবং* $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ এরূপ যে $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ ভেক্টর $\vec{c}$ এর উপর লম্ব তবে λ এর মান নির্ণয় করো।

11. যে-কোনো দুটি অশূন্য ভেক্টর $\vec{a}$ *এবং* $\vec{b}$ এর জন্য, দেখাও যে $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$ এবং $|\vec{a}|\vec{b}-|\vec{b}|\vec{a}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব।

12. যদি $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ *এবং* $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ হয়, তবে ভেক্টর $\vec{b}$ সম্বন্ধে কীরূপ সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি?

13. যদি $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ তিনটি একক ভেক্টর এরূপ যে $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ হয়, তবে $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ এর মান নির্ণয় করো।

14. যদি ভেক্টর $\vec{a}=\vec{0}$ *বা* $\vec{b}=\vec{0}$ হয়, তবে $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ হবে। কিন্তু এর বিপরীতটি সত্য নাও হতে পারে। একটি উদাহরণের সাহায্যে তোমার উত্তরটি যাচাই করো।

15. যদি একটি ত্রিভুজ A BC এর শীর্ষবিন্দু A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 2, 3), (–1, 0, 0), (0, 1, 2) হয় তবে $\angle$ABC নির্ণয় করো [$\angle$ABC হল ভেক্টর $\overrightarrow{BA}$ এবং $\overrightarrow{BC}$-এর মধ্যবর্তী কোণ]

16. দেখাও যে, A(1, 2, 7), B(2, 6, 3) এবং C(3, 10, –1) বিন্দুগুলো সমরেখ।

17. দেখাও যে, $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ এবং $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টরগুলো একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

18. যদি একটি অশূন্য ভেক্টর $\vec{a}$ এর মান 'a' এবং λ একটি অশূন্য স্কেলার হয়, তবে $\lambda\vec{a}$ একটি একক ভেক্টর হবে যদি

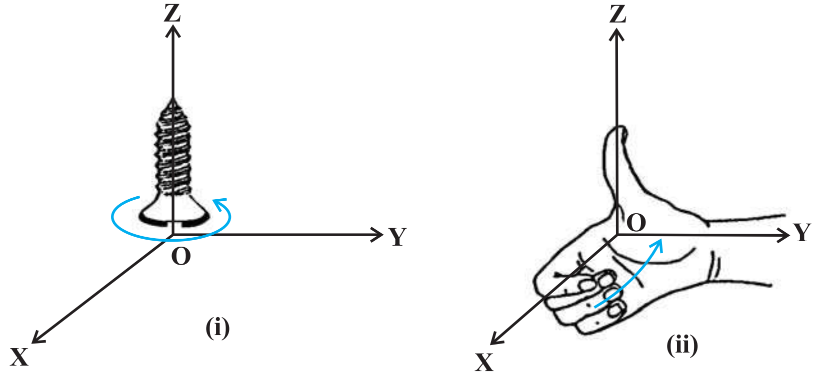
(A) $\lambda=1$ (B) $\lambda=-1$ (C) $a=|\lambda|$ (D) $a=1/|\lambda|$

10.6.3 *দুটি ভেক্টরের ভেক্টর (বা ক্রস) গুণ (Vector (or cross) product of two vectors)*

অনুচ্ছেদ 10.2-এ, আমরা ত্রিমাত্রিক দক্ষিণাবর্তী (right handed) লম্ব স্থানাঙ্ক পদ্ধতি আলোচনা করেছি। এই পদ্ধতিতে, যখন ধনাত্মক x-অক্ষকে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ধনাত্মক y-অক্ষের দিকে ঘুরানো হয়,

তখন একটি ডান হাতের স্ক্রু (screw) ধনাত্মক z-অক্ষের দিকে অগ্রসর হয় (চিত্র 10.22(i))।

দক্ষিণাবর্তী স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে, যখন অঙ্গুলিগুলোকে ধনাত্মক x-অক্ষ থেকে ধনাত্মক y-অক্ষের দিকে ঘুরানো হয় তবে ডান হাতের বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ ধনাত্মক z -অক্ষের অভিমুখ নির্দেশ করে (চিত্র 10.22(ii))।

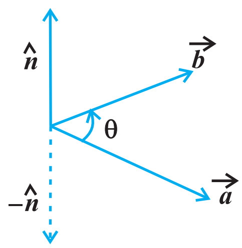


চিত্র 10.22 (i), (ii)

সংজ্ঞা 3 দুটি অশূন্য ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর ভেক্টর গুণ কে $\vec{a}\times\vec{b}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা যায়

$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n},$$

যেখানে, θ হল $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $0\le\theta\le\pi$ এবং $\hat{n}$ হল $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ উভয়ের উপর লম্ব একটি একক ভেক্টর, এরূপ যে $\vec{a}, \vec{b}$ এবং $\hat{n}$ দক্ষিণাবর্তী তন্ত্র গঠন করে (চিত্র 10.23)। অর্থাৎ, দক্ষিণাবর্তী তন্ত্রকে $\vec{a}$ থেকে $\vec{b}$ এর দিকে ঘুরানো হলে তা $\hat{n}$ এর অভিমুখে চালিত হয়।



চিত্র 10.23

যদি হয় $\vec{a}=\vec{0}$ বা $\vec{b}=\vec{0}$ তবে θ সংজ্ঞাত নয় এবং এই ক্ষেত্রে $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ সংজ্ঞাত।

পর্যবেক্ষণ

1. $\vec{a}\times\vec{b}$ হল একটি ভেক্টর।
2. ধরা যাক, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি অশূন্য ভেক্টর। তবে $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ পরস্পর সমান্তরাল (বা সমরেখ) হয়, অর্থাৎ,

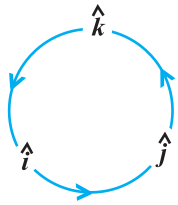
$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$$

বিশেষক্ষেত্রে, $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ এবং $\vec{a}\times(-\vec{a})=\vec{0}$, যেহেতু প্রথম ক্ষেত্রে $\theta = 0$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রেθ $= \pi$, যা থেকে $\sin\theta$ এর মান 0 পাওয়া যায়।

3. যদি $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ হয়, তবে $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ হয়।

4. 2 এবং 3 পর্যবেক্ষণে দেখা যায় যে, $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি পরস্পর লম্ব (চিত্র 10.24) একক ভেক্টরের জন্য আমরা পাই,

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$$
$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k},\quad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i},\quad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$

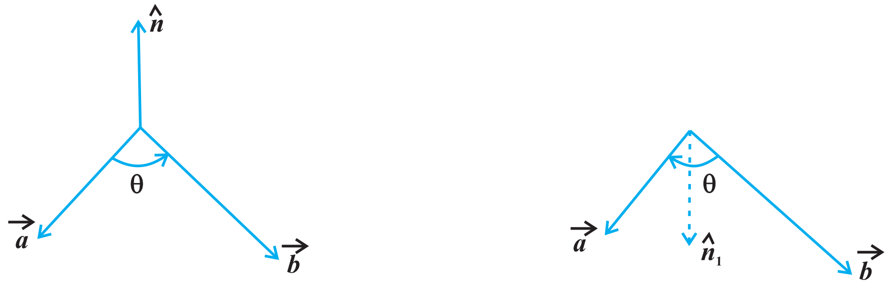


চিত্র 10.24

5. ভেক্টর গুণের আকারে, দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণকে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

6. এটি সর্বদা সত্য যে ভেক্টর গুণ বিনিময়যোগ্য নয়, যেমন $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ প্রকৃতপক্ষে, $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$, যেখানে $\vec{a}, \vec{b}$ এবং $\hat{n}$ দক্ষিণাবর্তী তন্ত্র গঠন করে, অর্থাৎ θ, $\vec{a}$ থেকে $\vec{b}$ এর দিকে ঘুরে, চিত্র 10.25 (i) আবার, $\vec{b}\times\vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}_1$, যেখানে $\vec{b}, \vec{a}$ এবং $\hat{n}_1$ দক্ষিণাবর্তী তন্ত্র গঠন করে, অর্থাৎ θ, $\vec{b}$ থেকে $\vec{a}$ এর দিকে ঘুরে, চিত্র 10.25(ii).



(i) **(ii)**

চিত্র 10.25 (i), (ii)

এইভাবে, যদি আমরা অনুমান করি যে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুটি কাগজের সমতলে আছে, তবে $\hat{n}$ এবং $\hat{n}_1$ উভয়ই কাগজের সমতলে লম্ব হবে। কিন্তু, $\hat{n}$ কাগজের উপরের দিকে যেখানে $\hat{n}_1$ কাগজের নীচের দিকেকে নির্দেশিত করে। অর্থাৎ, $\hat{n}_1 = -\hat{n}$ ।

অতএব, $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$

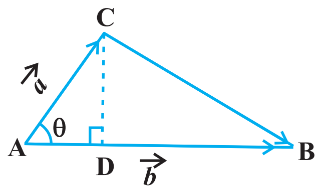
$= -|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\hat{n}_1 = -\vec{b}\times\vec{a}$

7. 4 এবং 6 পর্যবেক্ষণে, আমরা পাই,

$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k},\ \ \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i} \text{ এবং } \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$$

8. যদি $\vec{a}$ *এবং* $\vec{b}$ একটি ত্রিভুজের সংলগ্ন বাহুকে প্রকাশ করে তবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হল $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

সংজ্ঞানুসারে একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, আমরা চিত্র 10.26 থেকে পাই,



চিত্র 10.26

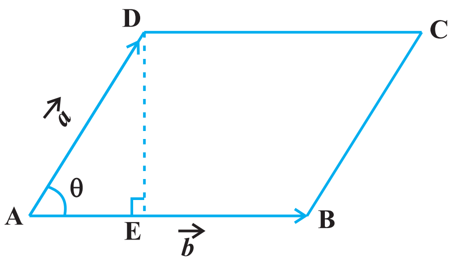
ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\text{AB}\cdot\text{CD}.$

কিন্তু $\text{AB} = |\vec{b}|$ (যা প্রদত্ত), এবং $\text{CD} = |\vec{a}|\sin\theta.$

এইভাবে, ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.$

9. যদি $\vec{a}$ *এবং* $\vec{b}$ একটি সামান্তরিকের সংলগ্ন বাহুকে প্রকাশ করে, তবে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফলকে $|\vec{a}\times\vec{b}|$ দ্বারা লেখা যায়।

চিত্র 10.27 থেকে আমরা পাই,



চিত্র 10.27

সামান্তরিক ABCD = AB. DE এর ক্ষেত্রফল

কিন্তু $\text{AB} = |\vec{b}|$ (প্রদত্ত) এবং

$\text{DE} = |\vec{a}|\sin\theta$

এইভাবে,

সামান্তরিক ABCD এর ক্ষেত্রফল $= |\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = |\vec{a}\times\vec{b}|.$

আমরা এখন ভেক্টর গুণের দুটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম বিবৃত করব।

ধর্ম 3 যোগের সাপেক্ষে ভেক্টর গুণের বণ্টনযোগ্যতা (Distributivity of vector product over addition): যদি $\vec{a}, \vec{b}$ *এবং* $\vec{c}$ যে-কোনো তিনটি ভেক্টর এবং λ একটি স্কেলার, তবে

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

(ii) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

ধরা যাক $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি প্রদত্ত ভেক্টরের উপাংশ আকার যথাক্রমে $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ এবং $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, তাহলে তাদের ক্রস গুণফলকে (cross product) লেখা হয়

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

ব্যাখ্যা আমরা পাই,

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\ &= a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})\\ &\quad + a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})\\ &\quad + a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k}) \qquad \text{(ধর্ম 1 দ্বারা)}\\ &= a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})-a_1b_3(\hat{k}\times\hat{i})-a_2b_1(\hat{i}\times\hat{j})\\ &\quad + a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})-a_3b_2(\hat{j}\times\hat{k})\end{aligned}$$

(যেহেতু $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$ এবং $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{k}\times\hat{i},\ \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{i}\times\hat{j}$ এবং $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{j}\times\hat{k}$

$$= a_1b_2\hat{k}-a_1b_3\hat{j}-a_2b_1\hat{k}+a_2b_3\hat{i}+a_3b_1\hat{j}-a_3b_2\hat{i}$$

(যেহেতু $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ এবং $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{j}\times\hat{k}$)

$$= (a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

উদাহরণ 22 যদি $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$ হয়, তবে $|\vec{a}\times\vec{b}|$ নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা পাই,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 5 & -2\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(-2-15)-(-4-9)\hat{j}+(10-3)\hat{k}=-17\hat{i}+13\hat{j}+7\hat{k}$$

অতএব, $|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{(-17)^2+(13)^2+(7)^2}=\sqrt{507}$

উদাহরণ 23 $(\vec{a}+\vec{b})$ এবং $(\vec{a}-\vec{b})$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করো, যেখানে $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$.

সমাধান আমরা পাই, $\vec{a}+\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ *এবং* $\vec{a}-\vec{b}=-\hat{j}-2\hat{k}$

$\vec{a}+\vec{b}$ এবং $\vec{a}-\vec{b}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব ভেক্টরটি হল।

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k} \quad (=\vec{c}, \text{ধরো})$$

এখন, $$|\vec{c}| = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

সুতরাং, নির্ণেয় একক ভেক্টরটি হল

$$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$$

> **দ্রষ্টব্য** যে-কোনো সমতলের দুটি লম্ব অভিমুখ থাকে। এইভাবে, $\vec{a}+\vec{b}$ এবং $\vec{a}-\vec{b}$ ভেক্টরের উপর লম্ব অপর একক ভেক্টরটি হবে $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}-\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$. কিন্তু সেটি $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$ এর ফলস্বরূপ হবে।

উদাহরণ 24 A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) এবং C(2, 3, 1) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা পাই, $\overrightarrow{AB}=\hat{j}+2\hat{k}$ *এবং* $\overrightarrow{AC}=\hat{i}+2\hat{j}$ । প্রদত্ত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হল $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

এখন, $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$$

সুতরাং, $$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$$

অতএব, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল হল $\frac{1}{2}\sqrt{21}$ বর্গ একক

উদাহরণ 25 $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় কোনো সামান্তরিকের দুটি সংলগ্ন বাহু হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান একটি সামান্তরিকের দুটি সংলগ্ন বাহু $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ হলে এর ক্ষেত্রফলকে $|\vec{a}\times\vec{b}|$ রূপে লেখা যায়।

এখন
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$$

সুতরাং,
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{25+1+16}=\sqrt{42}$$

অতএব, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল হল $\sqrt{42}$ বর্গ একক

অনুশীলনী 10.4

1. যদি $\vec{a}=\hat{i}-7\hat{j}+7\hat{k}$ এবং $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ হয়, তবে $|\vec{a}\times\vec{b}|$ নির্ণেয় করো।
2. $\vec{a}+\vec{b}$ এবং $\vec{a}-\vec{b}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করো, যেখানে $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ এবং $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$.
3. যদি একটি একক ভেক্টর $\vec{a}$, $\hat{i}$ এর সাথে $\frac{\pi}{3}$, $\hat{j}$ এর সাথে $\frac{\pi}{4}$ এবং $\hat{k}$ এর সাথে θ সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে, তবে θ এবং অত:পর $\vec{a}$ এর উপাংশ নির্ণয় করো।
4. দেখাও যে,
$$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$$
5. যদি $(2\hat{i}+6\hat{j}+27\hat{k})\times(\hat{i}+\lambda\hat{j}+\mu\hat{k})=\vec{0}$ হয়, তবে λ এবং μ নির্ণয় করো।
6. দেওয়া আছে যে, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ এবং $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ । তাহলে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ সম্বন্ধে তুমি কী সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পার?
7. ধরো প্রদত্ত $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ভেক্টরগুলো হল $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, $c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ । তাহলে দেখাও যে, $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ ।
8. যদি হয় $\vec{a}=\vec{0}$ অথবা $\vec{b}=\vec{0}$, তবে $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ । এর বিপরীতটি কী সত্যি হবে? একটি উদাহরণের মাধ্যমে তোমার উত্তরের যথার্থতা যাচাই করো।
9. A(1, 1, 2), B(2, 3, 5) এবং C(1, 5, 5) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

10. $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুটি দ্বারা সামান্তরিকের সংলগ্ন বাহুদ্বয় নির্ধারিত হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

11. ধরা যাক, $\vec{a}$ *এবং* $\vec{b}$ ভেক্টরগুলো এরূপ যে $|\vec{a}| = 3$ *এবং* $|\vec{b}| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, তবে $\vec{a} \times \vec{b}$ একটি একক ভেক্টর হবে, যদি $\vec{a}$ *এবং* $\vec{b}$ ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ

(A) $\pi/6$ (B) $\pi/4$ (C) $\pi/3$ (D) $\pi/2$

12. একটি আয়তক্ষেত্রের A, B, C এবং D শীর্ষবিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে, এর ক্ষেত্রফল হবে

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 1

(C) 2 (D) 4

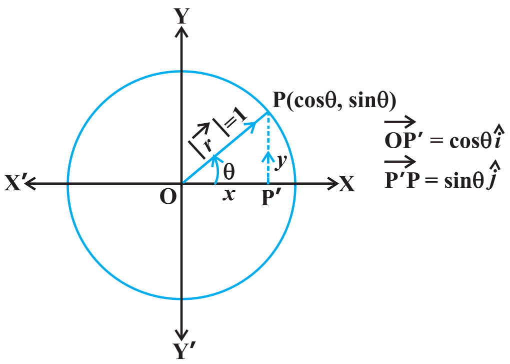
বিবিধ উদাহরণ

উদাহরণ 26 XY-সমতলে সকল একক ভেক্টরগুলো লেখো।

সমাধান ধরা যাক XY-সমতলে (চিত্র 10.28) $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ একটি একক ভেক্টর। তবে চিত্র থেকে আমরা পাই, $x = \cos\theta$ এবং $y = \sin\theta$ (যেহেতু $|\vec{r}| = 1$)। সুতরাং, আমরা $\vec{r}$ ভেক্টরকে লিখতে পারি

$$\vec{r}\,(=\overrightarrow{OP}) = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} \qquad \ldots (1)$$

স্পষ্টতই, $$|\vec{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$



চিত্র 10.28

আবার, যেহেতু θ এর মান 0 থেকে 2π এ পরিবর্তিত হয়, P বিন্দুটি (চিত্র 10.28) ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে সম্ভাব্য সকল দিক নির্দেশ করে $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্ত গঠন করে। অতএব, (1) নং সমীকরণ থেকে XY-সমতলে সকল একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

উদাহরণ 27 যদি A, B, C এবং D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+5\hat{j}$, $3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\hat{i}-6\hat{j}-\hat{k}$ হয়, তবে $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো। দেখাও যে, $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ সমরেখ।

সমাধান লক্ষ করো যে, যদি AB এবং CD এর মধ্যবর্তী কোণ θ হয়, তবে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{CD}$ এর মধ্যবর্তী কোণও θ হবে।

এখন, $\overrightarrow{AB}$ = B এর অবস্থান ভেক্টর – A এর অবস্থান ভেক্টর

$$= (2\hat{i}+5\hat{j})-(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = \hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$$

সুতরাং, $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2+(4)^2+(-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

অনুরূপে, $\overrightarrow{CD} = -2\hat{i}-8\hat{j}+2\hat{k}$ এবং $|\overrightarrow{CD}| = 6\sqrt{2}$

এইভাবে, $$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}$$

$$= \frac{1(-2)+4(-8)+(-1)(2)}{(3\sqrt{2})(6\sqrt{2})} = \frac{-36}{36} = -1$$

যেহেতু $0 \le \theta \le \pi$, এটি থেকে পাওয়া যায় $\theta = \pi$। যা প্রকাশ করে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{CD}$ সমরেখ।

বিকল্পভাবে, $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ যা থেকে বলা যায় $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{CD}$ সমরেখ ভেক্টর।

উদাহরণ 28 ধরা যাক $\vec{a}, \vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টর তিনটি এরূপ যে $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$ এবং প্রত্যেকটি অপর দুটির সমষ্টির উপর লম্ব হয়, $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ নির্ণয় করো।

সমাধান এখানে প্রদত্ত $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = 0,\ \vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{a}) = 0,\ \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 0.$

এখন, $$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})$$
$$+\ \vec{c}.(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.\vec{c}$$

$$= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

$$= 9+16+25 = 50$$

অতএব, $$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

উদাহরণ 29 $\vec{a}, \vec{b}$ *এবং* $\vec{c}$ তিনটি ভেক্টর $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ শর্তটি সিদ্ধ করে। যদি $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$ এবং $|\vec{c}|=2$ হয়, তবে $\mu=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান যেহেতু $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, আমরা পাই

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \quad = 0$$

বা, $$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \quad = 0$$

সুতরাং, $$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-|\vec{a}|^2=-9 \qquad \dots (1)$$

আবার, $$\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \quad = 0$$

বা, $$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-|\vec{b}|^2=-16 \qquad \dots (2)$$

অনুরূপে, $$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} \quad = -\ 4. \qquad \dots (3)$$

(1), (2) এবং (3) নং যোগ করে আমরা পাই,

$$2\ (\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}) \quad = -\ 29$$

বা, $$2\mu=-\ 29,\ \text{অর্থাৎ},\ \mu=\frac{-29}{2}$$

উদাহরণ 30 যদি পরস্পর লম্ব একক ভেক্টর $\hat{i}, \hat{j}$ *এবং* $\hat{k}$-এর দক্ষিণাবর্তী তন্ত্রের সাপেক্ষে $\vec{\alpha}=3\hat{i}-\hat{j},\ \vec{\beta}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ হয়, তবে $\vec{\beta}$ কে $\vec{\beta}=\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2$ আকারে প্রকাশ করো; যেখানে $\vec{\beta}_1$, $\vec{\alpha}$ এর সাথে সমান্তরাল এবং $\vec{\beta}_2$ *এবং* $\vec{\alpha}$ এর উপর লম্ব।

সমাধান ধরো, $\vec{\beta}_1=\lambda\vec{\alpha}$ যেখানে, একটি স্কেলার, অর্থাৎ $\vec{\beta}_1=3\lambda\hat{i}-\lambda\hat{j}$.

এখন, $$\vec{\beta}_2=\vec{\beta}-\vec{\beta}_1=\ (2-3\lambda)\,\hat{i}+(1+\lambda)\,\hat{j}-3\,\hat{k}$$

এখন, যেহেতু $\vec{\beta}_2$, $\vec{\alpha}$ এর উপর লম্ব, আমরা পাই $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}_2=0$, অর্থাৎ

$$3(2-3\lambda)-(1+\lambda) \quad = 0$$

বা, $$\lambda=\frac{1}{2}$$

অতএব, $$\vec{\beta}_1=\frac{3}{2}\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{i} \ \text{এবং}\ \vec{\beta}_2=\frac{1}{2}\hat{i}+\frac{3}{2}\hat{j}-3\hat{k}$$

অধ্যায় 10 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. XY-সমতলে x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $30°$ কোণে নত একটি একক ভেক্টর লেখো।

2. $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী ভেক্টরের স্কেলার উপাংশ এবং মান নির্ণয় করো।

3. একটি বালিকা পশ্চিম দিকে 4 কিমি হাঁটল, তারপর $30°$ কোণে উত্তর-পূর্বদিকে 3 কিমি অগ্রসর হয়ে দাঁড়াল। বালিকাটির প্রস্থানের প্রারম্ভিক বিন্দু থেকে সরণ নির্ণয় করো।

4. যদি $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ হয়, তবে $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$ সত্য হবে কি? তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

5. x এর মান নির্ণয় করো যার জন্য $x(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ একটি একক ভেক্টর হয়।

6. $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সঙ্গে সমান্তরাল একটি ভেক্টর নির্ণয় করো, যার মান 5 একক।

7. যদি $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ হয়, তবে $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ ভেক্টরের সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করো।

8. দেখাও যে $A(1, -2, -8)$, $B(5, 0, -2)$ এবং $C(11, 3, 7)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ এবং B বিন্দু যে অনুপাতে AC কে বিভক্ত করে তা নির্ণয় করো।

9. P এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $(2\vec{a} + \vec{b})$ এবং $(\vec{a} - 3\vec{b})$। বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাকে R বিন্দু 1 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে, R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করো। আরও দেখাও যে RQ রেখাংশের মধ্যবিন্দু হল P।

10. $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ হল কোনো সামান্তরিকের দুটি সংলগ্ন বাহু। এর কর্ণের সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করো। সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফলও নির্ণয় করো।

11. দেখাও যে OX, OY এবং OZ অক্ষের সঙ্গে একই কোণে আনত একটি ভেক্টরের দিক্ কোসাইনগুলো হল $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$।

12. ধরো $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$। একটি ভেক্টর $\vec{d}$ নির্ণয় করো যা $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব এবং $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$।

13. $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরের সমষ্টির দিক বরাবর একটি একক ভেক্টরের সঙ্গে $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের স্কেলার গুণের মান 1-এর সমান হলে, λ এর মান নির্ণয় করো।

14. যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ সমমান বিশিষ্ট পরস্পর লম্ব ভেক্টর হয়, তবে দেখাও যে $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ ভেক্টরটি $\vec{a}, \vec{b}$ এবং $\vec{c}$ এর সহিত একই কোণে আনত।

15. প্রমাণ করো যে $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\vec{a}, \vec{b}$ লম্ব হয়, দেওয়া আছে $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$ ।

16 থেকে 19 নং প্রশ্নে সঠিক উত্তরটি বাছাই করো।

16. যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হয়, তবে কেবলমাত্র হবে $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 0$ যখন

(A) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ (B) $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

(C) $0<\theta<\pi$ (D) $0\leq\theta\leq\pi$

17. ধরা যাক $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি একক ভেক্টর এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ θ । তবে $\vec{a}+\vec{b}$ একটি একক ভেক্টর হবে যদি

(A) $\theta=\frac{\pi}{4}$ (B) $\theta=\frac{\pi}{3}$ (C) $\theta=\frac{\pi}{2}$ (D) $\theta=\frac{2\pi}{3}$

18. $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}\cdot(\hat{i}\times\hat{k})+\hat{k}\cdot(\hat{i}\times\hat{j})$ এর মান হল

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 3

19. যদি যে-কোনো দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হয়, তবে $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}|$ যখন θ এর মান হবে

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

সার সংক্ষেপ

- P(x, y, z) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরকে লেখা হয় $\overline{\text{OP}}(=\vec{r})=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ রূপে এবং এর মান হল $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ।
- একটি ভেক্টরের স্কেলার উপাংশ হল তার দিক-অনুপাত এবং অনুরূপ অক্ষ বরাবর তার অভিক্ষেপ প্রকাশ করা হয়।
- যে-কোনো ভেক্টরের মান (r), দিক-অনুপাত (a, b, c) এবং দিক-কোসাইন (l, m, n) নিম্নরূপে সম্বন্ধ যুক্ত

$$l=\frac{a}{r},\quad m=\frac{b}{r},\quad n=\frac{c}{r}$$

- কোন নির্দিষ্ট ক্রমে গৃহীত একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর ভেক্টর যোগফল হল $\vec{0}$।
- দুটি সম-প্রারম্ভিক ভেক্টর এর ভেক্টর যোগফল সামান্তরিকটির কর্ণ বরাবর প্রকাশ করা হয় যেখানে সংলগ্ন বাহুদ্বয় হল প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়।
- স্কেলার λ দ্বারা একটি প্রদত্ত ভেক্টরকে গুণ ভেক্টর মানের $|\lambda|$ গুণ পরিবর্তিত হয় এবং λ এর মান ধনাত্মক (বা ঋণাত্মক) অনুসারে একই দিক (বা বিপরীত দিকে) বজায় রাখে।
- প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{a}$ এর জন্য, $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ভেক্টরটি $\vec{a}$ এর দিক বরাবর একটি একক ভেক্টর প্রকাশ করে।
- P এবং Q যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ । ওই বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশকে R বিন্দুটি $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করলে তার অবস্থান ভেক্টর হবে এবং

  (i) $\dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$, অন্তর্বিভক্তির ক্ষেত্রে।

  (ii) $\dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$, বহির্বিভক্তির ক্ষেত্রে।
- দুটি প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে এদের স্কেলার গুণকে নিম্নরূপে সংজ্ঞাত করা যায়

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \ .$$

  তাছাড়া, যখন $\vec{a} \cdot \vec{b}$ প্রদত্ত হয় তবে ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ ‘θ’ কে নিম্নরূপে নির্ণয় করা যায়।

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

- যদি দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হয় তবে এদের ক্রস গুণফল নিম্নরূপে লেখা যায়।

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \, \hat{n}$$

  যেখানে $\hat{n}$ হল $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ধারণকারী সমতলের উপর লম্ব একটি একক ভেক্টর এরূপ যে $\vec{a}, \vec{b}, \hat{n}$ স্থানাঙ্ক অক্ষে দক্ষিণাবর্তী তন্ত্র গঠন করে।
- যদি আমাদের কাছে দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ যাদের উপাংশ আকার যথাক্রমে $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ এবং যে-কোনো স্কেলার λ থাকে।

তবে $\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i}+(a_2+b_2)\hat{j}+(a_3+b_3)\hat{k}$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i}+(\lambda a_2)\hat{j}+(\lambda a_3)\hat{k}\,;$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\,;$$

এবং $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$

ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

ভেক্টর শব্দটি ল্যাটিন শব্দ ভেক্টাস (*vectus*) থেকে এসেছে, যার অর্থ "বহন করা"। আধুনিক ভেক্টর তত্ত্বের বৈজিক (germinal) ধারণাগুলো 1800 সালের সময়কাল থেকে শুরু হয়, যখন Caspar Wessel (1745-1818) এবং Jean Robert Argand (1768-1822) বর্ণনা করেছিলেন যে কীভাবে একটি নির্দেশক তলে একটি দিক্-নির্দেশিত রেখাংশের সাহায্যে একটি জটিল সংখ্যা $a + ib$ কে জ্যামিতিকভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। একজন Irish গণিতবিদ্ William Rowen Hamilton (1805-1865) তাঁর গ্রন্থ *Lectures on Quaternions* (1853)-এ দিক্-নির্দেশিত রেখাংশের জন্য প্রথম ভেক্টর শব্দটি ব্যবহার করেছিলেন। Hamilton -এর চতুষ্টয় (*Quaternions*) (কয়েকটি নির্দিষ্ট বীজগাণিতিক নিয়ম পালন করে $a+b\hat{i}+c\hat{j}+d\hat{k}$, $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ রূপে চারটি বাস্তব সংখ্যার ক্রমিত সেট) হল ত্রিমাত্রিক দেশে ভেক্টর গুণনের সমস্যা সমাধান পদ্ধতি। যদিও আমাদের এখানে অবশ্যই উল্লেখ করতে হবে যে বাস্তবে ভেক্টর ধারণা এবং তাদের সংযোজনের বিচার অনেকদিন আগে থেকে Plato (427-348 B.C.)-র এক ছাত্র গ্রীক দার্শনিক Aristotle (384-322 B.C.)-এর সময় থেকেই জানা ছিল। সেই সময়ে জানা ছিল দুই বা ততোধিক বলের সম্মিলিত ক্রিয়া সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী তাদের যোগের মাধ্যমে নির্ণয় করা যায়। লম্ব বলসমূহের ক্ষেত্রে সংযোজনের সঠিক নিয়ম, যেখানে বলসমূহের সংযোগ ভেক্টরীয় রূপে করা যায়, তা আবিষ্কার করেছিলেন Stevin-Simon (1548-1620)। 1586 সালে উনি নিজের গ্রন্থ *DeBeghinselen der Weeghconst* ("Principles of the Art of Weighing")– তে বলের জ্যামিতিক সংযোজনের নীতি বিশ্লেষন করেছিলেন, যা বলবিজ্ঞানের বিকাশের ক্ষেত্রে বড় অগ্রগতি ঘটায়। কিন্তু এরপরেও ভেক্টরের ব্যাপক ধারণা গঠনের জন্য 200 বছর লেগে যায়।

1880 সালে, একজন আমেরিকান পদার্থবিদ্ এবং গণিতজ্ঞ Josaih Willard Gibbs (1839-1903) এবং একজন ইংরেজ প্রকৌশলী Oliver Heaviside (1850-1925) মূলত চতুষ্টয়ের বাস্তব (স্কেলার) অংশকে এর অবাস্তব (ভেক্টর) অংশ থেকে আলাদা করেন, যা এখন আমরা ভেক্টর বিশ্লেষণ

(*vector analysis*) হিসেবে জানি। 1881 এবং 1884 সালে, Gibbs printed a treatise entitled *Element of Vector Analysis* নামক তাঁর একটি গ্রন্থ মুদ্রণ করেন। এই গ্রন্থটি ভেক্টরের একটি সুশৃঙ্খল এবং সংক্ষিপ্ত বিবরণ দেয়। তথাপি, ভেক্টরের প্রয়োগের প্রকাশক হিসেবে অধিক কৃতিত্ব D. Heaviside এবং P.G. Tait (1831-1901) কে দেওয়া হয়, যাঁরা এই বিষয়ে গুরুত্বপূর্ণ অবদান রেখেছেন।

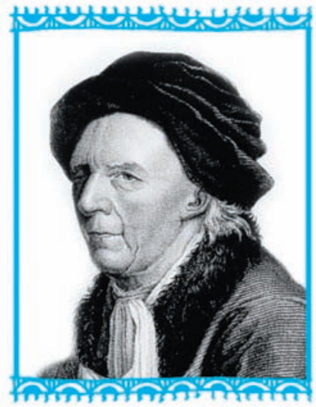
অধ্যায় 11

ত্রিমাত্রিক জ্যামিতি (Three Dimensional Geometry)

❖ *The moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination. – A. DEMORGAN* ❖

11.1 ভূমিকা

একাদশ শ্রেণিতে, যখন আমরা দ্বি-মাত্রিক দেশে বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতি এবং ত্রিমাত্রিক জ্যামিতির সূত্রপাত অধ্যয়ন করেছিলাম তখন আমরা শুধুমাত্র কার্তেসীয় পদ্ধতিতেই সীমাবদ্ধ ছিলাম। এই বইয়ের পূর্ববর্তী অধ্যায়, আমরা ভেক্টরের কিছু প্রাথমিক ধারণা অধ্যয়ন করেছি। এখন আমরা ভেক্টর বীজগণিতের ব্যবহার ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিতে করবো। ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিতে এটি প্রয়োগ করার উদ্দেশ্য হল ইহা আমাদের অধ্যয়নকে সহজ ও সুশ্রী* করবে।



Leonhard Euler
(1707-1783)

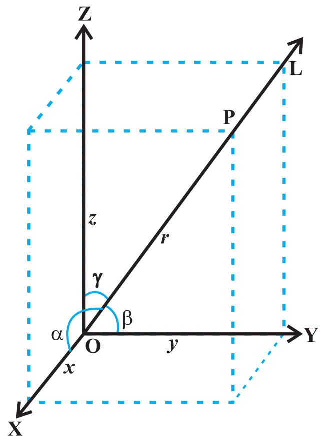
এই অধ্যায়ে, আমরা দুটি বিন্দুর সংযোগক সরলরেখার দিক্-কোসাইন ও দিক্-অনুপাত অধ্যয়ন করবো এবং এছাড়া বিভিন্ন পরিস্থিতিতে কোনো ত্রিমাত্রিক দেশ (space)-এ অবস্থিত সরলরেখা ও সমতলের সমীকরণ সমূহ, দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ, দুটি সমতলের মধ্যবর্তী কোণ, একটি সরলরেখা ও একটি সমতলের মধ্যবর্তী কোণ, দুটি অসামতলিক সরলরেখার (skew lines) মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব (shortest distance) এবং কোনো সমতল থেকে কোনো বিন্দুর দূরত্ব সম্পর্কে আলোচনা করবো। উপরিউক্ত বেশিরভাগ ফলাফলই ভেক্টর আকারে প্রাপ্ত। তবুও আমরা এই ফলাফলগুলোকে কার্তেসীয় রূপে প্রকাশ করবো এবং এগুলো মাঝে মাঝে কোনো পরিস্থিতির জ্যামিতিক ও বিশ্লেষণমূলক ছবি আরও স্পষ্টরূপে উপস্থাপন করে।

11.2 একটি সরলরেখার দিক্-কোসাইন এবং দিক্-অনুপাত (Direction Cosines and Direction Ratios of a Line)

অধ্যায়- 10 থেকে, পুনরায় মনে করে দেখো যে, মূলবিন্দুগামী কোনো নির্দেশিত রেখা (directed line) L যদি x, y ও z অক্ষের সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে, যাদের দিক্-কোণ (direction angle) বলা হয়, তবে তাদের কোসাইন, যথা $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ও $\cos\gamma$ কে ওই নির্দেশিত রেখা L-এর দিক্-কোসাইন (direction cosines) বলা হয়।

যদি আমরা L-এর দিকটিকে উল্টিয়ে দিই, তবে দিক্-কোণগুলো তাদের সম্পূরক, অর্থাৎ, $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$ এবং $\pi-\gamma$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত হবে। অতএব, দিক্-কোসাইনের চিহ্নগুলো উল্টিয়ে যায়।

* ত্রিমাত্রিক জ্যামিতির বিভিন্ন কার্যকলাপের জন্য, তোমরা বইটি পড়তে পারো— ***"A Hand Book for designing Mathematics Laboratory in Schools"***, NCERT, 2005



চিত্র 11.1

লক্ষ করো যে কোনো ত্রিমাত্রিক দেশে অবস্থিত একটি প্রদত্ত সরলরেখাকে দুটি বিপরীত দিকে বর্ধিত করা যায় এবং তাই উহার দিক্-কোসাইনের দুটি সেট আছে। কোনো ত্রিমাত্রিক দেশে অবস্থিত একটি প্রদত্ত সরলরেখার দিক্-কোসাইনের কেবলমাত্র একটি সেট এর জন্য আমরা অবশ্যই রেখাটিকে একটি নির্দেশিত রেখা হিসেবে নেবো। এই অনন্য (unique) দিক্-কোসাইনগুলোকে l, m ও n দ্বারা সূচিত করা হয়।

মন্তব্য কোনো ত্রিমাত্রিক দেশে অবস্থিত প্রদত্ত সরলরেখাটি যদি মূল বিন্দুগামী না হয়, তবে, ইহার দিক্-কোসাইনগুলো নির্ণয় করার জন্য আমরা, মূলবিন্দুগামী একটি সরলরেখা, যা প্রদত্ত সরলরেখার সাথে সমান্তরাল, অঙ্কন করবো। যেহেতু দুটি সমান্তরাল সরলরেখার দিক-কোসাইনের সেট একই, তাই আমরা মূলবিন্দু থেকে অঙ্কিত নির্দেশিত রেখাগুলোর মধ্যে যে-কোনো একটি নেবো এবং এর দিক্-কোসাইনগুলো নির্ণয় করবো।

যে-কোনো তিনটি সংখ্যা যেগুলো একটি সরলরেখার দিক্-কোসাইনের সাথে সমানুপাতিক, তাদের ওই সরলরেখার দিক্-অনুপাত (*direction ratios*) বলা হয়। যদি কোনো একটি সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো l, m, n ও দিক্-অনুপাতগুলো a, b, c হয়, তবে $a = \lambda l$, $b=\lambda m$ এবং $c = \lambda n$ হবে। যে-কোনো অ-শূন্য সংখ্যা $\lambda \in \mathbf{R}$ এর জন্য।

দ্রষ্টব্য কিছু কিছু লেখকেরা দিক্-কোসাইনকে দিক্-সংখ্যাও (*direction numbers*) বলে।

ধরা যাক একটি সরলরেখার দিক্-অনুপাতগুলো হলো a, b, c এবং ইহার দিক্-কোসাইনগুলো ($d.c$'s) হলো l, m, n। তাহলে,

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = k \text{ (ধরো), যেখানে } k \text{ হচ্ছে একটি ধ্রুবক।}$$

সুতরাং, $$l = ak,\ m = bk,\ n = ck \qquad \dots (1)$$

কিন্তু $$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

সুতরাং, $$k^2 (a^2 + b^2 + c^2) = 1$$

বা, $$k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

সুতরাং, (1) থেকে, সরলরেখাটির দিক্-কোসাইনগুলো হল

$$l=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},m=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},n=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

যেখানে, k এর কাঙ্ক্ষিত চিহ্নের উপর নির্ভর করে l, m ও n এর চিহ্ন হয়তো বা ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক নেওয়া হবে।

যে-কোনো সরলরেখার জন্য, যদি a, b, c একটি সরলরেখার দিক্-অনুপাত হয়, তবে ka, kb, kc-ও দিক্-অনুপাতের একটি সেট হবে, যেখানে $k \neq 0$ সুতরাং, একটি সরলরেখার দিক্-অনুপাতের যে-কোনো দুটি সেট সমানুপাতিক হয়। এছাড়া, যে-কোনো সরলরেখার জন্য সেখানে অসীম সংখ্যক দিক্-অনুপাতের সেট আছে।

11.2.1 একটি সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলোর মধ্যে সম্পর্ক (*Relation between the direction cosines of a line)*

একটি সরলরেখা RS বিবেচনা করো যার দিক্-কোসাইনগুলো হলো l, m ও n। মূলবিন্দুগামী একটি সরলরেখা অঙ্কন করো যেটি প্রদত্ত সরল রেখার সমান্তরাল এবং ওই রেখার ওপর একটি বিন্দু $P(x, y, z)$ নাও। P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর একটি লম্ব PA অঙ্কন করো (চিত্র 11.2)।

ধরা যাক OP = r। তাহলে $\cos\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{r}$।

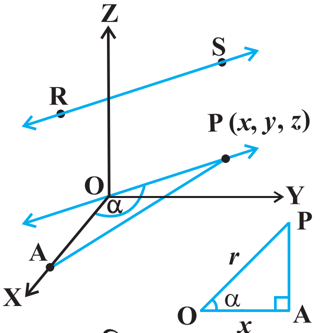
যা থেকে পাই $x = lr$।

অনুরূপে, $y = mr$ এবং $z = nr$

সুতরাং, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (l^2 + m^2 + n^2)$

কিন্তু, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

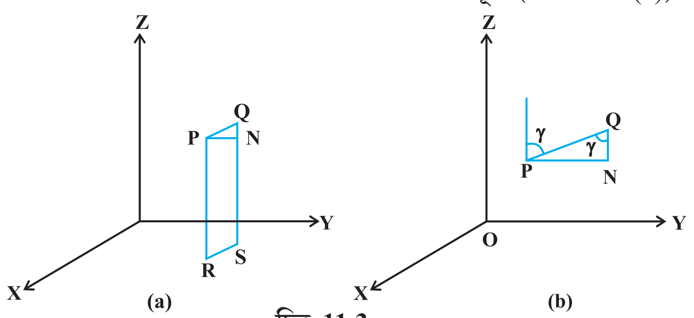
সুতরাং, $\boldsymbol{l^2 + m^2 + n^2 = 1}$



চিত্র 11.2

11.2.2 দুটি বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার দিক্-কোসাইন (*Direction cosines of a line passing through two points)*

যেহেতু দুটি প্রদত্ত বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সরলরেখাই অঙ্কন করা যায়, তাই আমরা দুটি প্রদত্ত বিন্দু যথা $P(x_1, y_1, z_1)$ ও $Q(x_2, y_2, z_2)$ গামী কোনো সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো নির্ণয় করতে পারি, যা নিম্নরূপ (চিত্র 11.3 (a))।



চিত্র 11.3

ধরা যাক, PQ সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো হলো l, m, n এবং ইহা x, y ও z অক্ষের সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

এমন, P এবং Q বিন্দু থেকে XY সমতলের উপর দুটি লম্ব অঙ্কন করো যেগুলো R ও S বিন্দুতে মিলিত হয়। P বিন্দু থেকে QS এর উপর একটি লম্ব অঙ্কন করো যেটি N-এ মিলিত হয়।
এখন, সমকোণী ত্রিভুজ PNQ-এ, $\angle PQN = \gamma$ (চিত্র 11.3 (b))।

সুতরাং, $$\cos\gamma = \frac{NQ}{PQ} = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

অনুরূপে, $$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{PQ} \text{ এবং } \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{PQ}$$

সুতরাং, $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের দিক্-কোসাইনগুলো হলো,

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

যেখানে $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

দ্রষ্টব্য $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের দিক্-অনুপাতগুলো নিম্নরূপে নেওয়া যেতে পারে $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ অথবা $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$

উদাহরণ 1 যদি একটি সরলরেখা x, y ও z অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে 90°, 60° ও 30° কোণ উৎপন্ন করে, তবে উহার দিক্-কোসাইনগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক সরলরেখাটির দিক্-কোসাইনগুলো হলো l, m, n। তাহলে $l = \cos 90^0 = 0$,

$$m = \cos 60^0 = \frac{1}{2},\quad n = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{।}$$

উদাহরণ 2 যদি একটি সরলরেখার দিক্-অনুপাতগুলো 2, –1, –2, হয়, তবে উহার দিক্-কোসাইনগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান দিক্-কোসাইনগুলো হলো

$$\frac{2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}, \frac{-2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}$$

অথবা, $$\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}$$

উদাহরণ 3 (– 2, 4, – 5) এবং (1, 2, 3) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা জানি, $P(x_1, y_1, z_1)$ ও $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

যেখানে $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

এখানে P হলো (– 2, 4, – 5) এবং Q হলো (1, 2, 3)।

সুতরাং, $$PQ = \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-4)^2 + (3-(-5))^2} = \sqrt{77}$$

অর্থাৎ, দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাটির দিক্-কোসাইনগুলো হলো

$$\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$$

উদাহরণ 4 x, y এবং z অক্ষের দিক্-কোসাইনগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান x-অক্ষটি x, y ও z অক্ষের সাথে যথাক্রমে 0°, 90° ও 90° কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং, x-অক্ষের দিক্-কোসাইনগুলো হলো cos 0°, cos 90°, cos 90° অর্থাৎ 1,0,0। অনুরূপে, y-অক্ষ ও z-অক্ষের দিক্-কোসাইনগুলো হলো যথাক্রমে 0, 1, 0 ও 0, 0, 1।

উদাহরণ 5 দেখাও যে, A (2, 3, – 4), B (1, – 2, 3) এবং C (3, 8, – 11) বিন্দুগুলো সমরেখ (collinear)।

সমাধান A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার দিক্-অনুপাতগুলো হলো

1 – 2, – 2 – 3, 3 + 4 অর্থাৎ, – 1, – 5, 7.

অনুরূপে, B ও C বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার দিক্-অনুপাতগুলো হলো

3 –1, 8 + 2, – 11 – 3, অর্থাৎ, 2, 10, – 14.

ইহা স্পষ্ট যে, AB ও BC এর দিক্-অনুপাতগুলো সমানুপাতিক (proportional), অতঃপর AB হল BC-এর সমান্তরাল। কিন্তু AB ও BC এর সাধারণ বিন্দু হলো B। সুতরাং, A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ।

অনুশীলনী 11.1

1. যদি একটি সরলরেখা x, y এবং z অক্ষের সাথে যথাক্রমে 90°, 135°, 45° কোণ উৎপন্ন করে, তবে উহার দিক্-কোসাইনগুলো নির্ণয় করো।
2. যে সরলরেখা স্থানাঙ্ক অক্ষগুলোর সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে, এই সরলরেখার দিক্-অনুপাতগুলো নির্ণয় করো।
3. যদি একটি সরলরেখার দিক্-অনুপাতগুলো –18, 12, –4 হয়, তবে ইহার দিক্-কোসাইনগুলো কত?
4. দেখাও যে (2, 3, 4), (– 1, – 2, 1), (5, 8, 7) বিন্দুগুলো সমরেখ।
5. যে ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক (3, 5, – 4), (– 1, 1, 2) এবং (– 5, – 5, – 2), উহার বাহুগুলোর দিক্-কোসাইন সমূহ নির্ণয় করো।

11.3 ত্রিমাত্রিক দেশে একটি সরলরেখার সমীকরণ (Equation of a Line in Space)

একাদশ শ্রেণিতে আমরা দ্বি-মাত্রায় সরলরেখার সমীকরণ অধ্যয়ন করেছি। এখন আমরা ত্রিমাত্রিক দেশ-এ কোনো একটি সরলরেখার ভেক্টর এবং কার্তেসীয় সমীকরণ নিয়ে অধ্যয়ন করবো।

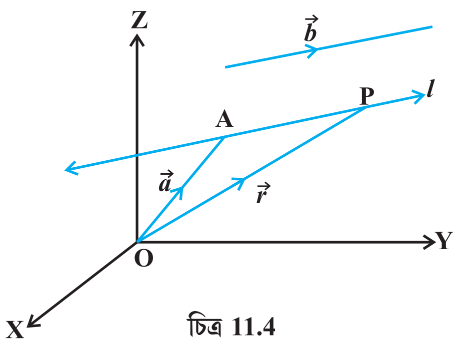
একটি সরলরেখা স্বতন্ত্ররূপে নির্ধারণ করা যায় যদি,

(i) ইহা একটি প্রদত্ত বিন্দুগামী এবং ইহার একটি প্রদত্ত দিক থাকে, অথবা

(ii) ইহা প্রদত্ত দুটি বিন্দুগামী হয়।

11.3.1 একটি প্রদত্ত বিন্দুগামী এবং একটি প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{b}$ এর সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ *(Equation of a line through a given point and parallel to a given vector $\vec{b}$)*

মনে করো আয়তাকার স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে, মূলবিন্দু O-এর সাপেক্ষে একটি প্রদত্ত বিন্দু A-এর অবস্থান ভেক্টর (position vector) হলো $\vec{a}$। ধরা যাক, A বিন্দুগামী এবং প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{b}$ এর সমান্তরাল সরলরেখাটি হলো l। আবার ধরো, সরলরেখার ওপর অবস্থিত যে-কোনো একটি বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর হলো $\vec{r}$ (চিত্র 11.4)। তাহলে, ভেক্টর $\vec{b}$ এর সমান্তরাল ভেক্টর হলো $\overrightarrow{AP}$ অর্থাৎ, $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{b}$, যেখানে λ হলো কিছু বাস্তব সংখ্যা।



চিত্র 11.4

কিন্তু $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$

অর্থাৎ, $\lambda\vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$

বিপরীতক্রমে, প্রাচল (parameter) λ এর প্রতিটি মানের জন্য, এই সমীকরণটি ওই রেখার ওপর অবস্থিত একটি বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টরকে বোঝায়। সুতরাং, সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ হলো

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} \qquad \ldots (1)$$

মন্তব্য যদি $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ হয়, তবে রেখাটির দিক্-অনুপাতগুলো হলো a, b, c এবং বিপরীতক্রমে, যদি a, b, c কোনো একটি সরলরেখার দিক্-অনুপাত হয়, তবে $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ ওই রেখাটির সমান্তরাল হবে।এখানে b কে $|\vec{b}|$ এর সাথে গুলিয়ে ফেলবে না।

ভেক্টর রূপ থেকে কার্তেসীয় রূপের উৎপত্তি (Derivation of cartesian form from vector form)

ধরা যাক প্রদত্ত বিন্দু A এর স্থানাঙ্ক হলো (x_1, y_1, z_1) এবং সরলরেখাটির দিক্-অনুপাতগুলো হলো a, b, c। যে-কোনো একটি বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y, z) বিবেচনা করো। তাহলে

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\,;\; \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

এবং $$\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

(1)-এ এই মানগুলো প্রতিস্থাপন করে এবং $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ এর সহগগুলো তুলনা করে আমরা পাই,

$$x = x_1 + \lambda a;\quad y = y_1 + \lambda b;\quad z = z_1 + \lambda c \qquad \ldots (2)$$

এগুলো হলো সরলরেখাটির প্রাচলিক (parametric) সমীকরণ। (2) থেকে প্রাচল λ অপনয়ন করে আমরা পাই,

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \qquad \ldots (3)$$

এটি হলো সরলরেখাটির কার্তেসীয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য যদি কোনো সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো l, m, n হয়, তবে সরলরেখাটির সমীকরণ হবে

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

উদাহরণ 6 যে সরলরেখাটি $(5, 2, -4)$ বিন্দুগামী এবং ভেক্টর $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ এর সাথে সমান্তরাল, তার ভেক্টর এবং কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা জানি

$$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \text{ এবং } \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

সুতরাং, রেখাটির ভেক্টর সমীকরণ হলো

$$\vec{r} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

এখানে $\vec{r}$ হলো রেখার ওপর অবস্থিত যে-কোনো একটি বিন্দু $P(x, y, z)$-এর অবস্থান ভেক্টর।

সুতরাং,
$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$
$$= (5 + 3\lambda)\hat{i} + (2 + 2\lambda)\hat{j} + (-4 - 8\lambda)\hat{k}$$

λ অপনয়ন করে, আমরা পাই

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-8}$$

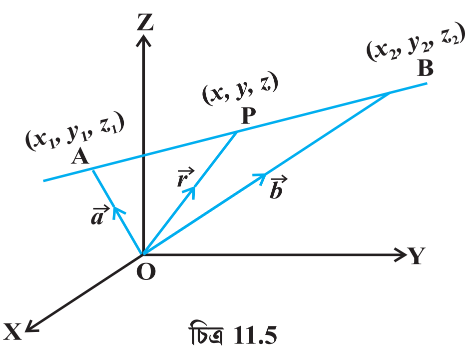
ইহা হলো কার্তেসীয় রূপে সরলরেখাটির সমীকরণ।

11.3.2 *দুটি প্রদত্ত বিন্দুগামী একটি সরলরেখার সমীকরণ (Equation of a line passing through two given points)*

ধরা যাক, একটি সরলরেখার ওপর অবস্থিত দুটি বিন্দু $A(x_1, y_1, z_1)$ এবং $B(x_2, y_2, z_2)$ এর অবস্থান ভেক্টর হলো যথাক্রমে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ (চিত্র 11.5)।

ধরা যাক, যে-কোনো একটি বিন্দু $P(x, y, z)$ এর অবস্থান ভেক্টর হল $\vec{r}$, তবে P বিন্দুটি ওই সরলরেখার উপর অবস্থিত হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ সমরেখ হয়। সুতরাং, P বিন্দুটি রেখাটির উপর অবস্থিত হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \text{ হয়।}$$



চিত্র 11.5

অথবা, $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}),\ \lambda \in \mathrm{R}.$ ... (1)

এটি হল সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ।

ভেক্টর রূপ থেকে কার্তেসীয় রূপের উৎপত্তি (Derivation of cartesian form from vector form)

আমরা জানি,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k},\ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} \text{ এবং } \vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k},$$

এই মানগুলো (1) নং সমীকরণে প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} + \lambda[(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}]$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ -এর সমজাতীয় সহগগুলো তুলনা করে পাই,

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1);\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1);\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$$

λ অপনয়ন করে আমরা পাই,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

যা হলো কার্তেসীয় রূপে সরলরেখাটির সমীকরণ।

উদাহরণ 7 (–1, 0, 2) এবং (3, 4, 6) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক A(– 1, 0, 2) এবং B(3, 4, 6) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর হল যথাক্রমে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ।

তাহলে $\vec{a} = -\hat{i} + 2\hat{k}$

এবং $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

সুতরাং, $\vec{b} - \vec{a} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$

মনে করো, সরলরেখাটির ওপর অবস্থিত যে-কোনো একটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হল $\vec{r}$ । তাহলে সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ হলো

$$\vec{r} = -\hat{i} + 2\hat{k} + \lambda(4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$$

উদাহরণ 8 একটি সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$$

হলে, উহার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণটিকে আদর্শ আকার

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

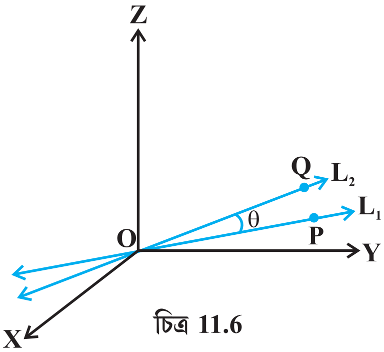
এর সঙ্গে তুলনা করে আমরা লক্ষ করি যে, $x_1 = -3, y_1 = 5, z_1 = -6; a = 2, b = 4, c = 2$ ।

সুতরাং, নির্ণেয় সরলরেখা (– 3, 5, – 6) বিন্দুগামী এবং ভেক্টর $2\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$ -এর সমান্তরাল। ধরা যাক, সরলরেখাটির ওপর যে-কোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হলো $\vec{r}$, তবে সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ হবে

$$\vec{r}=(-3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k})+\lambda\ (2\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})$$

11.4 দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ (Angle between Two Lines)

ধরা যাক, মূলবিন্দুগামী দুটি সরলরেখা হলো L_1 ও L_2 এবং এদের দিক্-অনুপাতগুলো হলো যথাক্রমে, a_1, b_1, c_1 এবং a_2, b_2, c_2। মনে করো L_1 ও L_2 এর ওপর অবস্থিত দুটি বিন্দু হলো যথাক্রমে P ও Q। দুটি নির্দেশিত রেখা OP ও OQ বিবেচনা করো, যা চিত্র 11.6-এ প্রদত্ত। ধরো OP এবং OQ এর মধ্যবর্তী সূক্ষ্ম কোণটি হলো θ। এখন পুনরায় মনে করে দেখো যে নির্দেশিত রেখাংশ OP ও OQ হলো যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 এবং a_2, b_2, c_2 উপাংশ বিশিষ্ট দুটি ভেক্টর। সুতরাং, তাদের মধ্যবর্তী কোণ θ নিম্নে প্রদত্ত



চিত্র 11.6

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right| \qquad \ldots (1)$$

sin θ এর আকারে সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণ নিম্নে প্রদত্ত

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\frac{(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2}{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2}}{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)}\sqrt{\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a_1\,b_2-a_2\,b_1)^2+(b_1\,c_2-b_2\,c_1)^2+(c_1\,a_2-c_2\,a_1)^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \qquad \ldots (2)$$

দ্রষ্টব্য যদি L_1 ও L_2 সরলরেখাদ্বয় মূলবিন্দুগামী না হয় সেক্ষেত্রে, আমরা L_1 ও L_2 এর সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় যথাক্রমে L'_1 ও L'_2 নিতে পারি যারা মূল বিন্দুগামী।

L_1 ও L_2 সরলরেখাদ্বয়ের দিক্-অনুপাতগুলোর পরিবর্তে যদি দিক্-কোসাইনগুলো, যথা L_1 এর জন্য l_1, m_1, n_1 এবং L_2 এর জন্য l_2, m_2, n_2 নেওয়া হয়, তবে (1) ও (2) কে নিম্নলিখিত রূপে লেখা যায় :

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2| \quad (\text{যেহেতু } l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) \quad \ldots (3)$$

এবং $$\sin\theta = \sqrt{(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2} \quad \ldots (4)$$

a_1, b_1, c_1 এবং a_2, b_2, c_2 দিক্-অনুপাতবিশিষ্ট দুটি সরলরেখা

(i) লম্ব হবে অর্থাৎ, যদি $\theta = 90°$ হয় তবে (1) হতে পাই

$$\boldsymbol{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0}$$

(ii) সমান্তরাল হবে অর্থাৎ, যদি $\theta = 0$ হয় তবে (2) হতে পাই,

$$\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

এখন, আমরা দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করব, যখন তাদের সমীকরণ দেওয়া থাকে। যদি

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1 \text{ ও } \vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$$

সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ θ হয়,

তবে $$\cos\theta = \left| \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|} \right|$$

কার্তেসীয় আকারে, যদি দুটি সরলরেখা

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \quad \ldots (1)$$

এবং $$\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2} \quad \ldots (2)$$

এর মধ্যবর্তী কোণ θ হয়, যেখানে a_1, b_1, c_1 এবং a_2, b_2, c_2 হলো যথাক্রমে (1) ও (2) সরলরেখা এর দিক্-অনুপাতসমূহ, তবে

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right|$$

উদাহরণ 9 নিম্নে প্রদত্ত সরলরেখা যুগল

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

এবং $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

সমাধান এখানে $\vec{b}_1 = \hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ এবং $\vec{b}_2 = 3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}$ সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1.\vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}).(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\ \sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

অতএব, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

উদাহরণ 10 $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$

এবং $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ সরলরেখা যুগলের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

সমাধান প্রথম সরলরেখার দিক্‌-অনুপাতসমূহ হলো 3, 5, 4 এবং দ্বিতীয় সরলরেখার দিক্‌-অনুপাতসমূহ হলো 1, 1, 2। যদি তাদের মধ্যবর্তী কোণ θ হয়, তবে

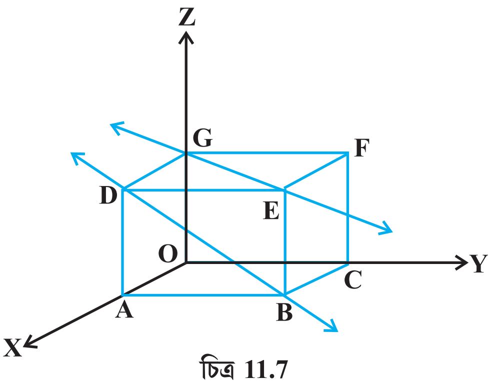
$$\cos\theta = \left|\frac{3.1+5.1+4.2}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\ \sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right| = \frac{16}{\sqrt{50}\ \sqrt{6}} = \frac{16}{5\sqrt{2}\ \sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

অতএব, নির্ণেয় কোণ হলো $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$।

11.5 দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব (Shortest Distance between Two Lines)

ত্রিমাত্রিক দেশে দুটি সরলরেখা যদি একটি বিন্দুতে ছেদ করে, তবে তাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব শূন্য হয়। এছাড়া, যদি দুটি সরলরেখা ওই দেশে সমান্তরাল হয়, তবে তাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হবে লম্ব-দূরত্ব, অর্থাৎ একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দু থেকে অপরটির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য।

অধিকন্তু, ত্রিমাত্রিক দেশে এমন কিছু সরলরেখা আছে যেগুলো পরস্পর ছেদি অথবা সমান্তরাল— এদের কোনোটিই নয়। প্রকৃতপক্ষে, এরূপ সরলরেখা যুগল *অসামতলিক (non coplanar)* হয় এবং এদেরকে *অসামতলিক সরলরেখা (skew lines)* বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ, চলো আমরা একটি কক্ষ (room) বিবেচনা করি যার x-অক্ষ, y-অক্ষ ও z-অক্ষ বরাবর ধারগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 3 ও 2 একক (চিত্র 11.7)।



চিত্র 11.7

সরলরেখা GE কোণাকোণিভাবে ঘরের ছাদ বরাবর যায় এবং DB রেখা A-এর ঠিক উপরে ছাদের একটি কোণা দিয়ে অতিক্রম করে এবং কোণাকোণিভাবে দেওয়ালের নীচের দিকে যায়। এই রেখাগুলো হলো অসামতলিক, কারণ এরা সমান্তরাল নয় এবং কখনও মিলিত হয় না।

দুটি সরলরেখার মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব বলতে আমরা বুঝি যে, একটি সরলরেখার ওপর অবস্থিত একটি বিন্দুর সঙ্গে অপর সরলরেখার ওপর অবস্থিত আরেকটি বিন্দুকে এমনভাবে যুক্ত করতে হবে যাতে প্রাপ্ত রেখাংশের দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতম হয়।

অসামতলিক সরলরেখার ক্ষেত্রে, ক্ষুদ্রতম দূরত্বের রেখাটি উভয় সরলরেখার উপর লম্ব হবে।

11.5.1 *দুটি অসামতলিক সরলরেখার মধ্যে দূরত্ব (Distance between two skew lines)*

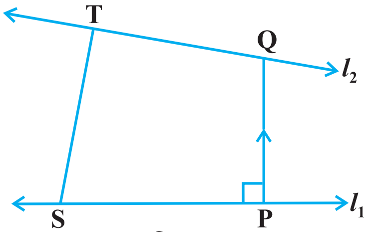
আমরা এখন দুটি অসামতলিক রেখার মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নিম্নরূপে নির্ণয় করবো :

ধরা যাক l_1 এবং l_2 হলো দুটি অসামতলিক রেখা (চিত্র 11.8) যাদের সমীকরণ যথাক্রমে

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\,\vec{b}_1 \qquad \dots (1)$$

এবং
$$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\,\vec{b}_2 \qquad \dots (2)$$

l_1 সরলরেখার ওপর যে-কোনো একটি বিন্দু S নেওয়া হল যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}_1$ এবং l_2 সরলরেখার ওপর অপর একটি বিন্দু T নেওয়া হল যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}_2$। তাহলে, ক্ষুদ্রতম দূরত্ব সমন্বিত ভেক্টরের মান হবে, ক্ষুদ্রতম দূরত্বের রেখার দিক বরাবর ST-এর লম্ব অভিক্ষেপের মানের সমান (অনুচ্ছেদ 10.6.2 দেখো)।



চিত্র 11.8

যদি l_1 এবং l_2-এর মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব ভেক্টর $\overrightarrow{PQ}$ হয়, তবে ইহা $\vec{b}_1$ ও $\vec{b}_2$ উভয়ের উপর লম্ব হওয়ার জন্য, $\overrightarrow{PQ}$ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{n}$ হবে।

$$\hat{n} = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \qquad \dots (3)$$

তাহলে
$$\overrightarrow{PQ} = d\,\hat{n}$$

যেখানে d হলো ক্ষুদ্রতম দূরত্ব ভেক্টরের মান। মনে করো, $\overrightarrow{ST}$ এবং $\overrightarrow{PQ}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ, তবে

$$PQ = ST\,|\cos\theta|$$

কিন্তু
$$\cos\theta = \left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{ST}|}\right|$$

$$= \left|\frac{d\,\breve{n}\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{d\ ST}\right| \qquad (\text{যেহেতু } \overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1)$$

$$= \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{ST\,|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \qquad [(3) \text{ নং হতে}]$$

সুতরাং, নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হলো

$$d = PQ = ST\,|\cos\theta|$$

বা,
$$d = \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\,.\,(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$$

কার্তেসীয় আকার (Cartesian form)

$$l_1 : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

এবং
$$l_2 : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

সরলরেখা দুটির মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হলো

$$\left|\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}\right|$$

11.5.2 সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে দূরত্ব *(Distance between parallel lines)*

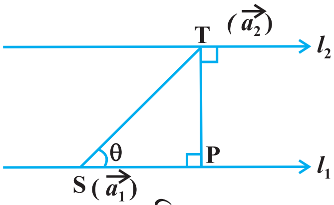
যদি দুটি সরলরেখা l_1 এবং l_2 সমান্তরাল হয়, তবে তারা সামতলিক হবে। ধরো, সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নিম্নরূপে প্রদত্ত :

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b} \qquad \ldots (1)$$

এবং
$$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b} \qquad \ldots (2)$$

যেখানে, $\vec{a}_1$ হলো l_1 রেখার ওপর অবস্থিত একটি বিন্দু S-এর অবস্থান ভেক্টর এবং $\vec{a}_2$ হলো l_2 রেখার ওপর অবস্থিত একটি বিন্দু T-এর অবস্থান ভেক্টর (চিত্র 11.9)।

যেহেতু l_1, l_2 সামতলিক তাই, যদি T বিন্দু থেকে l_1 সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু P হয়, তবে l_1 ও l_2 রেখা দুটির মধ্যে দূরত্ব $|TP|$।



চিত্র 11.9

মনে করো $\overrightarrow{ST}$ এবং $\vec{b}$ -এর মধ্যবর্তী কোণ হলো θ। তাহলে,

$$\vec{b} \times \overrightarrow{ST} = (|\vec{b}||\overrightarrow{ST}|\sin\theta)\hat{n} \qquad \ldots (3)$$

যেখানে $\hat{n}$ হলো একক ভেক্টর, যেটি l_1 ও l_2 সরলরেখার ধারক তলের উপর লম্ব।

কিন্তু
$$\overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

সুতরাং, (3) নং থেকে আমরা পাই,

$$\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = |\vec{b}|\, \text{PT}\, \hat{n} \qquad (\text{যেহেতু PT} = \text{ST} \sin\theta)$$

অর্থাৎ,
$$|\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)| = |\vec{b}|\, \text{PT} \cdot 1 \qquad (\text{যেহেতু } |\hat{n}| = 1)$$

সুতরাং, প্রদত্ত সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব হলো

$$\boldsymbol{d} = |\overrightarrow{\mathbf{PT}}| = \left| \frac{\vec{\boldsymbol{b}} \times (\vec{\boldsymbol{a}}_2 - \vec{\boldsymbol{a}}_1)}{|\vec{\boldsymbol{b}}|} \right|$$

উদাহরণ 11 l_1 এবং l_2 সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় করো, যাদের ভেক্টর সমীকরণ হলো

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \qquad \ldots (1)$$

এবং
$$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) \qquad \ldots (2)$$

সমাধান (1) এবং (2) কে যথাক্রমে $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ এবং $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ এর সঙ্গে তুলনা করে

আমরা পাই,
$$\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{j}, \quad \vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ এবং } \vec{b}_2 = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

সুতরাং,
$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{k}$$

এবং
$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

সুতরাং
$$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9 + 1 + 49} = \sqrt{59}$$

অতএব, প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হলো

$$d = \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right| = \frac{|3 - 0 + 7|}{\sqrt{59}} = \frac{10}{\sqrt{59}} \text{ একক।}$$

উদাহরণ 12 l_1 এবং l_2 সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় করো, যাদের ভেক্টর সমীকরণ নিম্নে প্রদত্ত:

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

এবং
$$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

সমাধান প্রদত্ত সরলরেখা দুটি সমান্তরাল (কেন ?)। এখানে

$$\vec{a}_1 = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}\,,\ \vec{a}_2 = 3\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k} \text{ এবং } \vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$$

অতএব, সরলরেখা দুটির মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নিম্নে প্রদত্ত :

$$d = \left|\frac{\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right| = \left|\frac{\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 6\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}}{\sqrt{4+9+36}}\right|$$

বা, $$= \frac{|-9\hat{i}+14\hat{j}-4\hat{k}|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7} \text{ একক।}$$

অনুশীলনী 11.2

1. দেখাও যে,

$\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$; $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$; $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ দিক্-কোসাইন বিশিষ্ট সরলরেখা তিনটি পরস্পর লম্ব।

2. দেখাও যে, (1, – 1, 2) ও (3, 4, – 2) বিন্দুগামী সরলরেখাটি (0, 3, 2) ও (3, 5, 6) বিন্দুগামী সরলরেখার উপর লম্ব।

3. দেখাও যে, (4, 7, 8) ও (2, 3, 4) বিন্দুগামী সরলরেখাটি (– 1, – 2, 1) ও (1, 2, 5) বিন্দুগামী সরলরেখার সমান্তরাল।

4. (1, 2, 3) বিন্দুগামী এবং $3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরের সঙ্গে সমান্তরাল সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

5. যে বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ সেই বিন্দুগামী এবং $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টরের অভিমুখে সরলরেখাটির ভেক্টর ও কার্তেসীয় আকারে সমীকরণ নির্ণয় করো।

6. যে সরলরেখা (– 2, 4, – 5) বিন্দুগামী এবং $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ সরলরেখার সমান্তরাল সেই সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় করো।

7. কোনো একটি সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ হলো $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$। ইহার ভেক্টর সমীকরণটি লেখো।

8. মূলবিন্দু ও (5, – 2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর ও কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় করো।

9. (3, – 2, – 5) ও (3, – 2, 6) বিন্দুগামী সরলরেখাটির ভেক্টর ও কার্তেসীয় আকারে সমীকরণ নির্ণয় করো।

10. নিম্নলিখিত সরলরেখা যুগলের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো :

(i) $\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ এবং

$\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

(ii) $\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$ এবং

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$

11. নিম্নলিখিত সরলরেখা যুগলের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো :

(i) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ এবং $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$

(ii) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ এবং $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$

12. $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ এবং $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ সরলরেখা দুটি সমকোণে নত থাকলে, p এর মানগুলো নির্ণয় করো।

13. দেখাও যে $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ এবং $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

14. $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ এবং $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ সরলরেখা দুটির মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় করো।

15. $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ এবং $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ সরলরেখা দুটির মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় করো।

16. দুটি সরলরেখার মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় করো যাদের ভেক্টর সমীকরণ হলো

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

এবং $\vec{r} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

17. দুটি সরলরেখার মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় করো যাদের ভেক্টর সমীকরণ হলো

$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$ এবং

$\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$

11.6 সমতল (Plane)

একটি সমতলকে অনন্যরূপে (uniquely) নির্ণয় করা যায় যদি নিম্নলিখিতগুলোর মধ্যে যে-কোনো একটি জানা থাকে :

(i) সমতলটির অভিলম্ব এবং মূলবিন্দু থেকে ইহার দূরত্ব দেওয়া থাকলে, অর্থাৎ, সমতলের অভিলম্ব আকারে সমীকরণ।

(ii) ইহা একটি বিন্দুগামী এবং একটি প্রদত্ত অভিমুখের সঙ্গো লম্ব।

(iii) ইহা তিনটি প্রদত্ত অসমরেখ বিন্দুগামী।

এখন আমরা সমতলের ভেক্টর এবং কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় করবো।

11.6.1 *অভিলম্ব আকারে কোনো সমতলের সমীকরণ (Equation of a plane in normal form)*

একটি সমতল বিবেচনা করো যার মূলবিন্দু থেকে লম্ব দূরত্ব হলো d ($d \neq 0$) (চিত্র 11.10)।

যদি মূলবিন্দু থেকে সমতলের উপর অভিলম্ব $\overrightarrow{ON}$ এবং $\overrightarrow{ON}$ বরাবর একক অভিলম্ব ভেক্টর $\hat{n}$ হয়, তবে $\overrightarrow{ON} = d\,\hat{n}$। মনে করো সমতলের ওপর অবস্থিত যে-কোনো একটি বিন্দু হলো P। সুতরাং, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{ON}$ এর উপর লম্ব।

সুতরাং, $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$ ... (1)

ধরা যাক P বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর হলো $\vec{r}$, তাহলে

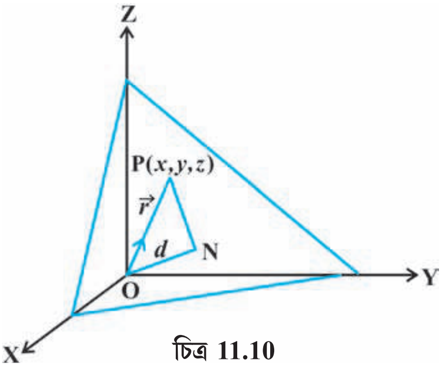
$\overrightarrow{NP} = \vec{r} - d\,\hat{n}$ (যেহেতু $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP}$)

সুতরাং (1) নং থেকে পাই,

$$(\vec{r} - d\,\hat{n}) \cdot d\,\hat{n} = 0$$

বা, $$(\vec{r} - d\,\hat{n}) \cdot \hat{n} = 0 \qquad (d \neq 0)$$

বা, $$\vec{r} \cdot \hat{n} - d\,\hat{n} \cdot \hat{n} = 0$$



চিত্র 11.10

অর্থাৎ, $$\boldsymbol{\vec{r} \cdot \hat{n} = d} \quad (\text{যেহেতু } \hat{n} \cdot \hat{n} = 1) \qquad \ldots(2)$$

এটি হলো সমতলটির ভেক্টর আকারে সমীকরণ।

কার্তেসীয় আকার

(2) নং সমীকরণটি একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণকে প্রকাশ করে, যেখানে সমতলটির অভিলম্বের একক ভেক্টরটি হলো $\hat{n}$। ধরা যাক সমতলটির ওপর অবস্থিত যে-কোনো একটি বিন্দু হলো $P(x, y, z)$। তাহলে,

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

মনে করো $\hat{n}$ এর দিক্-কোসাইনগুলো হলো l, m, n। তাহলে,

$$\hat{n} = l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}$$

সুতরাং, (2) নং থেকে পাওয়া যায়

$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(l\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k})=d$$

অর্থাৎ, $$\boldsymbol{lx+my+nz=d} \quad \ldots (3)$$

এটি হলো অভিলম্ব আকারে সমতলটির কার্তেসীয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য (3) নং সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে, যদি একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ $\vec{r}\cdot(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})=d$ হয়, তবে সমতলটির কার্তেসীয় সমীকরণ হবে $ax+by+cz=d$, যেখানে a, b ও c হলো সমতলটির অভিলম্বের দিক্-অনুপাতসমূহ।

উদাহরণ 13 যে সমতলটির মূলবিন্দু থেকে দূরত্ব $\frac{6}{\sqrt{29}}$ একক এবং মূলবিন্দু থেকে ইহার অভিলম্ব ভেক্টর $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ হয়, তবে উহার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো। এছাড়া ইহার সমীকরণ কার্তেসীয় আকারে নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক, $\vec{n}=2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ তাহলে

$$\hat{n}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}}{\sqrt{4+9+16}}=\frac{2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}}{\sqrt{29}}$$

সুতরাং, সমতলটির নির্ণেয় সমীকরণ হলো

$$\vec{r}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\hat{i}+\frac{-3}{\sqrt{29}}\hat{j}+\frac{4}{\sqrt{29}}\hat{k}\right)=\frac{6}{\sqrt{29}}$$

উদাহরণ 14 মূলবিন্দুগামী একটি একক ভেক্টর যেটি $\vec{r}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})+1=0$ সমতলের উপর লম্ব, তার দিক্-কোসাইনগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\vec{r}\cdot(-6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})=1 \quad \ldots (1)$$

এখন $$|-6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}|=\sqrt{36+9+4}=7$$

সুতরাং, (1) নং সমীকরণের উভয়পক্ষে 7 দিয়ে ভাগ করে আমরা পাই,

$$\vec{r}\cdot\left(-\frac{6}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}+\frac{2}{7}\hat{k}\right)=\frac{1}{7}$$

যা হলো $\vec{r}\cdot\hat{n}=d$ আকারে সমতলটির সমীকরণ।

এটি দেখায় যে মূলবিন্দুগামী একটি একক ভেক্টর যেটি সমতলের উপর লম্ব তা হলো $\hat{n}=-\frac{6}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}+\frac{2}{7}\hat{k}$। সুতরাং, $\hat{n}$ এর দিক্-কোসাইনগুলো হল $\frac{-6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$।

উদাহরণ 15 মূলবিন্দু থেকে $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ সমতলটির দূরত্ব নির্ণয় করো।

সমাধান যেহেতু সমতলটির উপর অভিলম্বের দিক্-অনুপাতগুলো হলো, 2, –3, 4 তাই, ইহার দিক্-কোসাইনগুলো হলো নিম্নরূপ

$$\frac{2}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}, \frac{-3}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}, \frac{4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}} \text{, অর্থাৎ, } \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$$

সুতরাং, $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ অর্থাৎ $2x - 3y + 4z = 6$ সমীকরণটির সর্বত্র $\sqrt{29}$ দিয়ে ভাগ করে, আমরা পাই

$$\frac{2}{\sqrt{29}} x + \frac{-3}{\sqrt{29}} y + \frac{4}{\sqrt{29}} z = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

এটি $lx + my + nz = d$ আকারের হয়, যেখানে মূলবিন্দু থেকে সমতলটির দূরত্ব হলো d। সুতরাং, মূলবিন্দু থেকে সমতলটির দূরত্ব হলো $\frac{6}{\sqrt{29}}$ একক।

উদাহরণ 16 মূলবিন্দু থেকে $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

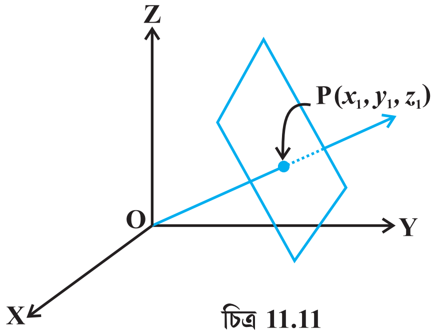
সমাধান ধরা যাক মূলবিন্দু থেকে সমতলটির উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু P এর স্থানাঙ্ক হলো (x_1, y_1, z_1) (চিত্র 11.11)।

তাহলে, OP সরলরেখার দিক্-অনুপাতগুলো হবে x_1, y_1, z_1।

সমতলটির সমীকরণ অভিলম্ব আকারে প্রকাশ করে আমরা পাই,

$$\frac{2}{\sqrt{29}} x - \frac{3}{\sqrt{29}} y + \frac{4}{\sqrt{29}} z = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

যেখানে, $\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$ হলো OP-এর দিক্-কোসাইন।



চিত্র 11.11

যেহেতু একটি রেখার দিক্-কোসাইন ও দিক্-অনুপাতগুলো সমানুপাতিক তাই আমরা পাই,

$$\frac{x_1}{\frac{2}{\sqrt{29}}} = \frac{y_1}{\frac{-3}{\sqrt{29}}} = \frac{z_1}{\frac{4}{\sqrt{29}}} = k$$

অর্থাৎ,
$$x_1 = \frac{2k}{\sqrt{29}}, y_1 = \frac{-3k}{\sqrt{29}}, z_1 = \frac{4k}{\sqrt{29}}$$

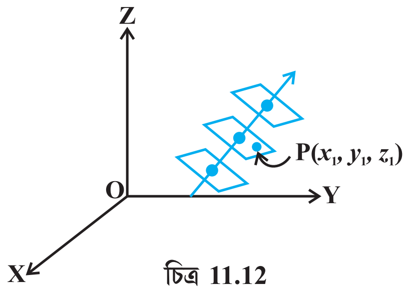
এই মানগুলো সমতলটির সমীকরণে বসিয়ে, আমরা পাই $k = \dfrac{6}{\sqrt{29}}$ ।

সুতরাং, লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হলো $\left(\dfrac{12}{29}, \dfrac{-18}{29}, \dfrac{24}{29}\right)$

> **দ্রষ্টব্য** যদি মূলবিন্দু থেকে দূরত্ব d এবং মূলবিন্দুগামী সমতলের উপর অভিলম্বের দিক্-কোসাইনগুলো l, m, n হয় তবে, লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হলো (ld, md, nd)।

11.6.2 একটি প্রদত্ত ভেক্টরের উপর লম্ব এবং একটি প্রদত্ত বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ (Equation of a plane perpendicular to a given vector and passing through a given point)

ত্রিমাত্রিক দেশে, একটি প্রদত্ত ভেক্টরের উপর লম্ব এমন অনেকগুলো সমতল থাকতে পারে, কিন্তু একটি প্রদত্ত বিন্দু $P(x_1, y_1, z_1)$ গামী, কেবলমাত্র একটি এমন সমতলের অস্তিত্ব আছে (চিত্র 11.12 দেখো)।

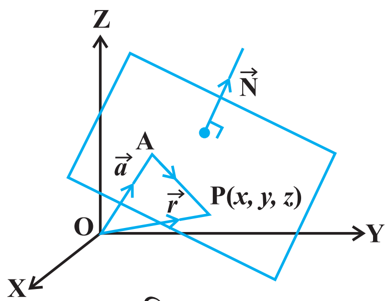


চিত্র 11.12

ধরা যাক, একটি সমতল A বিন্দুগামী যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ এবং ইহা ভেক্টর $\vec{N}$ এর উপর লম্ব। মনে করো এই সমতলে যে-কোনো বিন্দু $P(x, y, z)$ এর অবস্থান ভেক্টর হলো $\vec{r}$ (চিত্র 11.13)।

তাহলে, P বিন্দুটি সমতলে অবস্থিত হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\overrightarrow{AP}$, $\vec{N}$ এর উপর লম্ব হয়, অর্থাৎ $\overrightarrow{AP} . \vec{N} = 0$। কিন্তু $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ ।সুতরাং $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{N} = 0$

এটি হলো সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ।



চিত্র 11.13

কার্তেসীয় আকার

ধরা যাক প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় হলো A (x_1, y_1, z_1) ও P (x, y, z) এবং $\vec{N}$ এর দিক্-অনুপাতগুলো হলো A, B ও C। তাহলে,

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k},\quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \text{ এবং } \vec{N} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$$

এখন $\qquad (\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{N} = 0$

সুতরাং, $\qquad \left[(x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}\right] \cdot (A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) = 0$

অর্থাৎ, $\quad \mathbf{A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0}$

উদাহরণ 17 যে সমতলটি (5, 2, – 4) বিন্দুগামী এবং দিক্-অনুপাত 2, 3, – 1 বিশিষ্ট একটি সরলরেখার উপর লম্ব, সেটির ভেক্টর ও কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা (5, 2, – 4) বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টরকে $\vec{a}=5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$ এবং সমতলের উপর লম্ব অভিলম্ব ভেক্টর $\vec{N}$ কে $\vec{N}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ হিসেবে লিখতে পারি।

সুতরাং, সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ হলো $(\vec{r}-\vec{a}).\vec{N}=0$

বা, $$[\vec{r}-(5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})]\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=0 \quad \ldots (1)$$

(1) নং সমীকরণকে কার্তেসীয় আকারে রূপান্তর করে, আমরা পাই

$$[(x-5)\hat{i}+(y-2)\hat{j}+(z+4)\hat{k}]\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=0$$

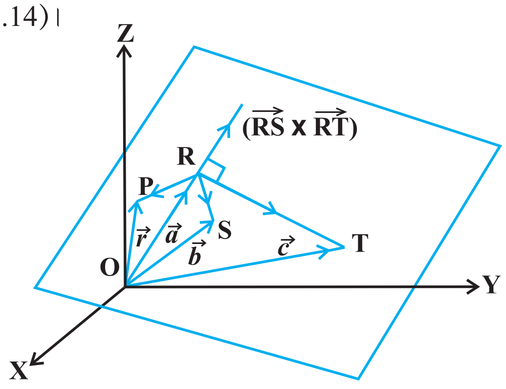
বা, $$2(x-5)+3(y-2)-1(z+4)=0$$

অর্থাৎ, $$2x+3y-z=20$$

এটি হলো সমতলটির কার্তেসীয় সমীকরণ।

11.6.3 *তিনটি অসমরেখ বিন্দুগামী কোনো সমতলের সমীকরণ (Equation of a plane passing through three non collinear points)*

ধরা যাক কোনো সমতলের ওপর অবস্থিত তিনটি অসমরেখ বিন্দু হলো R, S ও T যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}$ ও $\vec{c}$ (চিত্র 11.14)।



চিত্র 11.14

$\vec{RS}$ ও $\vec{RT}$ ভেক্টর দুটি প্রদত্ত সমতলে অবস্থিত। সুতরাং $\vec{RS}\times\vec{RT}$ ভেক্টরটি R, S ও T বিন্দুসমূহ ধারণকারী সমতলটির উপর লম্ব। মনে করো সমতলে অবস্থিত যে-কোনো বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$।

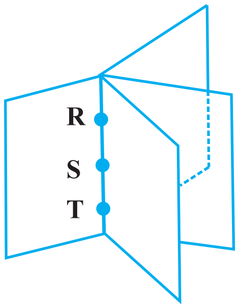
সুতরাং, R বিন্দুগামী এবং $\vec{RS}\times\vec{RT}$ ভেক্টরের উপর লম্ব সমতলটির সমীকরণ হলো

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{RS}\times\vec{RT}) = 0$$

বা, $$\mathbf{(\vec{r}-\vec{a}).[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})] = 0} \quad \ldots (1)$$

এটি হলো ভেক্টর আকারে তিনটি অসমরেখ বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য কেন ইহা প্রয়োজনীয় যে তিনটি বিন্দু অসমরেখ হতে হবে? যদি একই সরলরেখার ওপর তিনটি বিন্দু অবস্থিত হয়, তবে বিন্দুগুলোকে ধারণকারী এরকম অসংখ্য সমতল থাকবে। (চিত্র 11.15)।



চিত্র 11.15

এই সমতলগুলোকে একটি বইয়ের পৃষ্ঠাসমূহের অনুরূপ নেওয়া যায় যেখানে R, S ও T বিন্দুসমূহ ধারণকারী সরলরেখাটি বইটির বাঁধাই (binding)-এ অবস্থিত।

কার্তেসীয় আকার

ধরা যাক, R, S ও T বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক হলো যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ও (x_3, y_3, z_3)। ধরো সমতলে অবস্থিত যে, কোনো বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক হলো (x, y, z), যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ । তাহলে,

$$\overrightarrow{RP} = (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}$$
$$\overrightarrow{RS} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$
$$\overrightarrow{RT} = (x_3 - x_1)\hat{i} + (y_3 - y_1)\hat{j} + (z_3 - z_1)\hat{k}$$

এই মানগুলোকে ভেক্টর আকারের সমীকরণ (1)-এ প্রতিস্থাপন করে ও ইহাকে একটি নির্ণায়ক (determinant) রূপে প্রকাশ করে, আমরা পাই,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ইহা হলো তিনটি অসমরেখ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ও (x_3, y_3, z_3) বিন্দুগামী সমতলের কার্তেসীয় আকারের সমীকরণ।

উদাহরণ 18 R(2, 5, – 3), S(– 2, – 3, 5) ও T(5, 3,– 3) বিন্দুগামী সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{c} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$

তাহলে $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ ভেক্টরগামী সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ নিম্নে প্রদত্ত,

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}) = 0 \quad \text{(কেন?)}$$

বা, $$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0$$

অর্থাৎ, $$[\vec{r} - (2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})] \cdot [(-4\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j})] = 0$$

11.6.4 *কোনো সমতলের সমীকরণের ছেদিতাংশ আকার (Intercept form of the equation of a plane)*

এই অনুচ্ছেদে, আমরা কোনো সমতলের দ্বারা স্থানাঙ্ক অক্ষগুলোর উপর উৎপন্ন ছেদিতাংশের আকারে সমতলটির সমীকরণ নিরূপণ করবো। ধরা যাক, সমতলটির সমীকরণ হলো

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0 \quad (\mathrm{D} \neq 0) \qquad \ldots (1)$$

মনে করো, সমতলটি x অক্ষ, y অক্ষ ও z অক্ষের উপর যথাক্রমে a, b ও c ছেদিতাংশ উৎপন্ন করে (চিত্র 11.16)।

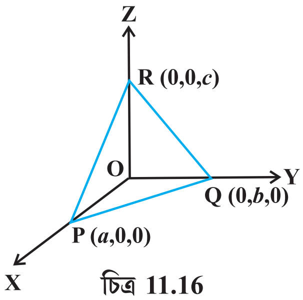
সুতরাং সমতলটি x অক্ষ, y অক্ষ ও z অক্ষের সঙ্গে যথাক্রমে (a, 0, 0), $(0, b, 0)$ ও $(0, 0, c)$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

অতএব,

$$\mathrm{A}a + \mathrm{D} = 0 \text{ অথবা } \mathrm{A} = \frac{-\mathrm{D}}{a}$$

$$\mathrm{B}b + \mathrm{D} = 0 \text{ অথবা } \mathrm{B} = \frac{-\mathrm{D}}{b}$$

$$\mathrm{C}c + \mathrm{D} = 0 \text{ অথবা } \mathrm{C} = \frac{-\mathrm{D}}{c}$$



চিত্র 11.16

এই মানগুলো সমতলের (1) নং সমীকরণে প্রতিস্থাপন এবং সরলীকৃত করে আমরা পাই,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \ldots (1)$$

যা হলো সমতলটির ছেদিতাংশ আকারে নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ 19 x, y ও z-অক্ষের উপর যথাক্রমে 2, 3 ও 4 ছেদিতাংশ বিশিষ্ট সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক, সমতলটির সমীকরণ হলো

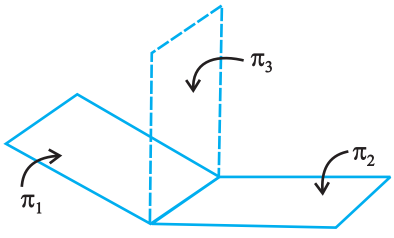
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \ldots (1)$$

এখানে, $a = 2, b = 3, c = 4.$

a, b ও c এর এই মানগুলো (1) নং সমীকরণে প্রতিস্থাপন করে, আমরা সমতলটির নির্ণেয় সমীকরণ পাই $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ অথবা $6x + 4y + 3z = 12$।

11.6.5 *দুটি প্রদত্ত সমতলের ছেদক-সরলরেখাগামী সমতলের সমীকরণ (Plane passing through the intersection of two given planes)*

ধরা যাক, দুটি সমতল π_1 এবং π_2 এর সমীকরণ হলো যথাক্রমে $\vec{r} \cdot \hat{n}_1 = d_1$ এবং $\vec{r} \cdot \hat{n}_2 = d_2$। ছেদিত সরলরেখার ওপর অবস্থিত যে-কোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর উভয় সমীকরণকে অবশ্যই সিদ্ধ করবে (চিত্র 11.17)।



চিত্র 11.17

যদি ওই সরলরেখার ওপর অবস্থিত একটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{t}$ হয়, তবে $\vec{t}\cdot\hat{n}_1 = d_1$ এবং $\vec{t}\cdot\hat{n}_2 = d_2$

সুতরাং, λ-এর সকল বাস্তব মানের জন্য আমরা পাই,

$$\vec{t}\cdot(\hat{n}_1 + \lambda\hat{n}_2) = d_1 + \lambda d_2$$

যেহেতু, $\vec{t}$ হলো যে-কোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, সুতরাং সমীকরণটি সরলরেখাটির ওপর যে-কোনো বিন্দুর জন্য সিদ্ধ হয়।

অতএব, $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1 + \lambda\vec{n}_2) = d_1 + \lambda d_2$ সমীকরণটি π_3 সমতলকে প্রকাশ করে, যা এরকম যে, যদি $\vec{r}$ ভেক্টর π_1 এবং π_2 এর উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তবে ইহা π_3এর সমীকরণকেও সিদ্ধ করে, অর্থাৎ $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ এবং $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ সমতলদ্বয়ের ছেদক সরলরেখাগামী যে-কোনো সমতলের সমীকরণ হলো $\boldsymbol{\vec{r}\cdot(\vec{n}_1 + \lambda\vec{n}_2) = d_1 + \lambda d_2}$ ... (1)

কার্তেসীয় আকার

কার্তেসীয় পদ্ধতিতে, ধরা যাক

$$\vec{n}_1 = A_1\hat{i} + B_1\hat{j} + C_1\hat{k}$$

$$\vec{n}_2 = A_2\hat{i} + B_2\hat{j} + C_2\hat{k}$$

এবং $$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

তাহলে (1) নং থেকে পাই,

$$x(A_1 + \lambda A_2) + y(B_1 + \lambda B_2) + z(C_1 + \lambda C_2) = d_1 + \lambda d_2$$

বা, $$\mathbf{(A_1x + B_1y + C_1z - d_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z - d_2) = 0} \quad \text{... (2)}$$

যা হল λ-এর প্রতিটি মানের জন্য প্রদত্ত সমতলদ্বয়ের ছেদক সরলরেখাগামী কোনো সমতলের কার্তেসীয় আকারে নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ 20 $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 6$ এবং $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}) = -5$ সমতলদ্বয়ের ছেদক সরলরেখাগামী এবং (1, 1, 1) বিন্দুগামী সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান এখানে, $\vec{n}_1 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ও $\vec{n}_2 = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

এবং $d_1 = 6$ ও $d_2 = -5$।

সুতরাং, $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1 + \lambda\vec{n}_2) = d_1 + \lambda d_2$, সম্পর্কটি ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$\vec{r}\cdot[\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})] = 6-5\lambda$$

বা, $$\vec{r}\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)\hat{k}] = 6-5\lambda \quad \text{... (1)}$$

যেখানে, λ হলো কোনো বাস্তব সংখ্যা।

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ নিয়ে আমরা পাই,

$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)\hat{k}]=6-5\lambda$$

বা, $(1+2\lambda)x+(1+3\lambda)y+(1+4\lambda)z=6-5\lambda$

বা, $(x+y+z-6)+\lambda\ (2x+3y+4z+5)=0$ ... (2)

দেওয়া আছে যে, সমতলটি (1,1,1) বিন্দুগামী, তাহলে ইহা (2) নং সমীকরণকে অবশ্যই সিদ্ধ করবে, অর্থাৎ,

$$(1+1+1-6)+\lambda\,(2+3+4+5)=0$$

বা, $\lambda=\dfrac{3}{14}$

(1) নং সমীকরণ λ-এর মান বসিয়ে আমরা পাই,

$$\vec{r}.\left[\left(1+\frac{3}{7}\right)\hat{i}+\left(1+\frac{9}{14}\right)\hat{j}+\left(1+\frac{6}{7}\right)\hat{k}\right]=6-\frac{15}{14}$$

বা, $\vec{r}.\left(\dfrac{10}{7}\hat{i}+\dfrac{23}{14}\hat{j}+\dfrac{13}{7}\hat{k}\right)=\dfrac{69}{14}$

বা, $\vec{r}\cdot(20\hat{i}+23\hat{j}+26\hat{k})=69$

যা হলো সমতলটির নির্ণেয় ভেক্টর সমীকরণ।

11.7 দুটি সরলরেখার সমতলীয় হওয়ার শর্ত (Coplanarity of Two Lines)

ধরা যাক প্রদত্ত সরলরেখাগুলো হলো

$\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ ... (1)

এবং $\vec{r}=\vec{a}_2+\mu\vec{b}_2$ ... (2)

(1) নং সরলরেখাটি যে বিন্দুগামী সেটি হলো A (ধরো),যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}_1$ এবং ইহা $\vec{b}_1$ এর সমান্তরাল। অনুরূপে, (2) নং সরলরেখাটি যে বিন্দুগামী সেটি হলো B (ধরো), যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}_2$ এবং ইহা $\vec{b}_2$ এর সমান্তরাল।

সুতরাং, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}_2-\vec{a}_1$

প্রদত্ত রেখাদ্বয় সমতলীয় হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\vec{b}_1\times\vec{b}_2$ এর উপর $\overrightarrow{AB}$ লম্ব হয়।

অর্থাৎ, $\overrightarrow{AB}.(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)=0$ বা $(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)=0$

কার্তেসীয় আকার

ধরা যাক A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2)।

ধরো $\vec{b}_1$ ও $\vec{b}_2$ এর দিক্-অনুপাতগুলো হলো যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 ও a_2, b_2, c_2। তাহলে

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\vec{b}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k} \text{ এবং } \vec{b}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$$

প্রদত্ত রেখাগুলো সমতলীয় হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$ হয়। কার্তেসীয় আকারে, ইহাকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা হয়

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots (4)$$

উদাহরণ 21 দেখাও যে

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5} \text{ ও } \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$$ সরলরেখা দুটি সমতলীয়।

সমাধান এখানে, $x_1 = -3, y_1 = 1, z_1 = 5, a_1 = -3, b_1 = 1, c_1 = 5$

এবং $x_2 = -1, y_2 = 2, z_2 = 5, a_2 = -1, b_2 = 2, c_2 = 5$

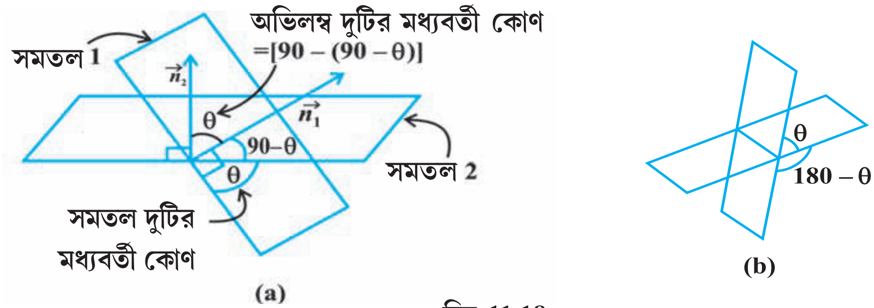
এখন, নিম্নের নির্ণায়কটি বিবেচনা করি

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

সুতরাং, সরলরেখা দুটি সমতলীয়।

11.8 দুটি সমতলের মধ্যবর্তী কোণ (Angle between Two Planes)

সংজ্ঞা 2 দুটি সমতলের মধ্যবর্তী কোণ বলতে তাদের অভিলম্বের অন্তর্ভুক্ত কোণকে বোঝায় (চিত্র 11.18 (a))। লক্ষ করো যে, যদি দুটি সমতলের মধ্যবর্তী একটি কোণ θ হয় তবে অপরটি হবে 180 – θ (চিত্র 11.18 (b))। আমরা দুটি সমতলের মধ্যবর্তী কোণ হিসেবে সূক্ষ্মকোণটিকে নেবো।



চিত্র 11.18

যদি $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ এবং $\vec{r}\,.\,\vec{n}_2 = d_2$ সমতল দুটির অভিলম্ব $\vec{n}_1$ ও $\vec{n}_2$ এবং মধ্যবর্তী কোণ θ হয়, তবে সমতল দুটির কোনো সাধারণ বিন্দু থেকে সমতল দুটিতে অঙ্কিত অভিলম্ব দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ হবে।

অতএব, $$\cos\theta = \left|\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\ |\vec{n}_1|}\right|$$

দ্রষ্টব্য সমতল দুটি পরস্পর লম্ব হবে যদি $\vec{n}_1\,.\,\vec{n}_2 = 0$ হয় এবং সমান্তরাল হবে যদি $\vec{n}_1$ ও $\vec{n}_2$ সমান্তরাল হয়।

কার্তেসীয় আকার ধরা যাক, $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ ও $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ সমতল দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ। সমতল দুটির অভিলম্বের দিক্-অনুপাত সমূহ যথাক্রমে A_1, B_1, C_1 এবং A_2, B_2, C_2।

সুতরাং, $$\cos\theta = \left|\frac{\mathbf{A_1\,A_2 + B_1\,B_2 + C_1\,C_2}}{\sqrt{\mathbf{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}\ \sqrt{\mathbf{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}\right|$$

দ্রষ্টব্য

1. যদি সমতল দুটি সমকোণে নত হয়, তবে $\theta = 90^\circ$ এবং তাই $\cos\theta = 0$।
   সুতরাং, $\text{Cos}\theta = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$।
2. যদি সমতল দুটি সমান্তরাল হয়, তবে $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$।

উদাহরণ 22 ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে $2x + y - 2z = 5$ ও $3x - 6y - 2z = 7$ সমতল দুটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

সমাধান দুটি সমতলের মধ্যবর্তী কোণ বলতে বোঝায় তাদের অভিলম্বের মধ্যবর্তী কোণ। সমতলগুলোর সমীকরণ থেকে, অভিলম্ব ভেক্টরগুলো হলো

$$\vec{N}_1 = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \quad \text{এবং} \quad \vec{N}_2 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

সুতরাং, $$\cos\theta = \left|\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|}\right| = \left|\frac{(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})\cdot(3\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k})}{\sqrt{4+1+4}\ \sqrt{9+36+4}}\right| = \left(\frac{4}{21}\right)$$

অতএব, $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$$

উদাহরণ 23 $3x - 6y + 2z = 7$ এবং $2x + 2y - 2z = 5$ সমতল দুটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত সমতল দুটির সমীকরণের সাথে $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ এবং সমীকরণ $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ সমীকরণ দুটি তুলনা করে আমরা পাই,

$$A_1 = 3, B_1 = -6, C_1 = 2$$
$$A_2 = 2, B_2 = 2, C_2 = -2$$

$$\cos\theta = \left|\frac{3\times 2 + (-6)\ (2)\ + (2)\,(-2)}{\sqrt{\left(3^2 + (-6)^2 + (-2)^2\right)}\ \sqrt{\left(2^2 + 2^2 + (-2)^2\right)}}\right|$$

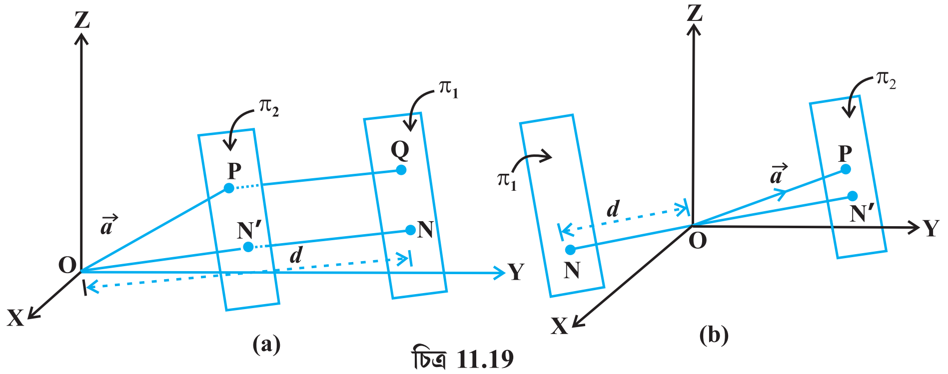
$$= \left|\frac{-10}{7\times 2\sqrt{3}}\right| = \frac{5}{7\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{21}$$

অতএব, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{21}\right)$

11.9 কোনো সমতল থেকে একটি বিন্দুর দূরত্ব (Distance of a Point from a Plane)

ভেক্টর আকার (Vector form)

অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ বিশিষ্ট একটি বিন্দু P এবং $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ সমীকরণ বিশিষ্ট একটি সমতল π_1 বিবেচনা করো (চিত্র 11.19)।



চিত্র 11.19

π_1 সমতলের সমান্তরাল এবং P বিন্দুগামী একটি সমতল π_2 বিবেচনা করো। π_2 এর অভিলম্বের একক ভেক্টর হলো $\hat{n}$। সুতরাং, ইহার সমীকরণ হলো $(\vec{r} - \vec{a})\cdot\hat{n} = 0$

অর্থাৎ,
$$\vec{r}\cdot\hat{n} = \vec{a}\cdot\hat{n}$$

সুতরাং, মূলবিন্দু থেকে এই সমতলটির দূবত্ব ON′ হলো $|\vec{a}\cdot\hat{n}|$। সুতরাং, π_1 সমতল থেকে দূরত্ব PQ হলো (চিত্র 11.21 (a))

অর্থ্যাৎ,
$$ON - ON' = |d - \vec{a}\cdot\hat{n}|$$

যা হলো কোনো বিন্দু থেকে কোনো প্রদত্ত সমতলের উপর লম্বের দৈর্ঘ্য।
চিত্র 11.19 (b) এর জন্য আমরা অনুরূপ ফলাফল প্রতিষ্ঠা করতে পারি।

দ্রষ্টব্য

1. যদি π_2 সমতলের সমীকরণের আকার $\vec{r}\cdot\vec{N}=d$ হয়, যেখানে সমতলটির অভিলম্ব $\vec{N}$, তবে লম্ব দূরত্ব হবে $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{N}-d|}{|\vec{N}|}$।

2. মূলবিন্দু O থেকে $\vec{r}\cdot\vec{N}=d$ সমতলের উপর লম্বের দৈর্ঘ্য হলো $\dfrac{|d|}{|\vec{N}|}$ (যেহেতু $\vec{a}=0$)

কার্তেসীয় আকার

ধরা যাক $P(x_1, y_1, z_1)$ হলো একটি প্রদত্ত বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ এবং

$$Ax + By + Cz = D$$

হলো প্রদত্ত সমতলটির কার্তেসীয় সমীকরণ। তাহলে,

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

$$\vec{N} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$$

সুতরাং, 1 নং দ্রষ্টব্য থেকে, P বিন্দু থেকে সমতলের উপর লম্ব দূরত্ব হলো

$$\left|\frac{(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})\cdot(A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{A x_1 + B y_1 + C z_1 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

উদাহরণ 24 $\vec{r}\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ সমতল থেকে (2, 5, – 3) বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করো।

সমাধান এখানে, $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{N} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $d = 4$।

সুতরাং, প্রদত্ত সমতল থেকে (2, 5, – 3) বিন্দুটির দূরত্ব হলো

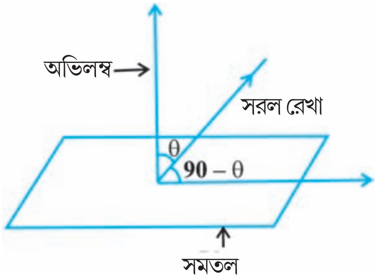
$$\frac{|(2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) - 4|}{|6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}|} = \frac{|12 - 15 - 6 - 4|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{13}{7} \text{ একক}$$

11.10 একটি সরলরেখা ও একটি সমতলের মধ্যবর্তী কোণ (Angle between a Line and a Plane)

সংজ্ঞা 3 একটি সরলরেখা ও একটি সমতলের মধ্যবর্তী কোণ এবং ওই সরলরেখা ও সমতলটির উপর অভিলম্বের মধ্যবর্তী কোণ পরস্পর পূরক (complement) (চিত্র 11.20)।

ভেক্টর আকার যদি সরলরেখাটির সমীকরণ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ এবং সমতলটির সমীকরণ $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$ হয় তবে সরলরেখা ও সমতলটির অভিলম্বের মধ্যে কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{n}|}\right|$$



চিত্র 11.20

এবং তাই রেখা ও সমতলের মধ্যে কোণ φ কে লেখা যায় 90 – θ, অর্থাৎ,

$$\sin(90-\theta) = \cos\theta$$

অর্থাৎ,
$$\sin\phi = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\ |\vec{n}|}\right| \text{ অথবা } \phi = \sin^{-1}\left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$$

উদাহরণ 25 $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ সরলরেখা ও $10x + 2y - 11z = 3$ সমতলের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক সরলরেখা এবং সমতলের অভিলম্বের মধ্যবর্তী কোণ হলো θ। প্রদত্ত সমীকরণগুলোকে ভেক্টর আকারে রূপান্তরিত করে আমরা পাই,

$$\vec{r} = (-\hat{i} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

এবং
$$\vec{r}\cdot(10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}) = 3$$

এখানে
$$\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k} \text{ এবং } \vec{n} = 10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}$$

তবে,
$$\sin\phi = \left|\frac{(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})\cdot(10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k})}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}\ \sqrt{10^2 + 2^2 + 11^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-40}{7\times 15}\right| = \left|\frac{-8}{21}\right| = \frac{8}{21} \text{ বা, } \phi = \sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$$

অনুশীলনী 11.3

1. নিম্নলিখিত প্রতিটি ক্ষেত্রে, সমতলটির অভিলম্বের দিক্-কোসাইন এবং মূলবিন্দু থেকে উহার দূরত্ব নির্ণয় করো।

(a) $z = 2$ (b) $x + y + z = 1$

(c) $2x + 3y - z = 5$ (d) $5y + 8 = 0$

2. একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো যার মূলবিন্দু থেকে দূরত্ব 7 একক এবং ভেক্টর $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ সমতলটির অভিলম্ব।

3. নিম্নলিখিত সমতলগুলোর কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় করো :

(a) $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$ (b) $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = 1$

(c) $\vec{r} \cdot [(s - 2t)\hat{i} + (3 - t)\hat{j} + (2s + t)\hat{k}] = 15$

4. নিম্নলিখিত প্রতিটি ক্ষেত্রে, মূলবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

(a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ (b) $3y + 4z - 6 = 0$

(c) $x + y + z = 1$ (d) $5y + 8 = 0$

5. সমতলগুলোর ভেক্টর ও কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় করে

(a) যেটি $(1, 0, -2)$ বিন্দুগামী এবং উহার অভিলম্ব ভেক্টর $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ।

(b) যেটি $(1, 4, 6)$ বিন্দুগামী এবং উহার অভিলম্ব ভেক্টর $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ।

6. সমতলগুলোর সমীকরণ নির্ণয় করো যেগুলো নিম্নলিখিত তিনটি বিন্দুগামী।

(a) $(1, 1, -1)$, $(6, 4, -5)$, $(-4, -2, 3)$

(b) $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(-2, 2, -1)$

7. $2x + y - z = 5$ সমতলদ্বারা অক্ষগুলোর ছেদিতাংশ নির্ণয় করো।

8. সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো, যার y -অক্ষের ছেদিতাংশ 3 একক এবং উহা ZOX সমতলের সমান্তরাল।

9. যে সমতলটি $(2, 2, 1)$ বিন্দুগামী এবং $3x - y + 2z - 4 = 0$ ও $x + y + z - 2 = 0$ সমতলদ্বয়ের ছেদক সরলরেখাগামী, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

10. যে সমতলটি $(2, 1, 3)$ বিন্দুগামী এবং $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$ ও $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ সমতলদ্বয়ের ছেদক সরলরেখাগামী, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

11. যে সমতলটি $x + y + z = 1$ ও $2x + 3y + 4z = 5$ সমতলদ্বয়ের ছেদক সরলরেখাগামী এবং $x - y + z = 0$ সমতলের উপর লম্ব, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

12. $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=5$ এবং $\vec{r}\cdot(3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})=3$ ভেক্টর সমীকরণ বিশিষ্ট সমতলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

13. নিম্নলিখিত প্রতিটি ক্ষেত্রে, প্রদত্ত সমতল যুগল সমান্তরাল অথবা পরস্পর লম্ব কিনা নির্ণয় করো এবং যেক্ষেত্রে তারা সমান্তরাল অথবা পরস্পর লম্ব-এর মধ্যে কোনোটিই নয়, সেক্ষেত্রে তাদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

(a) $7x + 5y + 6z + 30 = 0$ এবং $3x - y - 10z + 4 = 0$

(b) $2x + y + 3z - 2 = 0$ এবং $x - 2y + 5 = 0$

(c) $2x - 2y + 4z + 5 = 0$ এবং $3x - 3y + 6z - 1 = 0$

(d) $2x - y + 3z - 1 = 0$ এবং $2x - y + 3z + 3 = 0$

(e) $4x + 8y + z - 8 = 0$ এবং $y + z - 4 = 0$

14. নিম্নলিখিত প্রতিটি ক্ষেত্রে, প্রদত্ত সমতলের অনুরূপ প্রতিটি প্রদত্ত বিন্দু থেকে দূরত্ব নির্ণয় করো।

	বিন্দু	**সমতল**
(a)	$(0, 0, 0)$	$3x - 4y + 12z = 3$
(b)	$(3, -2, 1)$	$2x - y + 2z + 3 = 0$
(c)	$(2, 3, -5)$	$x + 2y - 2z = 9$
(d)	$(-6, 0, 0)$	$2x - 3y + 6z - 2 = 0$

বিবিধ উদাহরণমালা

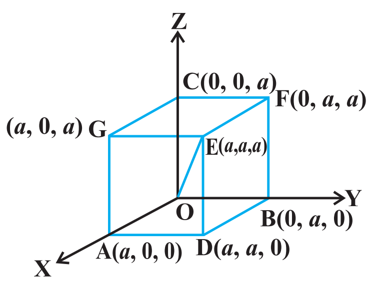
উদাহরণ 26 একটি ঘনকের কর্ণগুলোর সাথে একটি সরলরেখা α, β, γ ও δ কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করো যে
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$$

সমাধান ঘনক হলো একটি আয়তাকার ষড়তলক যার দৈর্ঘ্য প্রস্থ ও উচ্চতা সবগুলো সমান। ধরো OADBFEGC হলো একটি ঘনক, যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক (চিত্র 11.21)। ঘনকের চারটি কর্ণ হলো OE, AF, BG ও CD।

O এবং E বিন্দুর সংযোজককারী সরলরেখা অর্থাৎ, কর্ণ OE এর দিক্-কোসাইনগুলো হলো

$$\frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}$$

অর্থাৎ, $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$



চিত্র 11.21

অনুরূপে, AF, BG এবং CD কর্ণের দিক্-কোসাইনগুলো হলো যথাক্রমে $\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$।

ধরা যাক, প্রদত্ত সরলরেখাটির দিক্-কোসাইনগুলো হলো l, m, n এবং রেখাটি OE, AF, BG, CD এর সাথে যথাক্রমে $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(l+m+n);\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(-l+m+n);$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}(l-m+n);\ \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}(l+m-n) \quad (\text{কেন?})$$

সবগুলো বর্গ এবং যোগ করে, আমরা পাই

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$$

$$= \frac{1}{3}\left[(l+m+n)^2 + (-l+m+n)^2 + (l-m+n)^2 + (l+m-n)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[4(l^2+m^2+n^2)\right] = \frac{4}{3} \qquad (\text{যেহেতু } l^2+m^2+n^2 = 1)$$

উদাহরণ 27 যে সমতলটি $(1, -1, 2)$ বিন্দু ধারণকারী ও $2x + 3y - 2z = 5$ এবং $x + 2y - 3z = 8$ সমতলের প্রতিটির উপর লম্ব, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত বিন্দু ধারণকারী সমতলের সমীকরণ হলো

$$A(x-1) + B(y+1) + C(z-2) = 0 \qquad \dots (1)$$

এখন, $2x + 3y - 2z = 5$ ও $x + 2y - 3z = 8$ সমতলের প্রতিটির সঙ্গে (1) নং সমতলের উল্লম্বতার (perpendicularly) শর্ত প্রয়োগ করে, আমরা পাই $2A + 3B - 2C = 0$ এবং $A + 2B - 3C = 0$

এই সমীকরণগুলো সমাধান করে, আমরা পাই $A = -5C$ এবং $B = 4C$।

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ হলো

$$-5C(x-1) + 4C(y+1) + C(z-2) = 0$$

অর্থাৎ, $5x - 4y - z = 7$

উদাহরণ 28 A (3, – 1, 2), B (5, 2, 4) এবং C(– 1, – 1, 6) বিন্দুত্রয় ধারণকারী সমতল এবং P(6, 5, 9) বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক সমতলে অবস্থিত তিনটি বিন্দু হলো A, B, C। একটি বিন্দু P থেকে সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু হলো D। নির্ণেয় দূরত্ব, PD নির্ণয় করতে হবে, যাহা $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ এর উপর $\overrightarrow{AP}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ।

সুতরাং, PD = $\overrightarrow{AP}$ এর সাথে $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ বরাবর একক ভেক্টরের ডট্ গুণফল।

তাই, $$\overrightarrow{AP} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$$

এবং, $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\hat{i} - 16\hat{j} + 12\hat{k}$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$

সুতরাং, $$PD = (3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}) . \frac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$$

$$= \frac{3\sqrt{34}}{17}$$

বিকল্পভাবে, A, B ও C বিন্দুগামী সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো এবং তারপর ওই সমতল থেকে P বিন্দুটির দূরত্ব গণনা করো।

উদাহরণ 29 দেখাও যে,

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta}$$

এবং $$\frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$ সরলরেখা দুটি সমতলীয়।

সমাধান

এখানে,

$$\begin{aligned} x_1 &= a-d & x_2 &= b-c \\ y_1 &= a & y_2 &= b \\ z_1 &= a+d & z_2 &= b+c \\ a_1 &= \alpha-\delta & a_2 &= \beta-\gamma \\ b_1 &= \alpha & b_2 &= \beta \\ c_1 &= \alpha+\delta & c_2 &= \beta+\gamma \end{aligned}$$

এখন নিম্নের নির্ণায়কটি বিবেচনা করি

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-c-a+d & b-a & b+c-a-d \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}$$

প্রথম স্তম্ভের সাথে তৃতীয় স্তম্ভ যোগ করে, আমরা পাই,

$$2\begin{vmatrix} b-a & b-a & b+c-a-d \\ \alpha & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} = 0$$

[যেহেতু প্রথম ও দ্বিতীয় স্তম্ভদ্বয় অভিন্ন।] সুতরাং, প্রদত্ত সরলরেখা দুটি সমতলীয়।

উদাহরণ 30 A (3, 4, 1) ও B (5, 1, 6) বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে XY-তলকে অতিক্রম করে, ওই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

সমাধান A ও B বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হলো

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda[(5-3)\hat{i} + (1-4)\hat{j} + (6-1)\hat{k}]$$

অর্থাৎ $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda(2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$ ... (1)

ধরা যাক যে বিন্দুতে AB সরলরেখা XY-তলকে অতিক্রম করে সেটি হলো P। তাহলে P বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টরের আকার হবে $x\hat{i} + y\hat{j}$।

এই বিন্দুটি অবশ্যই (1)নং সমীকরণটিকে সিদ্ধ করবে। (কেন?)

অর্থাৎ, $x\hat{i} + y\hat{j} = (3+2\lambda)\hat{i} + (4-3\lambda)\hat{j} + (1+5\lambda)\hat{k}$

উভয়পক্ষে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ এর সহগগুলো তুলনা করে, আমরা পাই

$$x = 3 + 2\lambda$$
$$y = 4 - 3\lambda$$
$$0 = 1 + 5\lambda$$

উপরের সমীকরণগুলো সমাধান করে, আমরা পাই

$$x = \frac{13}{5} \text{ এবং } y = \frac{23}{5}$$

সুতরাং, নির্ণেয় বিন্দুটির স্থানাঙ্ক হলো $\left(\frac{13}{5}, \frac{23}{5}, 0\right)$।

অধ্যায় 11-এর বিবিধ অনুশীলনী

1. দেখাও যে মূলবিন্দু ও (2, 1, 1)-এর সংযোজক সরলরেখা (3, 5, – 1) ও (4, 3, – 1) বিন্দুদ্বয় দ্বারা গঠিত সরলরেখার উপর লম্ব।

2. যদি দুটি পরস্পর লম্ব সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো l_1, m_1, n_1 এবং l_2, m_2, n_2 হয়, দেখাও যে উভয় সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার দিক-কোসাইনগুলো হলো
   $m_1 n_2 - m_2 n_1,\ n_1 l_2 - n_2 l_1,\ l_1 m_2 - l_2 m_1$

3. দুটি সরলরেখা যাদের দিক্-অনুপাতগুলো a, b, c ও $b-c, c-a, a-b$ তাদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

4. x-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

5. যদি A, B, C, D বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 2, 3), (4, 5, 7), (– 4, 3, – 6) এবং (2, 9, 2) হয়, তবে AB ও CD সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

6. যদি $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{2k}=\dfrac{z-3}{2}$ এবং $\dfrac{x-1}{3k}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{-5}$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়, তবে k এর মান নির্ণয় করো।

7. (1, 2, 3) বিন্দুগামী এবং $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k})+9=0$ সমতলের উপর লম্ব সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

8. যে সমতলটি (a, b, c) বিন্দুগামী এবং $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=2$ সমতলের সমান্তরাল তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

9. $\vec{r}=6\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$ এবং $\vec{r}=-4\hat{i}-\hat{k}+\mu(3\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় করো।

10. (5, 1, 6) ও (3, 4,1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাটি যে বিন্দুতে YZ-তলকে ছেদ করে সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

11. (5, 1, 6) ও (3, 4,1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাটি যে বিন্দুতে ZX-তলকে ছেদ করে সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

12. (3, – 4, – 5) ও (2, – 3, 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাটি যে বিন্দুতে $2x+y+z=7$ সমতলটিকে ছেদ করেছে ওই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

13. যে সমতলটি (– 1, 3, 2) বিন্দুগামী এবং $x+2y+3z=5$ ও $3x+3y+z=0$ উভয় সমতলের উপর লম্ব তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

14. $(1, 1, p)$ এবং $(-3, 0, 1)$ বিন্দুদ্বয় যদি $\vec{r}\cdot(3\hat{i}+4\hat{j}-12\hat{k})+13=0$ সমতল থেকে সমদূরবর্তী হয়, তবে p এর মান নির্ণয় করো।

15. যে সমতলটি $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=1$ ও $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+4=0$ সমতলদ্বয়ের ছেদক সরলরেখাগামী এবং x-অক্ষের সমান্তরাল, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

16. যদি মূলবিন্দু O এবং P এর স্থানাঙ্ক (1, 2, – 3) হয়, তবে P বিন্দুগামী এবং OP এর উপর লম্ব সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

17. যে সমতলটি $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4=0$ ও $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5=0$ সমতলদ্বয়ের ছেদক সরলরেখা ধারণকারী এবং $\vec{r}\cdot(5\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})+8=0$ সমতলটির উপর লম্ব, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

18. $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ সরলরেখা এবং $\vec{r}\cdot(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ সমতলের ছেদ বিন্দু থেকে $(-1, -5, -10)$ বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করো।

19. $(1, 2, 3)$ বিন্দুগামী এবং $\vec{r}\cdot(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$ ও $\vec{r}\cdot(3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ সমতলদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

20. যে সরলরেখাটি $(1, 2, -4)$ বিন্দুগামী এবং $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ ও $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ সরলরেখাদ্বয়ের উপর লম্ব, তার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

21. যদি একটি সমতলের ছেদিতাংশগুলো a, b, c এবং ইহা মূলবিন্দু থেকে P একক দূরত্বে অবস্থিত হয়, তবে প্রমাণ করো যে $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$

অনুশীলনীর 22 ও 23 নং প্রশ্নের প্রতিটির জন্য সঠিক উত্তরটি বাছাই করো।

22. দুটি সমতল : $2x + 3y + 4z = 4$ এবং $4x + 6y + 8z = 12$ এর মধ্যে দূরত্ব হল :

(A) 2 একক (B) 4 একক (C) 8 একক (D) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ একক

23. দুটি সমতল : $2x - y + 4z = 5$ এবং $5x - 2.5y + 10z = 6$ হলো

(A) লম্ব (B) সমান্তরাল

(C) y-অক্ষে ছেদ করে (D) $\left(0, 0, \frac{5}{4}\right)$ বিন্দুগামী।

সারসংক্ষেপ

- কোনো সরলরেখা দ্বারা স্থানাঙ্ক অক্ষসমূহের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণসমূহের কোসাইনকে **ওই রেখার দিক্-কোসাইন** বলা হয়।
- যদি একটি সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো l, m, n হয়, তবে $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ হবে।
- $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো হলো
  $\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$
  যেখানে $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- **একটি সরলরেখার দিক্-অনুপাতগুলো** হলো এই সংখ্যাগুলো যেগুলো ওই রেখার দিক্-কোসাইনগুলোর সমানুপাতিক।
- যদি একটি সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো l, m, n এবং উহার দিক্-অনুপাতগুলো a, b, c হয়

তবে, $l = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $m = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $n = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

- কোনো ত্রিমাত্রিক দেশে **অসামতলিক সরলরেখা** হলো এই সরলরেখাগুলো যেগুলো ছেদিত অথবা সমান্তরাল এদের কোনোটিই নয়। তারা ভিন্ন ভিন্ন সমতলে অবস্থিত।
- **অসামতলিক রেখার মধ্যবর্তী কোণ** হলো প্রতিটি অসামতলিক রেখার সমান্তরাল সরলরেখার ওপর অবস্থিত যে-কোনো বিন্দু (মূলবিন্দুগামী অগ্রাধিকারযোগ্য) থেকে অঙ্কিত দুটি ছেদিত সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ।
- যদি দুটি সরলরেখার দিক্-অনুপাতগুলো যথাক্রমে l_1, m_1, n_1 ও l_2, m_2, n_2 এবং তাদের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ θ হয়, তবে $\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$
- যদি দুটি সরলরেখার দিক্-অনুপাতগুলো যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 ও a_2, b_2, c_2 এবং তাদের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ θ হয়, তবে $\cos\theta = \left|\dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$
- যে সরলরেখাটি একটি প্রদত্ত বিন্দুগামী যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ এবং উহা একটি প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{b}$ এর সমান্তরাল, তার ভেক্টর সমীকরণ হলো $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ ।
- (x_1, y_1, z_1) বিন্দুগামী এবং l, m, n দিক্-কোসাইন বিশিষ্ট একটি সরলরেখার সমীকরণ হলো $\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}$
- দুটি বিন্দুগামী সরলরেখা যাদের অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$, সেই রেখাটির ভেক্টর সমীকরণ হলো $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ ।
- যে সরলরেখা (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2) দুটি বিন্দুগামী, তার কার্তেসীয় সমীকরণ হলো $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ ।
- যদি $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ ও $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ এর মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ θ হয়, তবে $\cos\theta = \left|\dfrac{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$
- যদি দুটি সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ ও $\dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$ হয় তবে, তাদের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণকে নিম্নরূপে লেখা যায় $\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$.

- দুটি অসামতলিক সরলরেখার মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হলো একটি রেখাংশ যেটি উভয় সরলরেখার উপর লম্ব।

- $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ ও $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ এর মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হলো

$$\left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right|$$

- $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ এবং $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$ সরলরেখা দুটির

মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হলো

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$

- সমান্তরাল সরলরেখা $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}$ এবং $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব হলো

$$\left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right|$$

- ভেক্টর আকারে, যে সমতলটি মূলবিন্দু থেকে d একক দূরত্বে অবস্থিত এবং সমতলটির অভিলম্বের একক ভেক্টর $\hat{n}$ যদি মূলবিন্দুগামী হয় তবে, ওই সমতলটির সমীকরণ হবে $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ ।

- যে সমতলটি মূলবিন্দু থেকে d একক দূরত্বে অবস্থিত এবং উহার অভিলম্বের দিক্-কোসাইনগুলো যথা l, m, n হয় তবে, সমতলটির সমীকরণ হবে $lx + my + nz = d$.

- যে সমতলটি একটি বিন্দুগামী যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ এবং উহা ভেক্টর $\vec{N}$ এর উপর লম্ব, তার সমীকরণ হলো $(\vec{r} - \vec{a}) . \vec{N} = 0$ ।

- যে সমতলটি, A, B, C দিক্-অনুপাত বিশিষ্ট একটি প্রদত্ত সরলরেখার উপর লম্ব এবং একটি প্রদত্ত বিন্দু (x_1, y_1, z_1)-গামী, তার সমীকরণ হলো

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

- তিনটি অসমরেখ বিন্দু যথা— (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ও (x_3, y_3, z_3) -গামী একটি সমতলের সমীকরণ হলো

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ অবস্থান ভেক্টর বিশিষ্ট তিনটি অসমরেখ বিন্দু ধারণকারী একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ হলো $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0$
- যে সমতলটি স্থানাঙ্ক অক্ষগুলোকে $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ ও $(0, 0, c)$ বিন্দুতে ছেদ করে, তার সমীকরণ হলো—

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

- $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$ এবং $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$ সমতলের ছেদক-সরলরেখাগামী একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ হলো $\vec{r} \cdot (\vec{n}_1 + \lambda \vec{n}_2) = d_1 + \lambda d_2$, যেখানে λ হলো যে কোনো একটি অ-শূন্য ধ্রুবক রাশি।
- দুটি প্রদত্ত সমতল যথা $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ এবং $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ এর ছেদক-সরলরেখাগামী একটি সমতলের কার্তেসীয় সমীকরণ হলো—
$(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0.$
- দুটি সরলরেখা $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ এবং $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ সামতলিক হবে যদি $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$ হয়।
- কার্তেসীয় আকারে, $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$ এবং $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$ সরলরেখা দুটি সামতলিক হবে যদি

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ হয়।}$$

- ভেক্টর আকারে, যদি দুটি সমতল $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$ এবং $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হয়, তবে $\theta = \cos^{-1} \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$.

- সরলরেখা $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}$ এবং সমতল $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ এর মধ্যবর্তী কোণ ϕ হলো

$$\sin\phi = \left| \frac{\vec{b} \cdot \hat{n}}{|\vec{b}||\hat{n}|} \right|$$

- $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ এবং $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ সমতলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ-কে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\cos\theta = \left| \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|$$

- $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ সমতল থেকে অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ বিশিষ্ট একটি বিন্দুর দূরত্ব হলো $|d - \vec{a} \cdot \hat{n}|$
- (x_1, y_1, z_1) বিন্দু থেকে $Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলের দূরত্ব হলো

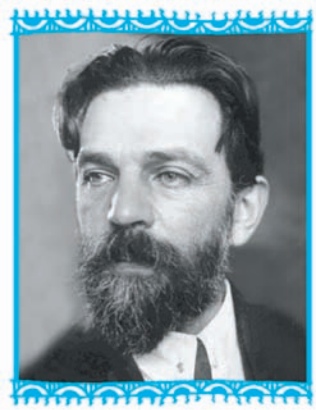
$$\left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|।$$

অধ্যায় 12

রৈখিক প্রোগ্রামবিধি (Linear Programming)

❖ *The mathematical experience of the student is incomplete if he never had the opportunity to solve a problem invented by himself. – G. POLYA* ❖

12.1 ভূমিকা



L. Kantorovich

পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে, আমরা রৈখিক সমীকরণ তন্ত্র এবং দৈনন্দিন সমস্যায় তাদের প্রয়োগ আলোচনা করেছি। একাদশ শ্রেণিতে, আমরা রৈখিক অসমতা এবং দ্বিচল রাশি বিশিষ্ট রৈখিক অসমতা তন্ত্র এবং লৈখিত পদ্ধতিতে তাদের সমাধান অধ্যয়ন করেছি। গণিতের অনেক প্রয়োগ অসমতা/সমীকরণতন্ত্রের সঙ্গো যুক্ত। এই অধ্যায়ে, আমরা বাস্তব জীবনের কিছু সমস্যা সমাধানের জন্য রৈখিক অসমতা/সমীকরণ তন্ত্র প্রয়োগ করব, যা নিম্নে দেওয়া হলো :

একজন আসবাব ব্যবসায়ী শুধুমাত্র দুটি বস্তু— টেবিল এবং চেয়ারের ব্যবসা করেন। তার কাছে বিনিয়োগের জন্য 50,000 টাকা আছে এবং সর্বাধিক 60 টি বস্তু রাখার জায়গা আছে। একটি টেবিলের মূল্য 2500 টাকা এবং চেয়ারের মূল্য 500 টাকা। সে অনুমান করলে যে, একটি টেবিল বিক্রি করে সে 250 টাকা লাভ করতে পারে এবং একটি চেয়ার বিক্রি করে 75 টাকা লাভ করে। সে জানতে চায় যে তার পর্যাপ্ত টাকা থেকে কতগুলো টেবিল এবং চেয়ার ক্রয় করা উচিত যাতে তার মোট লাভের পরিমাণ সর্বাধিক হয়, ধরে নাও যে সে তার ক্রয় করা সবগুলো বস্তুই বিক্রি করতে পারে।

এ ধরনের সমস্যায় শ্রেণিভুক্ত সমস্যার লাভ (অথবা মূল্য) সর্বাধিক (অথবা সর্বনিম্ন) করতে চায়, তাকে **প্রান্তিকীকরণ সমস্যা (optimisation problems)** বলা হয়। এভাবে প্রান্তিকীকরণ সমস্যা সর্বাধিক লাভ, সর্বনিম্ন মূল্য অথবা সম্পদের নূন্যতম ব্যবহার নির্ণয়ের সঙ্গো যুক্ত থাকতে পারে।

প্রান্তিকীকরণ সমস্যার একটি বিশেষ কিন্তু একটি খুব গুরুত্বপূর্ণ শ্রেণি হল **রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা (linear programming problem)**। উপরোক্ত উল্লিখিত প্রান্তিকীকরণ সমস্যাটি হল রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার একটি উদাহরণ। রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা শিল্প, বাণিজ্য, বৈজ্ঞানিক ব্যবস্থাপনা ইত্যাদি ক্ষেত্রে ব্যাপক প্রয়োগের জন্য এটি বেশি গুরুত্বপূর্ণ।

এই অধ্যায়ে, আমরা কিছু রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা এবং তাদের সমাধান শুধুমাত্র লৈখিক পদ্ধতিতে অধ্যয়ন করব, যদিও এই ধরনের সমস্যার সমাধানের আরো অনেক পদ্ধতিও আছে।

12.2 রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা এবং গাণিতিক সূত্রায়ন (Linear Programming Problem and its Mathematical Formulation)

আমরা আসবাব ব্যবসায়ীর উপরের উদাহরণ দিয়ে আমাদের আলোচনা শুরু করেছি, যা দ্বিচল রাশিবিশিষ্ট সমস্যার গাণিতিক সূত্রায়নের দিকে পরিচালিত করে। এই উদাহরণে আমরা লক্ষ্য করেছি

(i) একজন ব্যবসায়ী তার টাকা টেবিল অথবা চেয়ার অথবা দুটোই ক্রয় করার জন্য বিনিয়োগ করতে পারে। উপরন্তু ভিন্ন বিনিয়োগ পরিকল্পনা গ্রহণে সে ভিন্ন ভিন্ন লাভ উপার্জন করবে।

(ii) এখানে আছে নির্দিষ্ট **অতিরিক্ত শর্ত (overriding conditions)** অথবা **বাধাগোষ্ঠী (constraints)** যেমন তার বিনিয়োগের পরিমাণ **সর্বোচ্চ** 50,000 টাকা পর্যন্ত সীমাবদ্ধ এবং তার রাখার জায়গা ছিল সর্বাধিক 60 টি বস্তু।

মনে করো সে শুধুমাত্র টেবিল ক্রয় করার সিদ্ধান্ত নেয় এবং কোনো চেয়ার নয়। সুতরাং, সে $50000 \div 2500$, অর্থাৎ 20 টি টেবিল ক্রয় করতে পারে। এই ক্ষেত্রে তার লাভের পরিমাণ (250×20) টাকা, অর্থাৎ **5000** টাকা।

মনে করো সে শুধুমাত্র চেয়ার ক্রয় করা পছন্দ করল এবং কোনো টেবিল নয়। তার মূলধন 50,000 টাকা দিয়ে সে $50000 \div 500$, অর্থাৎ 100 টি চেয়ার ক্রয় করতে পারে। কিন্তু সে শুধুমাত্র 60টি বস্তু রাখতে পারে। সুতরাং, তাকে শুধুমাত্র 60টি চেয়ার ক্রয় করতে বাধ্য করা হয় যাতে মোট (60×75)টাকা অর্থাৎ **4500** টাকা লাভ হয়।

এখানে অনেক অন্য সম্ভাবনা রয়েছে। উদাহরণস্বরূপ, সে 10 টি টেবিল এবং 50 টি চেয়ার ক্রয় করা পছন্দ করতে পারে, যেহেতু সে শুধুমাত্র 60 টি বস্তু রাখতে পারে। এই ক্ষেত্রে মোট লাভ হবে $(10 \times 250 + 50 \times 75)$ টাকা, অর্থাৎ **6250** টাকা এবং এইভাবে চলতে থাকবে।

এইভাবে, আমরা লক্ষ্য করি যে, ব্যবসায়ী তার টাকা বিভিন্নভাবে বিনিয়োগ করতে পারে এবং ভিন্ন বিনিয়োগ পরিকল্পনা গ্রহণ করে ভিন্ন ভিন্ন লাভ উপার্জন করতে পারে।

এখন সমস্যাটি হল : সর্বাধিক লাভ পাওয়ার জন্য কিভাবে তার টাকা বিনিয়োগ করা উচিত? এই প্রশ্নের উত্তর দিতে, চলো আমরা এই সমস্যাটি গাণিতিকভাবে সূত্রায়িত করার চেষ্টা করি।

12.2.1 *সমস্যাটির গাণিতিক সূত্রায়ণ (Mathematical formulation of the problem)*

ধরো, ব্যবসায়ী x টি টেবিল এবং y টি চেয়ার ক্রয় করলো। স্পষ্টতই x এবং y অবশ্যই অ-ঋণাত্মক, অর্থাৎ

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \text{(অ-ধনাত্মক বাধাগোষ্ঠী)} \qquad \begin{array}{r} \ldots (1) \\ \ldots (2) \end{array}$$

ব্যবসায়ীককে সর্বোচ্চ বিনিয়োগকারী মূলধন যা সে বিনিয়োগ করতে পারে তা বেধে দেওয়া হল (এখানে এটি হল 50,000 টাকা) এবং বস্তুর সর্বোচ্চ সংখ্যা যা সে মজুত করতে পারবে (এখানে এটি হল 60)। গাণিতিকভাবে বিবৃত করলে,

$$2500x + 500y \leq 50000 \text{ (বিনিয়োগ বাধা)}$$

বা,
$$5x + y \leq 100 \qquad \ldots (3)$$

এবং
$$x + y \leq 60 \text{ (মজুত বাধা)} \qquad \ldots (4)$$

ব্যবসায়ী এমনভাবে বিনিয়োগ করতে চায় যাতে তার লাভ সর্বাধিক হয়, ধরো এটি Z যা x ও y এর অপেক্ষক রূপে প্রকাশ করা যায়, যা হল

$Z = 250x + 75y$ (যাকে বিষয়াত্মক অপেক্ষক বলা হয়) ... (5)

গাণিতিকভাবে, প্রদত্ত সমস্যাটি রূপান্তরিত হয় :

$Z = 250x + 75y$ এর চরম মান নির্ণয় করো

শর্তসাপেক্ষ বাধাগোষ্ঠী :

$$5x + y \le 100$$

$$x + y \le 60$$

$$x \ge 0, \; y \ge 0$$

সুতরাং, আমাদের বৈখিক অপেক্ষক Z এর চরম মান, অ-ঋণাত্মক চলরাশি বিশিষ্ট একটি রৈখিক অসমতার সেট দ্বারা কিছু শর্ত প্রয়োগ করে নির্ণয় করতে হবে। এখানে আরো কিছু সমস্যা আছে যা আমাদের একটি রৈখিক অপেক্ষকের অবম মান, অ-ঋণাত্মক চল বিশিষ্ট একটি রৈখিক অসমতার সেট দ্বারা কিছু শর্ত প্রয়োগ করে নির্ণয় করতে হবে। এইরূপ সমস্যাগুলোকে বলা হয় **রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা**।

এইভাবে, একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা হলো এরূপ যে এটি বিভিন্ন চল (যেমন x এবং y) বিশিষ্ট রৈখিক অপেক্ষকের (যাকে **বিষয়াত্মক অপেক্ষক (objective function)** বলে) **প্রান্তিক মান (Optimal Valu)** (চরম বা অবম মান) নির্ণয়ের সাথে সম্পর্কিত, যা **অ-ঋণাত্মক** চল বিশিষ্ট এবং একটি রৈখিক অসমতার (যাকে **রৈখিক বাধাগোষ্ঠী (linear constraints)** বলে) সেটকে সিদ্ধ করে। **রৈখিক (linear)** পদটি বোঝায় যে-কোনো সমস্যায় ব্যবহৃত সকল গাণিতিক সম্পর্ক হলো **রৈখিক সম্পর্ক (linear relations)** যখন প্রোগ্রামবিধি পদটি বোঝায় একটি বিশেষ **প্রোগ্রাম (programme)** বা একটি ক্রিয়া পরিকল্পনা নির্ণয়ের পদ্ধতি।

সামনের দিকে অগ্রসর হওয়ার আগে, আমরা এখন রীতি অনুযায়ী কিছু পদকে (যা উপরে ব্যবহৃত হয়েছে) সংজ্ঞায়িত করব যাহা আমরা রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার ব্যবহার করবো :

বিষয়াত্মক অপেক্ষক (Objective function) রৈখিক অপেক্ষক $Z = ax + by$, যেখানে a, b হল ধ্রুবক, যার চরম বা অবম মান নির্ণয় করতে হবে। তাকে **বিষয়াত্মক অপেক্ষক বলা হয়** ।

উপরের উদাহরণে, $Z = 250x + 75y$ হলো একটি রৈখিক বিষয়াত্মক অপেক্ষক। চলরাশি x এবং y কে বলা হয় **সিদ্ধান্ত চলরাশি (decision variables)** ।

বাধাগোষ্ঠী (Constraints) রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় চলরাশির উপর রৈখিক অসমতা অথবা সমতা অথবা সীমাবদ্ধতাকে **বাধাগোষ্ঠী** বলা হয়। $x \ge 0, y \ge 0$ শর্তগুলোকে বলা হয় অ-ঋণাত্মক সীমাবদ্ধতা। উপরের উদাহরণে, (1) থেকে (4) নং পর্যন্ত অসমতাগুলোর সেটটিকে **বাধাগোষ্ঠী বলা হয়।**

প্রান্তিককরণ সমস্যা (Optimisation problem) একটি সমস্যা যা একটি রৈখিক অপেক্ষকের (যেমন x এবং y দুটি চলরাশি) নির্দিষ্ট বাধাগোষ্ঠীর সাপেক্ষে একটি রৈখিক অসমতার সেটের চরম বা অবম মান নির্ণয় করতে চায়, তাকে প্রান্তিকীকরণ সমস্যা বলে। রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা হলো বিশেষ ধরনের প্রান্তিকীকরণ সমস্যা। উপরের সমস্যাটিতে একটি ব্যবসায়ী দ্বারা টেবিল এবং চেয়ার ক্রয়ের জন্য বিনিয়োগ করা অর্থের

পরিমাণ প্রান্তিকীকরণ সমস্যার পাশাপাশি একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার একটি উদাহরণ।

আমরা এখন একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সমাধান কিভাবে নির্ণয় করতে হবে, তা আলোচনা করবো। এই অধ্যায়ে আমরা শুধুমাত্র লৈখিক পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করবো।

12.2.2 *রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা সমাধানের লৈখিক পদ্ধতি (Graphical method of solving linear programming problems)*

একাদশ শ্রেণিতে, আমরা দ্বিচল x এবং y বিশিষ্ট রৈখিক অসমতা তন্ত্রের লেখচিত্র অংকন এবং লৈখিক পদ্ধতিতে এদের সমাধান নির্ণয় করতে শিখেছি। চলো আমরা অনুচ্ছেদ 12.2 এ আলোচিত টেবিল এবং চেয়ারে বিনিয়োগ সংক্রান্ত সমস্যাটি উল্লেখ করি। এখন আমরা এই সমস্যাটি লৈখিকভাবে সমাধান করব। চলো আমরা রৈখিক অসমতার আকারে উল্লিখিত বাধাগোষ্ঠীর লেখচিত্র অংকন করি :

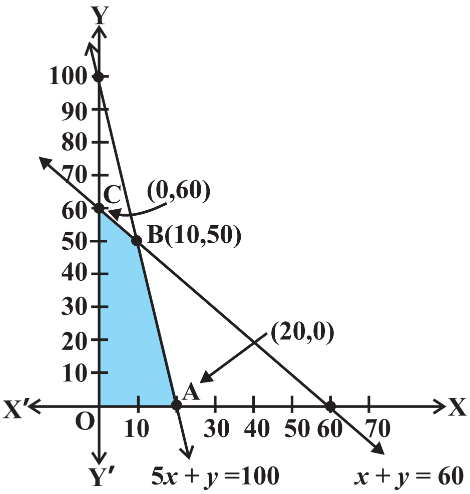
$$5x + y \leq 100 \quad \ldots (1)$$
$$x + y \leq 60 \quad \ldots (2)$$
$$x \geq 0 \quad \ldots (3)$$
$$y \geq 0 \quad \ldots (4)$$

এই তন্ত্রের লেখচিত্র (রেখাঙ্কিত অঞ্চল), (1) থেকে (4) নং অসমতার দ্বারা প্রাপ্ত সকল অর্ধতলের সাধারণ বিন্দুগুলো নিয়ে গঠিত (দেখো চিত্র 12.1) । এই অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দু ব্যবসায়ীর টেবিল ও চেয়ারে বিনিয়োগের জন্য একটি **কার্যকর পছন্দকে (feasible choice)** নির্দেশ করে। সুতরাং, এই সমস্যার জন্য এই অঞ্চলটিকে বলা হয় **কার্যকর অঞ্চল (feasible region)**। এই অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দুকে এই সমস্যার একটি **কার্যকর সমাধান** বলে (**feasible solution**)। এইভাবে আমরা পাই,

একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় অ-ঋণাত্মক বাধাগোষ্ঠী $x, y \geq 0$ সহ সকল বাধাগোষ্ঠী দ্বারা নির্ণিত সাধারণ অঞ্চলকে বলা হয় এই সমস্যার **কার্যকর অঞ্চল** (অথবা সমাধান অঞ্চল)। চিত্র 12.1-এ OABC অঞ্চলটি (রেখাঙ্কিত) হল এই সমস্যার কার্যকর অঞ্চল। কার্যকর অঞ্চল ব্যতীত অন্য অঞ্চলকে বলা হয় **অকার্যকর অঞ্চল (infeasible region)**।

কার্যকর সমাধান কার্যকর অঞ্চলের সীমা রেখার উপর এবং ভিতরে অবস্থিত বিন্দুগুলো বাধাগোষ্ঠীর কার্যকর সমাধানকে নির্দেশ করে। চিত্র 12.1-এ, কার্যকর অঞ্চল OABC -এর সীমারেখা এবং ভেতরের সকল বিন্দু এই সমস্যার কার্যকর সমাধানকে নির্দেশ করে। উদাহরণ হিসাবে (10, 50) বিন্দুটি এই সমস্যার একটি কার্যকর সমাধান এবং একইরকমভাবে (0, 60), (20, 0) ইত্যাদি বিন্দুগুলোও।

কার্যকর অঞ্চলের বাহিরে যে-কোনো বিন্দুকে **অকার্যকর সমাধান** বলে। উদাহরণ হিসাবে, (25, 40) বিন্দুটি এই সমস্যার একটি অকার্যকর সমাধান।



চিত্র 12.1

প্রান্তিক (কার্যকর) সমাধান (Optimal (feasible) solution) : কার্যকর অঞ্চলের যে-কোনো বিন্দু যা বিষয়াত্মক অপেক্ষকের একটি প্রান্তিক মান (চরম বা অবম) দেয়, তাকে প্রান্তিক সমাধান বলা হয়।

এখন, আমরা দেখছি যে, OABC কার্যকর অঞ্চলের সকল বিন্দু প্রদত্ত (1) হতে (4) নং বাধাগোষ্ঠীকে সিদ্ধ করে, এবং যেহেতু সেখানে **অসীম অসংখ্য বিন্দু** আছে, এটি স্পষ্ট নয় যে, কিভাবে আমরা $Z = 250x + 75y$, বিষয়াত্মক অপেক্ষকটির একটি বিন্দু নির্ণয় করব যা একটি চরম মান দেয়। এই পরিস্থিতিটি মোকাবেলা করতে আমরা নিম্নলিখিত উপপাদ্যগুলো ব্যবহার করব যেগুলো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সমাধানের মৌলিক উপপাদ্য। এই উপপাদ্যগুলো প্রমাণ এই পুস্তকের অন্তর্ভুক্ত নয়।

উপপাদ্য 1 ধরো, একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার জন্য R হলো কার্যকর অঞ্চল (উত্তল বহুভুজ) এবং ধরো, $Z = ax + by$ হলো একটি বিষয়াত্মক অপেক্ষক। যখন Z এর একটি মান (চরম বা অবম) আছে, যেখানে x এবং y চলরাশি বিশিষ্ট বাধাগোষ্ঠী রৈখিক অসমতা দ্বারা বর্ণিত, এই প্রান্তিক মান অবশ্যই কার্যকর অঞ্চলের একটি কৌণিক বিন্দু* (শীর্ষবিন্দু)-তে পাওয়া যায়।

উপপাদ্য 2 ধরো, একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার জন্য R হলো কার্যকর অঞ্চল এবং $Z = ax + by$ হলো একটি বিষয়াত্মক অপেক্ষক। যদি R সীমাবদ্ধ (bounded) হয়, তবে বিষয়াত্মক অপেক্ষক Z -এর **চরম** এবং **অবম** উভয় মান R এর মধ্যে আছে এবং এদের প্রতিটি, R এর একটি কৌণিক বিন্দু (শীর্ষবিন্দু)-তে পাওয়া যায়।

মন্তব্য যদি R **অসীমাবদ্ধ** (unbounded) হয়, তবে বিষয়াত্মক অপেক্ষকটির চরম অথবা অবম মানের অস্তিত্ব নাও থাকতে পারে। যদি ইহার অস্তিত্ব থাকে, এটি অবশ্যই R -এর একটি কৌণিক বিন্দুতে পাওয়া যায় (উপপাদ্য1হতে)।

উপরের উদাহরণে, সীমাবদ্ধ (কার্যকর) অঞ্চলের কৌণিক বিন্দুগুলো (শীর্ষবিন্দুগুলো) হলো : O, A, B ও C এবং ইহা নির্ণয় করা সহজ যে এদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, 0), (20, 0), (10, 50) এবং (0, 60) । চলো আমরা এখন ঐ বিন্দুগুলোতে Z -এর মান গণনা করি।

আমরা পাই

কার্যকর অঞ্চলের শীর্ষবিন্দু	Z এর অনুরূপ মান (টাকায়)	
O (0,0)	0	
C (0,60)	4500	
B (10,50)	**6250** ←	চরম
A (20,0)	5000	

* কার্যকর অঞ্চলের একটি কৌণিক বিন্দু হলো ঐ অঞ্চলের একটি বিন্দু যা দুটি সীমারেখার ছেদ বিন্দু।

** রৈখিক অসমতা তন্ত্রের একটি কার্যকর অঞ্চলকে সীমাবদ্ধ বলা হয় যদি এটিকে একটি বৃত্তের মধ্যে আবদ্ধ করা যায়। অন্যথায় এটিকে অসীমাবদ্ধ বলা হয়। অসীমাবদ্ধ বলতে বোঝায় যে কার্যকর অঞ্চলকে যে-কোনো দিকে অসীম পর্যন্ত বর্ধিত করা যায়।

আমরা লক্ষ করেছি যে ব্যবসায়ীর সর্বাধিক লাভ হয় বিনিয়োগ পরিকল্পনা (10, 50) হতে অর্থাৎ 10 টি টেবিল এবং 50 টি চেয়ার ক্রয়ের মাধ্যমে।

রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা সমাধানের এই পদ্ধতিকে বলা হয় **কৌণিক বিন্দু পদ্ধতি (Corner Point Method)**। এই পদ্ধতিটি নিম্নলিখিত ধাপগুলো নিয়ে গঠিত :

1. রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার কার্যকর অঞ্চল নির্ণয় করো এবং এটির কৌণিক বিন্দুগুলো (শীর্ষবিন্দুগুলো) হয় পর্যবেক্ষণ করে অথবা ঐ বিন্দুতে ছেদিত দুটি সরলরেখার সমীকরণকে সমাধান করে নির্ণয় করো।
2. প্রতিটি কৌণিক বিন্দুতে বিষয়াত্মক অপেক্ষক, $Z = ax + by$ এর মান নির্ণয় করো। ধরো, ঐ বিন্দুগুলোতে M এবং m যথাক্রমে বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মানকে প্রকাশ করে।
3. (i) যখন কার্যকর অঞ্চলটি **সীমাবদ্ধ** হয়, তখন M এবং m হল Z -এর চরম এবং অবম মান।

   (ii) কার্যকর অঞ্চলটি **অসীমাবদ্ধ** হওয়ার ক্ষেত্রে আমরা পাই :
4. (a) M হল Z এর চরম মান, যদি $ax + by > M$ দ্বারা প্রাপ্ত খোলা অর্ধতলের সহিত কার্যকর অঞ্চলের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে। অন্যথায় Z এর কোনো চরম মান থাকবে না।

   (b) অনুরূপভাবে, m হল Z -এর অবম মান, যদি $ax + by < m$ দ্বারা প্রাপ্ত খোলা অর্ধতলের সহিত কার্যকর অঞ্চলের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে। অন্যথায় Z এর কোনো অবম মান থাকবে না।

এখন আমরা কিছু উদাহরণের দ্বারা কৌণিক বিন্দু পদ্ধতির ধাপগুলো বর্ণনা করব :

উদাহরণ 1 লৈখিকভাবে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সমাধান করো :

Z এর চরম মান নির্ণয় করো,

যেখানে $Z = 4x + y$ ... (1)

শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হল :

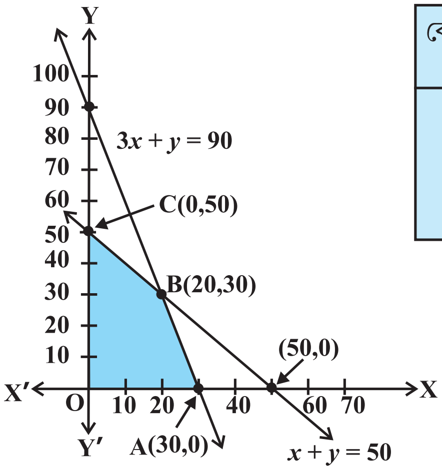
$$x + y \le 50 \quad \text{... (2)}$$

$$3x + y \le 90 \quad \text{... (3)}$$

$$x \ge 0, y \ge 0 \quad \text{... (4)}$$

সমাধান চিত্র 12.2 এ রেখাঙ্কিত অঞ্চলটি হলো কার্যকর অঞ্চল, যা (2) হতে (4) নং বাধাগোষ্ঠী তন্ত্র থেকে নির্ণয় করা যায়। আমরা লক্ষ করেছি যে কার্যকর অঞ্চল OABC হলো **সীমাবদ্ধ। সুতরাং আমরা এখন** Z -এর চরম মান নির্ণয় করার জন্য কৌণিক বিন্দু পদ্ধতি ব্যবহার করব।

কৌণিক বিন্দু O, A, B এবং C এর স্থানাঙ্ক হলো যথাক্রমে (0, 0), (30, 0), (20, 30) এবং (0, 50)। এখন আমরা প্রতিটি কৌণিক বিন্দুতে Z -এর মান নির্ণয় করব।



চিত্র 12.2

কৌণিক বিন্দু	Z এর অনুরূপ মান	
(0, 0)	0	
(30, 0)	**120** ←	চরম
(20, 30)	110	
(0, 50)	50	

অতএব, (30, 0) বিন্দুতে Z এর চরম মান হলো 120 ।

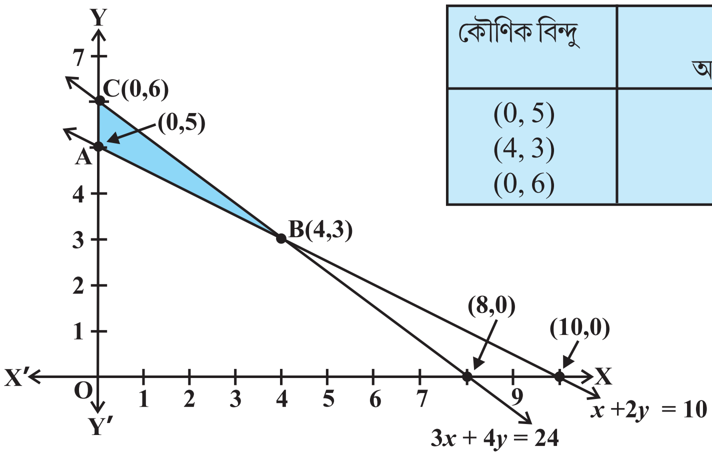
উদাহরণ 2 লৈখিকভাবে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সমাধান করো :

Z এর অবম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = 200\,x + 500\,y$ ... (1)

শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হল :

$$x + 2y \ \geq 10 \qquad \text{... (2)}$$
$$3x + 4y \ \leq 24 \qquad \text{... (3)}$$
$$x \ \geq \ 0, y \ \geq 0 \qquad \text{... (4)}$$

সমাধান চিত্র 12.3 এ রেখাঙ্কিত অঞ্চলটি হলো কার্যকর অঞ্চল ABC, যা (2) হতে (4) নং বাধাগোষ্ঠী তন্ত্র থেকে নির্ণয় করা যায়, যেটি **সীমাবদ্ধ**। কৌণিক বিন্দু A, B এবং C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0,5), (4,3) এবং



চিত্র 12.3

কৌণিক বিন্দু	Z এর অনুরূপ মান	
(0, 5)	2500	
(4, 3)	**2300** ←	Minimum
(0, 6)	3000	

(0,6) । এখন আমরা এই বিন্দুগুলোতে $Z = 200x + 500y$ নির্ণয় করব।

অতএব, (4, 3) বিন্দুতে Z এর অবম মান হলো 2300 ।

উদাহরণ 3 লৈখিক ভাবে নিম্নলিখিত সমস্যাটি সমাধান করো :

Z এর অবম এবং চরম মান নির্ণয় করো,

যেখানে $Z = 3x + 9y$ ... (1)

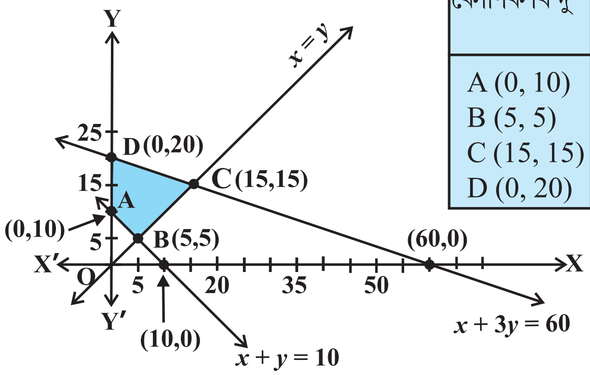
শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হল : $x + 3y \leq 60$ ... (2)

$x + y \geq 10$ ... (3)

$x \leq y$ ... (4)

$x \geq 0, y \geq 0$ ... (5)

সমাধান সর্বপ্রথমে চলো আমরা (2) হতে (5) নং রৈখিক অসমতা তন্ত্রের কার্যকর অঞ্চলের লেখচিত্র অঙ্কন করি। চিত্র 12.4-এ প্রদর্শিত কার্যকর অঞ্চলটি হল ABCD। লক্ষ করো যে কার্যকর অঞ্চলটি হল সীমাবদ্ধ। কৌণিক A, B, C এবং D এর স্থানাঙ্ক হলো যথাক্রমে (0, 10), (5, 5), (15,15) এবং (0, 20) ।



কৌণিক বিন্দু	$Z = 3x + 9y$ -এর অনুরূপ মান	
A (0, 10)	90	
B (5, 5)	**60** ←	চরম
C (15, 15)	**180**	(একাধিক প্রান্তিক
D (0, 20)	**180** ←	সমাধান)

12.4

আমরা এমন Z এর অবম এবং চরম মান নির্ণয় করব। সারণি থেকে, আমরা পাই যে কার্যকর অঞ্চলের B (5, 5) বিন্দুতে Z-এর অবম মান হল 60।

কার্যকর অঞ্চলের দুটি কৌণিক বিন্দু C (15, 15) এবং D (0, 20) তে Z-এর চরম মান হল প্রতিক্ষেত্রে 180।

মন্তব্য লক্ষ করো যে, উপরের উদাহরণে সমস্যাটির C এবং D বিন্দুতে একাধিক প্রান্তিক সমাধান আছে অর্থাৎ উভয় বিন্দুতে একই চরম মান 180 পাওয়া যায়। এরূপ ক্ষেত্রে, তুমি দেখতে পার যে, দুটি কৌণিক বিন্দু C এবং D সংযোগকারী CD রেখাংশের সকল বিন্দুতেও একই চরম মান দেয়। যদি দুটি বিন্দুতে একই অবম মান উৎপন্ন হয়, এই ক্ষেত্রেও এটি সত্য হয়।

উদাহরণ 4 লৈখিকভাবে বিষয়াত্মক অপেক্ষক

$$Z = -50x + 20y \quad \text{... (1)}$$

শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হল :

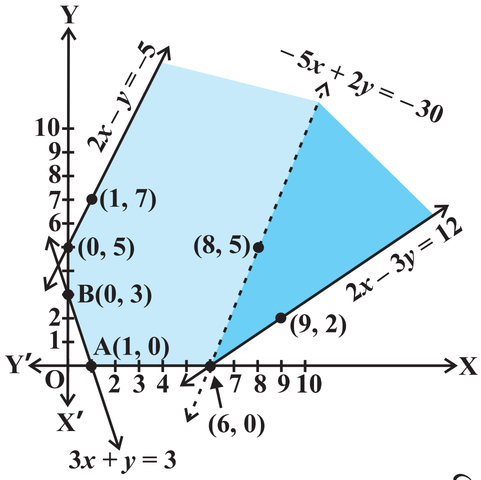
$$2x - y \geq -5 \quad \text{... (2)}$$

$$3x + y \geq 3 \quad \text{... (3)}$$

$$2x - 3y \leq 12 \quad \text{... (4)}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \text{... (5)}$$

সমাধান সর্বপ্রথমে, চলো আমরা (2) হতে (5) নং অসমতা তন্ত্রের কার্যকর অঞ্চলের লেখ অংকন করি। চিত্র 12.5 -এ কার্যকর অঞ্চলটি (রেখাঙ্কিত) দেখানো হয়েছে। লক্ষ করো যে কার্যকর অঞ্চলটি হলো **অসীমাবদ্ধ**। আমরা এখন কৌণিক বিন্দুগুলোতে Z -এর মান নির্ণয় করব।



কৌণিক বিন্দু	$Z = -50x + 20y$
(0, 5)	100
(0, 3)	**60**
(1, 0)	**–50**
(6, 0)	**–300** ← ক্ষুদ্রতম

চিত্র 12.5

এই সারণি হতে, আমরা দেখি যে কৌণিক বিন্দু (6, 0)-তে Z এর ক্ষুদ্রতম মান—300 । আমরা কি বলতে পারি যে Z এর অবম মান– 300 ? লক্ষ করো যে, যদি অঞ্চলটি সীমাবদ্ধ হতো, তবে Z এর এই সর্বনিম্ন মানই Z এর অবম মান (উপপাদ্য-2)। কিন্তু এখানে আমরা দেখছি যে, কার্যকর অঞ্চলটি হল অসীমাবদ্ধ। সুতরাং Z এর অবম মান – 300 হতে পারে অথবা নাও হতে পারে। এই সমস্যাটির সিদ্ধান্তে পৌঁছতে, আমর নিম্নলিখিত অসমতাটির লেখচিত্র অংকন করব—

$$-50x + 20y < -300 \text{ (কৌণিক বিন্দু পদ্ধতির ধাপ 3 এর (ii) নং দেখো)}$$

অর্থাৎ, $-5x + 2y < -30$

এবং উৎপন্ন খোলা অর্ধতলের কার্যকর অঞ্চলে কোনো সাধারণ বিন্দু আছে কিনা তা যাচাই করো। যদি এর কোনো সাধারণ বিন্দু থাকে, তবে Z এর অবম মান–300 হবে না। অন্যথায় Z এর অবম মান –300 হবে।

এটির সাধারণ বিন্দু আছে যা চিত্র 12.5 -এ দেখানো হয়েছে। সুতরাং শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী নিয়ে $Z = -50\,x + 20\,y$ এর কোনো অবম মান নেই।

উপরের উদাহরণে, তুমি কি বলতে পারো যে, (0,5) বিন্দুতে $z = -50\,x + 20\,y$ এর চরম মান 100 ? এর জন্য $-50\,x + 20\,y > 100$ লেখচিত্রের কার্যকর অঞ্চলে কোন সাধারণ বিন্দু আছে কি না তা, যাচাই করো। (কেন ?)

উদাহরণ 5 Z এর অবম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = 3x + 2y$

শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হল :

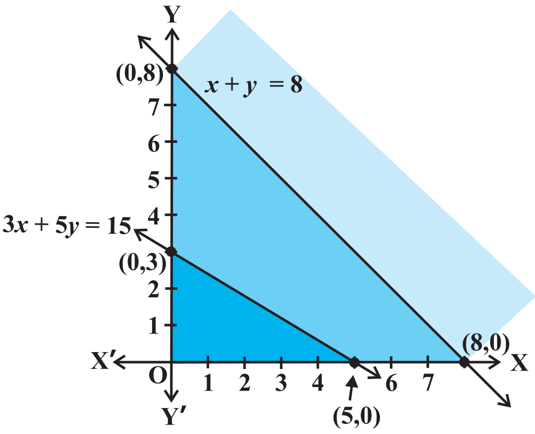
$$x + y \geq 8 \quad \ldots (1)$$

$$3x + 5y \leq 15 \quad \ldots (2)$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \ldots (3)$$

সমাধান চলো আমরা (1) হতে (3) নং অসমতাগুলোর লেখচিত্র অংকন করি (চিত্র 12.6 দেখো) । সেখানে কোনো কার্যকর অঞ্চল আছে কি ? এরূপ হয় কেন ?

চিত্র 12.6 হতে, তোমরা দেখতে পারো যে, যেখানে একইসঙ্গো সকল বাধাগোষ্ঠীকে সিদ্ধ করে, এরূপ কোনো বিন্দুর অস্তিত্ব নেই। এইভাবে এই সমস্যাটির কোনো কার্যকর অঞ্চল নেই, অতঃপর এটির কোন কার্যকর সমাধান নেই।



চিত্র 12.6

মন্তব্য এই পর্যন্ত আমরা সকল উদাহরণগুলো আলোচনা করেছি, আমরা রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার কিছু সাধারণ বৈশিষ্ট্য লক্ষ করেছি

(i) কার্যকর অঞ্চলটি সর্বদাই উত্তল অঞ্চল (convex region)।

(ii) বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম (অথবা অবম) সমাধান কার্যকর অঞ্চলের শীর্ষবিন্দু (কৌণিক বিন্দু)-তে পাওয়া যায়। যদি দুটি কৌণিক বিন্দুতে বিষয়াত্মক অপেক্ষকের একই চরম (অথবা অবম) মান পাওয়া যায়, তবে ঐ বিন্দুগুলোর সংযোজক রেখাংশের সকল বিন্দুতেও, ঐ একই চরম (অথবা অবম) মান পাওয়া যাবে।

অনুশীলনী 12.1

লৈখিকভাবে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সমাধান করো :

1. Z এর চরম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = 3x + 4y$

শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হল : $x + y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$

2. Z এর অবম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = -3x + 4y$
শর্তসাপেক্ষে $x + 2y \leq 8, 3x + 2y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0$.
3. Z এর চরম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = 5x + 3y$
শর্তসাপেক্ষে $3x + 5y \leq 15, 5x + 2y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0$.
4. Z এর অবম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = 3x + 5y$
যখন $x + 3y \geq 3, x + y \geq 2, x, y \geq 0$.
5. Z এর চরম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = 3x + 2y$
শর্তসাপেক্ষে $x + 2y \leq 10, 3x + y \leq 15, x, y \geq 0$.
6. Z এর অবম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = x + 2y$
শর্তসাপেক্ষে $2x + y \geq 3, x + 2y \geq 6, x, y \geq 0$.

দেখাও যে, Z এর অবম মান দুই এর অধিক বিন্দুতে পাওয়া যায়।

7. Z এর চরম এবং অবম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = 5x + 10y$
শর্তসাপেক্ষে $x + 2y \leq 120, x + y \geq 60, x - 2y \geq 0, x, y \geq 0$.
8. Z এর চরম এবং অবম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = x + 2y$
শর্তসাপেক্ষে $x + 2y \geq 100, 2x - y \leq 0, 2x + y \leq 200; x, y \geq 0$.
9. Z এর চরম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = -x + 2y$, শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হলো :
$x \geq 3, x + y \geq 5, x + 2y \geq 6, y \geq 0$.
10. Z এর চরম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = x + y$,
শর্তসাপেক্ষে $x - y \leq -1, -x + y \leq 0, x, y \geq 0$.

12.3 রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার বিভিন্ন প্রকারভেদ (Different Types of Linear Programming Problems)

কিছু গুরুত্বপূর্ণ রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা নিম্নে লিপিবদ্ধ করা হলো :

1. **উৎপাদন সমস্যা (Manufacturing problems)** এই সমস্যায়, আমরা নির্ণয় করব যে, একটি উৎপাদন সংস্থা দ্বারা বিভিন্ন পণ্যের সংখ্যা যা উৎপাদন করা এবং বিক্রি করা উচিত, যখন প্রতিটি পণ্যের জন্য একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক শ্রমিক সংখ্যা, মেশিনে ব্যবহৃত সময়, শ্রম ঘণ্টা, উৎপাদিত পণ্যের জন্য গুদামে রাখার জায়গা ইত্যাদির উপর লক্ষ রাখতে হবে যাতে সর্বাধিক লাভ হয়।
2. **পথ্য বিষয়ক সমস্যা (Diet problems)** এই সমস্যায়, আমরা বিভিন্ন ধরনের উপাদান পুষ্টির পরিমাণ নির্ণয় করব যা পথ্যের মধ্যে থাকা উচিত যাতে প্রয়োজনীয় পথ্যের মূল্য সর্বনিম্ন হয়, যেখানে এদের প্রতিটির মধ্যে সর্বনিম্ন পরিমাণ উপাদান/পুষ্টি থাকা প্রয়োজন।
3. **পরিবহণ সমস্যা (Transportation problems)** এই সমস্যায়, আমরা বিভিন্ন জায়গায় অবস্থিত উৎপাদক স্থান/কারখানা থেকে বিভিন্ন বাজারে একটি পণ্য সরবরাহে ন্যূনতম খরচের জন্য পরিবহণ প্রণালী নির্ণয় করব।

চলো আমরা এখন এই ধরনের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সমাধান করি :

উদাহরণ 6 পথ্য বিষয়ক সমস্যা : একটি পথ্য নির্ণায়ক ব্যক্তি দুধরনের খাদ্য এরূপভাবে মেশাতে চায় যাতে মিশ্রণে উপস্থিত ভিটামিনে কমপক্ষে 8 একক ভিটামিন A এবং 10 একক ভিটামিন C থাকে। খাদ্য 'I' -এ প্রতি কেজিতে 2 একক ভিটামিন A এবং 1 একক ভিটামিন C আছে। খাদ্য 'II' -এ প্রতি কেজিতে 1 একক ভিটামিন A এবং 2 একক ভিটামিন C আছে। খাদ্য 'I'-এর প্রতি কেজির মূল্য 50 টাকা এবং খাদ্য 'II' -এর প্রতি কেজির মূল্য 70 টাকা। এই সমস্যাটিকে একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার আকারে প্রকাশ করো যাতে মিশ্রণটির মূল্য সর্বনিম্ন হয়।

সমাধান ধরো মিশ্রণে x কেজি খাদ্য 'I' এবং y কেজি খাদ্য 'II' আছে। স্পষ্টতই, $x \geq 0, y \geq 0$ । প্রদত্ত তথ্য থেকে আমরা নিম্নলিখিত সারণিটি তৈরি করি :

সম্পদ	খাদ্য I (x)	খাদ্য II (y)	প্রয়োজনীয়তা
ভিটামিন A (একক প্রতি কেজিতে)	2	1	8
ভিটামিন C (একক প্রতি কেজিতে)	1	2	10
মূল্য (টাকা প্রতি কেজি)	50	70	

যেহেতু মিশ্রণটিতে অবশ্যই কমপক্ষে 8 একক ভিটামিন A এবং 10 একক ভিটামিন C আছে, আমাদের বাধাগোষ্ঠী হল :

$$2x + y \geq 8$$
$$x + 2y \geq 10$$

x কেজি খাদ্য 'I' এবং y কেজি খাদ্য 'II' এর মোট ক্রয়মূল্য Z হলে,

$$Z = 50x + 70y$$

অতএব, এই সমস্যাটির গাণিতিক প্রকাশ হলো :

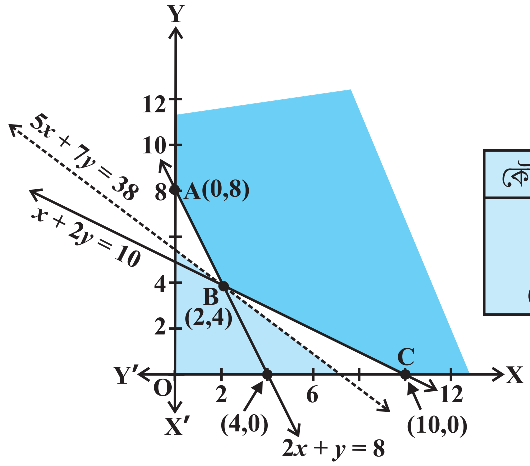
Z এর অবম মান নির্ণয় করো, যখন $Z = 50x + 70y$ ... (1)

শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হল :

$$2x + y \geq 8 \quad \text{... (2)}$$
$$x + 2y \geq 10 \quad \text{... (3)}$$
$$x, y \geq 0 \quad \text{... (4)}$$

চলো আমরা (2) থেকে (4) নং অসমতার লেখচিত্র অংকন করি। এই তন্ত্র দ্বারা নির্ণিত কার্যকর অঞ্চল চিত্র 12.7 -এ দেখানো হয়েছে। এখানে আবার লক্ষ করো যে, কার্যকর অঞ্চলটি হলো **অসীমাবদ্ধ**।

চলো আমরা কৌণিক বিন্দু A(0,8), B(2,4) এবং C(10,0)-তে Z এর মান নির্ণয় করি।



কৌণিক বিন্দু	$Z = 50x + 70y$
(0,8)	560
(2,4)	**380** ←
(10,0)	500

অবম

চিত্র 12.7

সারণিতে আমরা লক্ষ করি যে (2,4) বিন্দুতে Z এর ক্ষুদ্রতম মান 380 । আমরা কি বলতে পারি যে Z এর অবম মান 380 ? মনে রাখবে যে কার্যকর অঞ্চলটি হলো অসীমাবদ্ধ। সুতরাং, আমাদের নিম্নলিখিত অসমতাটির লেখচিত্র অংকন করতে হবে :

$$50x + 70y < 380 \quad \text{অর্থাৎ,} \quad 5x + 7y < 38$$

উৎপন্ন খোলা অর্ধতলের কার্যকর অঞ্চলের কোনো সাধারণ বিন্দু আছে কি না তা যাচাই করতে, চিত্র 12.7 হতে আমরা দেখতে পাই যে এর কোনো সাধারণ বিন্দু নেই।

এইভাবে, (2, 4) বিন্দুতে Z এর অবম মান 380 পাওয়া যায়। অতএব, পথ্য নির্ণায়ক ব্যক্তির প্রান্তিক মিশ্রণ কৌশল হবে 2 কেজি খাদ্য 'I' এবং 4 কেজি খাদ্য 'II' এর মিশ্রণ এবং এই কৌশল হতে, মিশ্রণের সর্বনিম্ন মূল্য হবে 380 টাকা।

উদাহরণ 7 **বণ্টন সমস্যা (Allocation problem)** কৃষকের একটি সমবায় সমিতির X এবং Y দুটি শস্য উৎপাদনের জন্য 50 হেক্টর জমি আছে। শস্য X এবং Y হতে প্রতি হেক্টরে আনুমানিক লাভ যথাক্রমে 10,500 টাকা এবং 9,000 টাকা। আগাছা নিয়ন্ত্রণের জন্য একটি তরল আগাছানাশক X এবং Y শস্যের জন্য প্রতি হেক্টরে 20 এবং 10 লিটার ব্যবহার করতে হবে। উপরন্তু, এই জমি থেকে নিকাশী সংগ্রহ করে এমন একটি পুকুররের মাছ ও এটিকে ব্যবহার করে এরূপ বন্যপ্রাণীদের রক্ষার জন্য 800 লিটারের বেশি আগাছা নাশক ব্যবহার করা উচিত নয়। সমিতির মোট লাভ সর্বাধিক করার জন্য প্রতিটি শস্যের জন্য কতটুকু জমি বণ্টন করা উচিত?

সমাধান ধরো X শস্যের জন্য x হেক্টর জমি এবং Y শস্যের জন্য y হেক্টর জমি বণ্টন করা হয়েছে। স্পষ্টতই, $x \geq 0, y \geq 0$ ।

শস্য X -এর প্রতি হেক্টরে লাভের পরিমাণ = 10500 টাকা

শস্য Y -এর প্রতি হেক্টরে লাভের পরিমাণ = 9000 টাকা

সুতরাং, মোট লাভ = $(10500x + 9000y)$ টাকা

এই সমস্যাটির গাণিতিক প্রকাশ হল নিম্নরূপ :

Z এর চরম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = 10500\,x + 9000\,y$

শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হল :

$x + y \le 50$ (জমির সঙ্গে সম্পর্কিত বাধাগোষ্ঠী) ... (1)

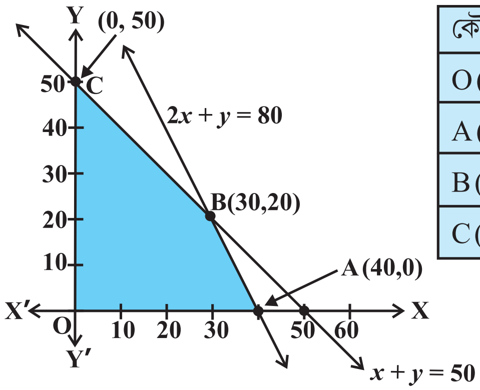
$20x + 10y \le 800$ (ব্যবহৃত আগাছা নাশকের সঙ্গে সম্পর্কিত বাধাগোষ্ঠী)

অর্থাৎ, $2x + y \le 80$ ... (2)

$x \ge 0,\ y \ge 0$ (অ-ঋণাত্মক বাধাগোষ্ঠী) ... (3)

চলো আমরা (1) হতে (3) নং অসমতা তন্ত্রের লেখচিত্র অংকন করি। কার্যকর অঞ্চল OABC চিত্র 12.8 -এ দেখানো (রেখাঙ্কিত) হয়েছে। লক্ষ করো যে কার্যকর অঞ্চলটি **সীমাবদ্ধ** ।

কৌণিক বিন্দু O, A, B এবং C -এর স্থানাঙ্ক হলো যথাক্রমে (0, 0), (40, 0), (30, 20) এবং (0, 50)। চলো আমরা বিষয়াত্মক অপেক্ষক $Z = 10500\,x + 9000y$ এর মান এই শীর্ষবিন্দুগুলোতে নির্ণয় করি, যাদের মধ্যে একটি সর্বাধিক লাভ দেয়।



কৌণিক বিন্দু	$Z = 10500x + 9000y$	
O (0, 0)	0	
A (40, 0)	420000	
B (30, 20)	**495000** ←	চরম
C (0,50)	450000	

চিত্র 12.8

অতএব, সমিতি X শস্যের জন্য 30 হেক্টর এবং Y শস্যের জন্য 20 হেক্টর বণ্টনের দ্বারা সর্বাধিক 4,95,000 টাকা লাভ করবে।

উদাহরণ 8 **উৎপাদনের সমস্যা** একটি উৎপাদনকারী সংস্থা একটি পণ্যের দুটি মডেল A এবং B প্রস্তুত করে। A মডেলের প্রতিটি পণ্য সাজানোর (fabricating) জন্য 9 শ্রমঘণ্টা (labour hours) এবং পালিশ (finishing) করার জন্য 1 শ্রমঘণ্টা প্রয়োজন। B মডেলের প্রতিটি পণ্য সাজানোর জন্য 12 শ্রমঘণ্টা এবং পালিশ করার জন্য 3 শ্রমঘণ্টা প্রয়োজন। সাজানোর জন্য এবং পালিশ করার জন্য সর্বাধিক যথাক্রমে 180 এবং 30 শ্রমঘণ্টা পাওয়া যায়। সংস্থাটি A মডেলের প্রতিটি পণ্যের উপর 8000 টাকা এবং B মডেলের প্রতিটি পণ্যের উপর 12000 টাকা লাভ করে। প্রতি সপ্তাহে কতগুলো মডেল A এবং মডেল B এর পণ্য প্রস্তুত করা উচিত যাতে লাভ সর্বাধিক হয়? প্রতি সপ্তাহে সর্বাধিক লাভ কত?

সমাধান মনে করো, মডেল A এর পণ্য সংখ্যা x টি এবং মডেল B এর পণ্য সংখ্যা y টি। তবে

মোট লাভ (টাকায়) = $8000\,x + 12000\,y$

ধরো $$Z = 8000\,x + 12000\,y$$

এখন আমরা প্রদত্ত সমস্যাটিকে নিম্নলিখিত উপায়ে গাণিতিকভাবে লিখতে পারি।

Z এর চরম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = 8000\,x + 12000\,y$ ... (1)

শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হল :

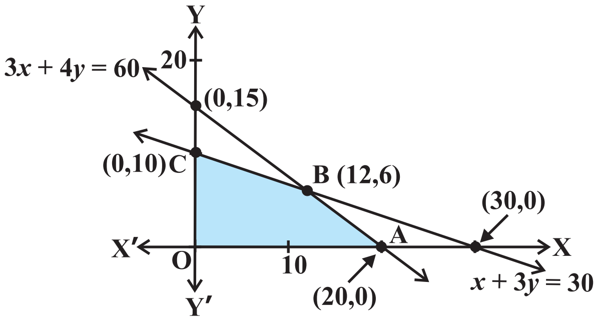
$9x + 12y \leq 180$ (সাজানোর ক্ষেত্রে বাধাগোষ্ঠী)

অর্থাৎ, $3x + 4y \leq 60$ ... (2)

$x + 3y \leq 30$ (পালিশ করার বাধাগোষ্ঠী) ... (3)

$x \geq 0,\ y \geq 0$ (অ-ঋণাত্মক বাধাগোষ্ঠী) ... (4)

রৈখিক অসমতা (2) হতে (4) নং দ্বারা কার্যকর অঞ্চল (রেখাঙ্কিত) OABC নির্ণয় করা হয়েছে যা চিত্র 12.9 এ দেখানো হয়েছে। লক্ষ করো যে কার্যকর অঞ্চলটি হল সীমাবদ্ধ।



চিত্র **12.9**

চলো আমরা প্রতিটি কৌণিক বিন্দুতে বিষয়াত্মক অপেক্ষক, Z এর মান নির্ণয় করি যা নিম্নে দেখানো হয়েছে:

কৌণিক বিন্দু	$Z = 8000\,x + 12000\,y$	
0 (0, 0)	0	
A (20, 0)	160000	
B (12, 6)	**168000** ←	চরম
C (0, 10)	120000	

আমরা পাই যে B (12, 6) তে Z এর চরম মান 1,68,000। অতএব, সংস্থাটির A মডেলের 12টি পণ্য এবং B মডেলের 6 টি পণ্য উৎপাদন করা উচিত যাতে সর্বোচ্চ লাভ হয় এবং সর্বোচ্চ লাভের পরিমাণ হবে 1,68,000 টাকা।

অনুশীলনী 12.2

1. রেশমা দুই ধরনের খাদ্য P এবং Q মিশ্রিত করতে চায় যাতে মিশ্রণটিতে কমপক্ষে 8 একক ভিটামিন A এবং 11 একক ভিটামিন B থাকে। প্রতি কেজি খাদ্য P এর মূল্য 60 টাকা এবং প্রতি কেজি খাদ্য Q এর মূল্য 80 টাকা। খাদ্য P -এ প্রতি কেজিতে 3 একক ভিটামিন A এবং প্রতি কেজিতে 5 একক ভিটামিন B থাকে, যখন খাদ্য Q -এ প্রতি কেজিতে 4 একক ভিটামিন A এবং প্রতি কেজিতে 2 একক ভিটামিন B থাকে। মিশ্রণটির সর্বনিম্ন মূল্য নির্ণয় করো।

2. এক প্রকার কেক এর জন্য 200 গ্রাম ময়দা এবং 25 গ্রাম চর্বিযুক্ত পদার্থ (Fat) প্রয়োজন এবং অপর এক প্রকার কেক এর জন্য 100 গ্রাম ময়দা এবং 50 গ্রাম চর্বিযুক্ত পদার্থ প্রয়োজন। 5 কেজি ময়দা এবং 1 কেজি চর্বিযুক্ত পদার্থ দিয়ে সর্বাধিক কতগুলো কেক তৈরি করা যাবে। ধরে নাও যে কেক তৈরি করতে ব্যবহৃত অনান্য উপাদানগুলোর কোনো ঘাটতি নেই।

3. একটি কারখানা, টেনিস রেকেট এবং ক্রিকেট ব্যাট তৈরি করে। একটি টেনিস রেকেট তৈরি করতে মেশিনে 1.5 ঘণ্টা সময় এবং 3 ঘণ্টা কারিগরের সময় লাগে যেখানে একটি ক্রিকেট ব্যাট তৈরি করতে মেশিনে 3 ঘণ্টা সময় এবং 1 ঘণ্টা কারিগরের সময় লাগে। একদিনে কারখানার সবগুলো মেশিনের সময় মোট 42 ঘণ্টা এবং কারিগরের সময় 24 ঘণ্টার বেশি হতে পারবে না।
   (i) কারখানাটি সর্বোচ্চ ক্ষমতা দিয়ে কাজ করলে কতগুলো রেকেট এবং ব্যাট অবশ্যই তৈরি করা যায়?
   (ii) যদি একটি রেকেট এবং একটি ব্যাটের লাভ যথাক্রমে 20 টাকা এবং 10 টাকা হয়, তবে কারখানাটি সর্বোচ্চ ক্ষমতা দিয়ে কাজ করলে সর্বাধিক লাভের পরিমাণ নির্ণয় করো।

4. একজন প্রস্তুতকারক নাট্ (nut) এবং বোল্ট (bolt) তৈরি করে। এক পেকেট নাট্ তৈরি করতে মেশিন A -তে 1 ঘণ্টা এবং মেশিন B -তে 3 ঘণ্টা সময় লাগে। এক পেকেট বোল্ট তৈরি করতে মেশিন A-তে 3 ঘণ্টা এবং মেশিন B-তে 1 ঘণ্টা সময় লাগে। সে এক পেকেট নাট্-এ 17.50 টাকা এক পেকেট বোল্ট 7 টাকা লাভ করে। প্রত্যেক দিন প্রতি ধরনের কতগুলো পেকেট তৈরি করা হলে তার লাভের পরিমাণ সর্বাধিক হবে, যদি সে তার মেশিনগুলোকে প্রতিদিন সর্বাধিক 12 ঘণ্টা চালু রাখে?

5. একটি কারখানা দুই ধরনের স্ক্রু (screw) A এবং B তৈরি করে। প্রতিধরনের স্ক্রু তৈরিতে দুই ধরনের মেশিন, একটি অটোমেটিক এবং একটি হস্তচালিত মেশিন ব্যবহার করা প্রয়োজন। এক প্যাকেট স্ক্রু A তৈরি করতে অটোমেটিক মেশিন 4 মিনিট এবং হস্তচালিত মেশিনে 6 মিনিট সময় লাগে, যেখানে এক প্যাকেট স্ক্রু B তৈরি করতে অটোমেটিক মেশিনে 6 মিনিট এবং হস্তচালিত মেশিনে 3 মিনিট সময় লাগে। প্রতিটি মেশিন প্রতিদিন সর্বাধিক 4 ঘণ্টা ব্যবহার করা যায়। উৎপাদক এক প্যাকেট স্ক্রু A, 7 টাকা লাভে এবং এক প্যাকেট স্ক্রু B, 10 টাকা লাভে বিক্রি করতে পারে। ধরে নাও যে সে উৎপাদিত সবগুলো স্ক্রু বিক্রি করতে পারে, তবে কারখানা মালিকের একদিনে প্রত্যেক প্রকার কতগুলো প্যাকেট স্ক্রু তৈরি করা উচিত, যাতে তার লাভের পরিমাণ সর্বাধিক হয়? সর্বাধিক লাভের পরিমাণ নির্ণয় করো।

6. একটি কুটির শিল্পে স্ট্যান্ড বাতি এবং কাঠের আলোকাবরণ (wooden shade) তৈরি করা হয়। প্রতিটি তৈরিতে একটি গ্লাইডিং/কাটিং (grinding/cutting) মেশিন এবং একটি স্প্রেয়ার ব্যবহার করা প্রয়োজন।

একটি স্ট্যান্ড বাতি তৈরিতে গ্লাইডিং/কাটিং মেশিনে 2 ঘণ্টা এবং স্প্রেয়ারে 3 ঘণ্টা সময় লাগে। একটি আলোকাবরণ তৈরিতে গ্লাইডিং/কাটিং মেশিনে 1 ঘণ্টা এবং স্প্রেয়ারে 2 ঘণ্টা সময় লাগে। একদিনে একটি স্প্রেয়ার সর্বাধিক 20 ঘণ্টা এবং গ্লাইডিং / কাটিং মেশিন সর্বাধিক 12 ঘণ্টা ব্যবহার করা যায়। একটি স্ট্যান্ড বাতি বিক্রি করে 5 টাকা এবং একটি আলোকাবরণ বিক্রি করে 3 টাকা লাভ হয়। ধরে নাও যে উৎপাদক, উৎপাদিত সকল স্ট্যান্ড বাতি এবং আলোকাবরণ বিক্রি করতে পারে। প্রত্যেক দিনের উৎপাদনের সে তার সময় কিভাবে ব্যবহার করবে যাতে লাভ সর্বাধিক হয়?

7. একটি কোম্পানি প্লাইউডের তৈরি দুই ধরনের অভিনব স্মারণিক উৎপাদন করে। A ধরনের প্রতিটি স্মারণিক তৈরিতে কাটিং এর জন্য 5 মিনিট এবং জোড়তে 10 মিনিট সময়ের প্রয়োজন। B ধরনের প্রতিটি স্মারণিক তৈরিতে কাটিং এর জন্য 8 মিনিট এবং জোড়তে 8 মিনিট সময়ের প্রয়োজন। কাটিং এর সর্বাধিক 3 ঘণ্টা 20 মিনিট এবং জোড়তে সর্বাধিক 4 ঘণ্টা সময় পাওয়া যায়। A ধরনের প্রতিটি স্মারণিকে 5 টাকা এবং B ধরনের প্রতিটি স্মারণিকে 6 টাকা লাভ হয়। সর্বাধিক লাভের জন্য কোম্পানির প্রতি ধরনের কতগুলো স্মারণিক তৈরি করা উচিত?

8. একজন ব্যবসায়ী দুই ধরনের ব্যক্তিগত কম্পিউটার বিক্রি করার পরিকল্পনা নেয়– একটি ডেস্কটপ মডেল (desktop model) এবং অপরটি পোর্টেবল মডেল (portable model) যাদের মূল্য যথাক্রমে 25000 টাকা এবং 40000 টাকা। সে অনুমান করল যে কম্পিউটারের মোট মাসিক চাহিদা 250 টির বেশি হবে না। যদি প্রতিটি ডেস্কটপ মডেলে 4500 টাকা এবং পোর্টেবল মডেলে 5000 টাকা লাভ হয় এবং সে যদি 70,00000 লক্ষ টাকার বেশি বিনিয়োগ করতে না চায় তবে নির্ণয় করো যে প্রতি ধরনের কম্পিউটার ব্যবসায়ীর কতগুলো মজুত করা উচিত যাতে তার লাভ সর্বাধিক হয়।

9. এরটি পথ্যে কমপক্ষে 80 একক ভিটামিন A এবং 100 একক খনিজ পদার্থ (minerals) থাকে। দুই ধরনের খাদ্য F_1 এবং F_2 পাওয়া যায়। প্রতি একক F_1 খাদ্যের মূল্য 4 টাকা এবং প্রতি একক F_2 খাদ্যের মূল্য 6 টাকা। প্রতি একক F_1 খাদ্যে 3 একক ভিটামিন A এবং 4 একক খনিজ পদার্থ আছে। প্রতি একক F_2 খাদ্যে 6 একক ভিটামিন A এবং 3 একক খনিজ পদার্থ আছে। এটিকে একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার আকারে সাজাও। এই পথ্যের ন্যূনতম মূল্য নির্ণয় করো যার মধ্যে এই দুটি খাদ্যের মিশ্রণ আছে এবং এর মধ্যে ন্যূনতম পুষ্টিমান বর্তমান।

10. দুই ধরনের সার F_1 এবং F_2 আছে। F_1 -এ 10% নাইট্রোজেন ও 6% ফসফোরিক অ্যাসিড এবং F_2 -এ 5% নাইট্রোজেন ও 10% ফসফোরিক অ্যাসিড আছে। মাটির অবস্থা পরীক্ষার পর, একজন কৃষক দেখল যে তার শস্যের জন্য কমপক্ষে 14 কেজি নাইট্রোজেন এবং 14 কেজি ফসফোরিক অ্যাসিডের প্রয়োজন। যদি প্রতি কেজি F_1 এর মূল্য 6 টাকা এবং প্রতি কেজি F_2 এর মূল্য 5 টাকা হয় তবে নির্ণয় করো যে প্রতি ধরনের সার কিভাবে ব্যবহার করা উচিত যাতে প্রয়োজনীয় পুষ্টি সর্বনিম্ন মূল্যে পাওয়া যায়। সর্বনিম্ন মূল্য কত?

11. রৈখিক অসমতা তন্ত্রগুলো $2x + y \le 10, x + 3y \le 15, x, y \ge 0$ দ্বারা নির্ণিত কার্যকর অঞ্চলের কৌণিক বিন্দুগুলো হলো : (0, 0), (5, 0), (3, 4) এবং (0, 5)। ধরো $Z = px + qy$, যেখানে $p, q > 0$। (3, 4) এবং (0, 5) উভয় বিন্দুতে Z এর মান চরম হতে p এবং q এর মধ্যে আরোপিত শর্ত হল—

(A) $p = q$ (B) $p = 2q$ (C) $p = 3q$ (D) $q = 3p$

বিবিধ উদাহরণ

উদাহরণ 9 পথ্য বিষয়ক সমস্যা একজন পথ্য নির্ণায়ক ব্যক্তির দুই ধরনের খাদ্য P এবং Q ব্যবহার করে একটি বিশেষ পথ্য তৈরি করতে হবে। প্রতি পেকেট (30 গ্রাম করে) খাদ্য P -তে 12 একক ক্যালসিয়াম, 4 একক আয়রন, 6 একক কোলেস্টেরেল এবং 6 একক ভিটামিন A বর্তমান। একই পরিমাণের প্রতি পেকেট খাদ্য Q-তে 3 একক ক্যালসিয়াম, 20 একক আয়রন, 4 একক কোলেস্টেরল এবং 3 একক ভিটামিন A বর্তমান। এই পথ্যে কমপক্ষে 240 একক ক্যালসিয়াম, কমপক্ষে 460 একক আয়রন এবং সর্বাধিক 300 একক কোলেস্টেরল প্রয়োজন। এই পথ্যে ভিটামিন A এর পরিমাণ সর্বনিম্ন করার জন্য প্রতিটি খাদ্যের কতগুলো পেকেট ব্যবহার করা উচিত। ভিটামিন A এর সর্বনিম্ন পরিমাণ কত?

সমাধান ধরো x এবং y যথাক্রমে খাদ্য P এবং Q এর পেকেট সংখ্যা। স্পষ্টতই $x \geq 0, y \geq 0$। প্রদত্ত সমস্যার গাণিতিক রূপটি নিম্নরূপ :

Z এর অবম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = 6x + 3y$ (ভিটামিন A)

শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হল :

$12x + 3y \geq 240$ (ক্যালসিয়ামের উপর বাধাগোষ্ঠী), অর্থাৎ, $4x + y \geq 80$ ... (1)

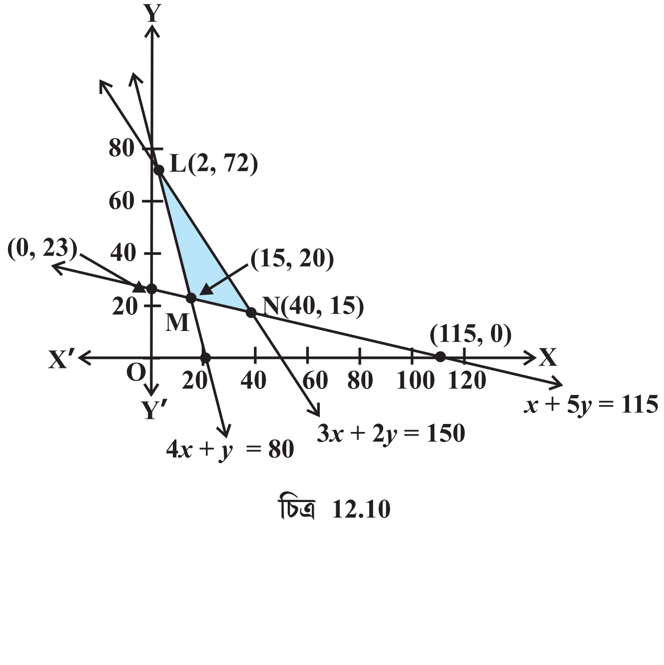
$4x + 20y \geq 460$ (আয়রনের উপর বাধাগোষ্ঠী), অর্থাৎ, $x + 5y \geq 115$ ... (2)

$6x + 4y \leq 300$ (কোলেস্টেরলের উপর বাধাগোষ্ঠী), অর্থাৎ, $3x + 2y \leq 150$ ... (3)

$x \geq 0, y \geq 0$ ... (4)

চলো আমরা (1) হতে (4) নং অসমতাগুলোর লেখচিত্র অংকন করি।

(1) হতে (4) নং বাধাগোষ্ঠীর দ্বারা নির্ণীত কার্যকর অঞ্চল (রেখাঙ্কিত) চিত্র 12.10 -এ দেখানো হয়েছে এবং লক্ষ করো যে এটি সীমাবদ্ধ।



চিত্র 12.10

কৌণিক বিন্দু L, M এবং N এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 72), (15, 20) এবং (40, 15) । চলো আমরা এই বিন্দুগুলোতে Z এর মান নির্ণয় করি :

কৌণিক বিন্দু	$Z = 6x + 3y$	
(2, 72)	228	
(15, 20)	**150** $\leftarrow$	অবম
(40, 15)	285	

সারণি হতে, আমরা পাই যে (15, 20) বিন্দুতে Z এর অবম মান আছে। অতএব, এই সমস্যায় প্রদত্ত বাধাগোষ্ঠী দিয়ে ভিটামিন A এর পরিমাণ সর্বনিম্ন হবে যদি বিশেষ পথ্যটিতে 15 পেকেট খাদ্য P এবং 20 পেকেট খাদ্য Q ব্যবহার করা হয়। ভিটামিন A এর সর্বনিম্ন পরিমাণ হবে 150 একক।

উদাহরণ 10 **উৎপাদন সমস্যা** একজন প্রস্তুতকারক তার কারখানায় তিনটি মেশিন I, II এবং III স্থাপন করলেন। মেশিন I এবং II দৈনিক সর্বাধিক 12 ঘণ্টা কাজ করতে সক্ষম যেখানে মেশিন III দৈনিক কমপক্ষে 5 ঘণ্টা অবশ্যই চালু থাকবে। সে শুধুমাত্র দুটি বস্তু M এবং N প্রস্তুত করে, যাহাতে তিনটি মেশিনেরই ব্যবহার প্রয়োজন হয়।

M এবং N এর প্রতিটির 1 একক তৈরি করতে তিনটি মেশিনে প্রয়োজনীয় সময় (ঘণ্টায়) নিম্নের সারণিতে দেওয়া হল :

বস্তু	মেশিনে প্রয়োজনীয় সময় (ঘণ্টা)		
	I	II	III
M	1	2	1
N	2	1	1.25

সে M এবং N বস্তুতে যথাক্রমে 600 টাকা এবং 400 টাকা লাভ করে। ধরো সে উৎপাদিত বস্তুগুলোর সবগুলো বিক্রি করতে পারে তবে তার লাভ সর্বাধিক হওয়ার জন্য প্রতিটি বস্তু কতগুলো প্রস্তুত করা উচিত? সর্বাধিক লাভ কত হবে?

সমাধান ধরো M এবং N বস্তুগুলোর সংখ্যা যথাক্রমে x এবং y ।
উৎপাদনে মোট লাভ = $(600\,x + 400\,y)$ টাকা
প্রদত্ত সমস্যার গাণিতিক রূপটি হল নিম্নরূপ :
Z এর চরম মান নির্ণয় করো, যেখানে $Z = 600\,x + 400\,y$
শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হল :

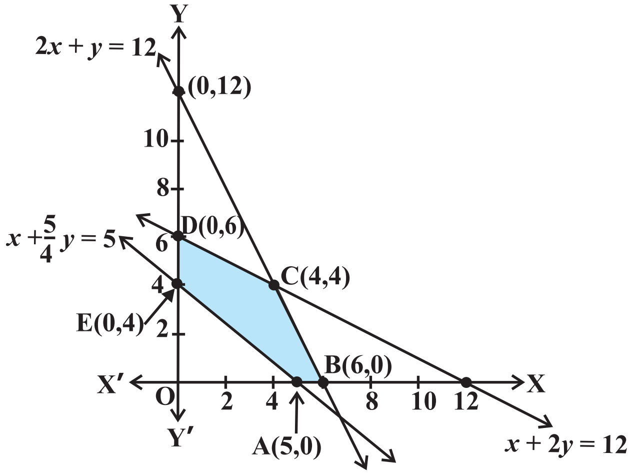
$x + 2y \leq 12$ (মেশিন I এর ক্ষেত্রে বাধাগোষ্ঠী) ... (1)

$2x + y \leq 12$ (মেশিন II এর ক্ষেত্রে বাধাগোষ্ঠী) ... (2)

$x + \frac{5}{4}\,y \geq 5$ (মেশিন III এর ক্ষেত্রে বাধাগোষ্ঠী) ... (3)

$x \geq 0,\ y \geq 0$ ... (4)

চলো আমরা (1) হতে (4) নং বাধাগোষ্ঠীর লেখচিত্র অংকন করি। (1) হতে (4) নং বাধাগোষ্ঠীর দ্বারা নির্ণীত কার্যকর অঞ্চল (রেখাঙ্কিত) ABCDE চিত্র 12.11 -এ দেখানো হয়েছে। লক্ষ করো যে কার্যকর অঞ্চলটি সীমাবদ্ধ, যার কৌণিক বিন্দু A, B, C, D এবং E এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (5, 0) (6, 0), (4, 4), (0, 6) এবং (0, 4) ।



চিত্র 12.11

চলো আমরা এই কৌণিক বিন্দুগুলোতে $Z = 600\,x + 400\,y$ নির্ণয় করি।

কৌণিক বিন্দু	$Z = 600\,x + 400\,y$	
(5, 0)	3000	
(6, 0)	3600	
(4, 4)	**4000** ←	চরম
(0, 6)	2400	
(0, 4)	1600	

আমরা দেখি যে (4, 4) বিন্দুতে Z এর চরম মান আছ। সুতরাং, সর্বোচ্চ লাভ 4000 টাকা পেতে প্রস্তুতকারককে প্রতিটি বস্তু 4 টি করে উৎপাদন করতে হবে।

উদাহরণ 11 **পরিবহণ সমস্যা** দুটি কারখানা, একটি স্থান P তে এবং অপরটির স্থান Q তে অবস্থিত এ স্থানগুলো থেকে A, B এবং C -তে অবস্থিত তিনটি ডিপোর প্রত্যেকটিতে একটি নির্দিষ্ট পণ্য সরবরাহ করা হয়। ডিপোগুলোতে পণ্যের সাপ্তাহিক প্রয়োজনীয়তা যথাক্রমে 5, 5 এবং 4 একক যেখানে P ও Q কারখানার

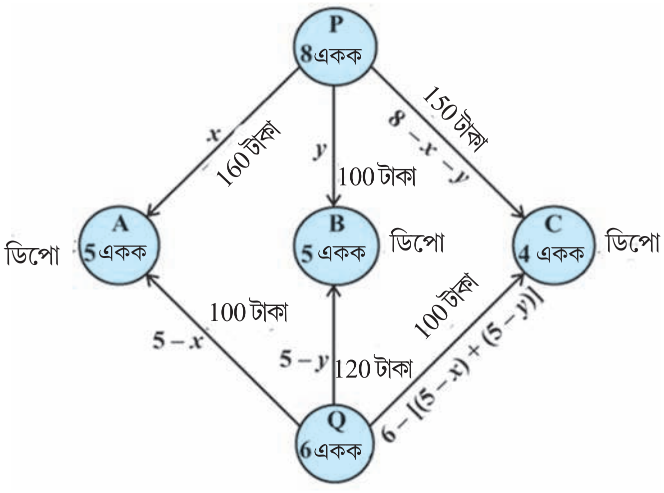
উৎপাদন ক্ষমতা যথাক্রমে 8 এবং 6 একক। প্রতি এককে পরিবহণ ব্যয় নিম্নে দেওয়া হল :

থেকে / পর্যন্ত	খরচ (টাকায়)		
	A	B	C
P	160	100	150
Q	100	120	100

প্রতিটি কারখানা থেকে প্রত্যেকটি ডিপোতে কত একক পরিবহণ করা উচিত যাতে পরিবহণ ব্যয় সর্বনিম্ন হয়। সর্বনিম্ন পরিবহণ ব্যয় কত হবে?

সমাধান সমস্যাটি নিম্নলিখিতভাবে চিত্রায়িত করে ব্যাখ্যা করা যেতে পারে (চিত্র 12.12) :

ধরো কারখানা P হতে x একক এবং y একক পণ্য যথাক্রমে A এবং B ডিপোতে সরবরাহ করা হয়। তখন $(8 - x - y)$ একক C ডিপোতে সরবরাহ করা হয়ে থাকে (কেন?)



চিত্র 12.12

অতএব, আমরা পাই $\quad x \geq 0, y \geq 0$ এবং $8 - x - y \geq 0$

অর্থাৎ, $\quad x \geq 0, y \geq 0$ এবং $x + y \leq 8$

এখন, A ডিপোতে পণ্যের সাপ্তাহিক প্রয়োজনীয়তা হলো 5 একক। যেহেতু কারখানা P হতে x একক পরিবহণ করা হয় তাহলে অবশিষ্ট $(5 - x)$ একক কারখানা Q হতে পরিবহণ করা প্রয়োজন। স্পষ্টতই, $5 - x \geq 0$, অর্থাৎ, $x \leq 5$।

অনুরূপভাবে, $(5 - y)$ এবং $6 - (5 - x + 5 - y) = x + y - 4$ একক পণ্য কারখানা Q হতে যথাক্রমে B এবং C ডিপোতে পরিবহণ করা হবে।

এইভাবে, $\quad 5 - y \geq 0 \;,\; x + y - 4 \geq 0$

অর্থাৎ, $\quad y \leq 5 \;,\; x + y \geq 4$

মোট পরিবহণ খরচ Z হল,

$$Z = 160\,x + 100\,y + 150\,(8 - x - y) + 100\,(5 - x) + 120\,(5 - y) + 100\,(x + y - 4)$$
$$= 10\,(x - 7\,y + 190)$$

অতএব, সমস্যাটির সংক্ষিপ্ত রূপটি হলো

Z এর অবম মান নির্ণয় করো, যেখানে

$Z = 10\,(x - 7y + 190)$

শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠী হল :

$x \geq 0,\ y \geq 0$ ... (1)

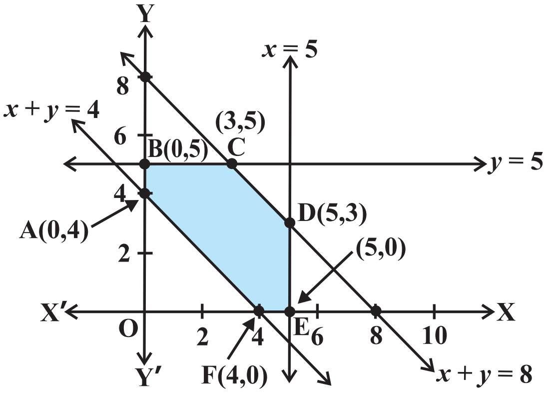
$x + y \leq 8$ ... (2)

$x \leq 5$ ... (3)

$y \leq 5$ ... (4)

এবং $x + y \geq 4$ ... (5)

(1)থেকে (5) নং পর্যন্ত বাধাগোষ্ঠী দ্বারা প্রদর্শিত ABCDEF রেখাঙ্কিত অঞ্চলই হল কার্যকর অঞ্চল (চিত্র 12.13).



চিত্র 12.13

লক্ষ করো যে কার্যকর অঞ্চলটি হলো সীমাবদ্ধ। কার্যকর অঞ্চলের কৌণিক বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক হল (0, 4), (0, 5), (3, 5), (5, 3), (5, 0) এবং (4, 0) ।চলো আমরা এই বিন্দুগুলোতে Z এর মান নির্ণয় করি।

কৌণিক বিন্দু	$Z = 10\,(x - 7\,y + 190)$	
(0, 4)	1620	
(0, 5)	**1550** ←	অবম
(3, 5)	1580	
(5, 3)	1740	
(5, 0)	1950	
(4, 0)	1940	

সারণি হতে, আমরা দেখি যে ((0, 5) বিন্দুতে Z এর অবম মান হলো 1550 ।

অতএব, প্রান্তীয় পরিবহণ কৌশলটি হল কারখানা P থেকে 0, 5 এবং 3 একক, কারখানা Q থেকে 5, 0 এবং 1 একক যথাক্রমে ডিপো A, B এবং C তে পরিবহণ করা। অনুরূপ কৌশলটিতে পরিবহণ খরচ সর্বনিম্ন হবে, অর্থাৎ খরচ 1550 টাকা হবে।

অধ্যায় 12 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. উদাহরণ 9 দেখো। পথ্যে ভিটামিন A এর পরিমাণ সর্বাধিক করতে প্রতিটি খাদ্যের কতগুলো পেকেট ব্যবহার করা উচিত? পথ্যে ভিটামিন A এর সর্বাধিক পরিমাণ কত?

2. একজন কৃষক গবাদি পশুর খাদ্যের দুটি ব্র্যান্ড P এবং Q মিশ্রিত করে। P ব্র্যান্ডের প্রতিটি ব্যাগের মূল্য 250 টাকা, যার মধ্যে 3 একক পুষ্টি উপাদান A, 2.5 একক উপাদান B এবং 2 একক উপাদান C বর্তমান। Q ব্র্যান্ডের প্রতিটি ব্যাগের মূল্য 200 টাকা, যার মধ্যে 1.5 একক পুষ্টি উপাদান A, 11.25 একক উপাদান B এবং 3 একক উপাদান C বর্তমান। পুষ্টি উপাদান A, B এবং C এর ন্যূনতম প্রয়োজনীয় তা যথাক্রমে 18 একক, 45 একক এবং 24 একক। মিশ্রণে উৎপন্ন প্রতিটি ব্যাগের মূল্য সর্বনিম্ন করতে প্রতিটি ব্র্যান্ডের কতগুলো ব্যাগ মিশ্রিত করা উচিত তা নির্ণয় করো। মিশ্রিত প্রতিটি ব্যাগের ন্যূনতম মূল্য কত?

3. একজন পথ্য নির্ণায়ক ব্যক্তি দুই প্রকার খাদ্য X এবং Y এরূপভাবে মিশ্রিত করতে চায় যে মিশ্রণে কমপক্ষে 10 একক ভিটামিন A, 12 একক ভিটামিন B এবং 8 একক ভিটামিন C বর্তমান। প্রতি কেজি খাদ্যে ভিটামিনের পরিমাণ নিম্নে দেওয়া হল :

খাদ্য	ভিটামিন A	ভিটামিন B	ভিটামিন C
X	1	2	3
Y	2	2	1

প্রতি কেজি খাদ্য X এর মূল্য 16 টাকা এবং প্রতি কেজি খাদ্য Y এর মূল্য 20 টাকা। প্রয়োজনীয় পথ্যের জন্য মিশ্রণের ন্যূনতম মূল্য নির্ণয় করো?

4. একজন প্রস্তুতকারক দুই ধরনের খেলনা A এবং B প্রস্তুত করে। এই উদ্দেশ্যে তিনটি মেশিনের প্রয়োজন হয় এবং এই মেশিনগুলোতে প্রতিটি খেলনার জন্য প্রয়োজনীয় সময় (মিনিটে) নিম্নে দেওয়া হল :

খেলনার ধরণ	মেশিন		
	I	II	III
A	12	18	6
B	6	0	9

প্রতিদিন প্রতিটি মেশিন সর্বাধিক 6 ঘণ্টা ব্যবহার করা যায়। যদি A ধরনের প্রতিটি খেলনাতে 7.50 টাকা এবং B ধরনের প্রতিটি খেলনাতে 5 টাকা লাভ হয়, তবে দেখাও যে সর্বাধিক লাভের জন্য প্রতিদিন A ধরনের 15 টি খেলনা এবং B ধরনের 30 টি খেলনা প্রস্তুত করা উচিত।

5. একটি উড়োজাহাজ সর্বাধিক 200 জন যাত্রী বহন করতে পারে। প্রতিটি এক্সিকিউটিভ শ্রেণির টিকিটে 1000 টাকা লাভ হয় এবং প্রতিটি ইকোনমি শ্রেণির টিকিটে 600 টাকা লাভ হয়। উড়োজাহাজ সংস্থা এক্সিকিউটিভ শ্রেণির জন্য কমপক্ষে 20 টি আসন সংরক্ষিত রাখে। আবার, এক্সিকিউটিভ শ্রেণি অপেক্ষা কমপক্ষে 4 গুণ যাত্রী ইকোনমি শ্রেণির ভ্রমণকে বেশি পছন্দ করে। উড়োজাহাজ সংস্থার সর্বাধিক লাভের জন্য প্রতি ধরনের কতগুলো টিকিট বিক্রি করতে হবে তা নির্ণয় করো। সর্বাধিক লাভ কত?

6. দুটি গুদামঘর A এবং B এর শস্য মজুত করার ক্ষমতা যথাক্রমে 100 কুইন্টাল এবং 50 কুইন্টাল। গুদামঘরগুলো থেকে 3 টি রেশন দোকান D, E এবং F -এ শস্য সরবরাহ করা হয়, যাদের প্রয়োজনীয়তা যথাক্রমে 60 কুইন্টাল, 50 কুইন্টাল এবং 40 কুইন্টাল। গুদামঘর থেকে রেশন দোকান পর্যন্ত প্রতি কুইন্টাল শস্যের পরিবহণ ব্যয় নিম্নের সারণিতে দেওয়া হল :

প্রতি কুইন্টালে পরিবহণ ব্যয় (টাকায়)		
থেকে / পর্যন্ত	**A**	**B**
D	6	4
E	3	2
F	2.50	3

পরিবহণ ব্যয় সর্বনিম্ন করতে সরবরাহকৃত শস্যগুলো কিভাবে পরিবহণ করা উচিত? সর্বনিম্ন পরিবহণ ব্যয় কত?

7. একটি তেল কোম্পানির যথাক্রমে 7000 লিটার এবং 4000 লিটার ধারণ ক্ষমতা সম্পন্ন দুটি ডিপো A এবং B রয়েছে। কোম্পানির তিনটি পেট্রোল পাম্প D, E এবং F -এ তেল সরবরাহ করতে হবে যাদের প্রয়োজনীয়তা যথাক্রমে 4500 লিটার, 3000 লিটার এবং 3500 লিটার। ডিপো হতে পেট্রোল পাম্পগুলোর দূরত্ব (কিলোমিটারে) নিম্নের সারণিতে দেওয়া হল :

দূরত্ব (কিলোমিটারে)		
থেকে / পর্যন্ত	**A**	**B**
D	7	3
E	6	4
F	3	2

ধরে নাও, যে প্রতি কিলোমিটারে 10 লিটার তেলের পরিবহণ ব্যয় 1 টাকা, তাহলে পরিবহণ ব্যয় সর্বনিম্ন করতে কিরূপে ঐ স্থান তিনটিতে তেল সরবরাহ করা উচিত? সর্বনিম্ন খরচ কত?

8. একজন ফল উৎপাদনকারী তার বাগানে P ব্র্যান্ড এবং Q ব্র্যান্ড এই দুই প্রকারের সার ব্যবহার করতে পারে। প্রতি প্রকার ব্র্যান্ডের প্রতিটি ব্যাগে নাইট্রোজেন, ফসফরিক অ্যাসিড, পটাশ এবং ক্লোরিনের পরিমাণ (কেজিতে) সারণিতে দেওয়া হল। পরীক্ষাগুলো নির্দেশ করে যে বাগানে কমপক্ষে 240 কেজি ফসফরিক অ্যাসিড, কমপক্ষে 270 কেজি পটাশ এবং সর্বাধিক 310 কেজি ক্লোরিনের প্রয়োজন হয়।

যদি উৎপাদক তার বাগানে নাইট্রোজেনের পরিমাণ হ্রাস করতে চায় তবে প্রতিটি ব্র্যান্ডের কত ব্যাগ ব্যবহার করা উচিত? বাগানে ব্যবহৃত নাইট্রোজেরে সর্বনিম্ন পরিমাণ কত?

প্রতি ব্যাগে পরিমাণ (কেজিতে)		
	P ব্র্যান্ড	Q ব্র্যান্ড
নাইট্রোজেন	3	3.5
ফসফোরিক অ্যাসিড	1	2
পটাশ	3	1.5
ক্লোরিন	1.5	2

9. প্রশ্ন 8 দেখো। যদি উৎপাদক বাগানে নাইট্রোজেনের ব্যবহার সর্বাধিক করতে চায় তবে প্রতিটি ব্র্যান্ডের কতগুলো ব্যাগ ব্যবহার করা উচিত? ব্যবহৃত নাইট্রোজেনের সর্বাধিক পরিমাণ কত?

10. একটি খেলনা প্রস্তুতকারক কোম্পানি দুই ধরনের পুতুল A এবং B তৈরি করে। বাজার যাচাই এবং পর্যাপ্ত উপাদান ইহা নির্দেশ করে যে প্রতি সপ্তাহে পুতুলের মোট উৎপাদন 1200 এর বেশি হওয়া উচিত নয় এবং B ধরনের পুতুলের চাহিদা A ধরনের পুতুলের চাহিদার অর্ধেকের চেয়ে অধিক। উপরন্তু, A ধরনের পুতুলের উৎপাদন স্তর অপর ধরনের উৎপাদন স্তরের 3 গুণ থেকে 600 একক বেশি। যদি কোম্পানি A এবং B প্রতিটি পুতুলে যথাক্রমে 12 টাকা এবং 16 টাকা লাভ করে, তবে সর্বাধিক লাভের জন্য প্রত্যেক প্রকারের সাপ্তাহিক উৎপাদন কি হওয়া উচিত?

সারসংক্ষেপ

- একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা হল এরূপ একটি সমস্যা যেটি বিভিন্ন চলরাশি বিশিষ্ট একটি রৈখিক অপেক্ষকের প্রান্তিক মান (চরম অথবা অবম) নির্ণয়ের সঙ্গে জড়িত (যাকে **বিষায়াত্মক অপেক্ষক** বলে), যার শর্তসাপেক্ষে চলরাশিগুলো হবে অ-ধনাত্মক এবং একটি রৈখিক অসমতার সেটকে সিদ্ধ করে (রৈখিক **বাধাগোষ্ঠী** বলা হয়)। চলরাশিগুলোকে কখনও কখনও **সিদ্ধান্ত চলক** এবং **অ-ঋণাত্মক** বলা হয়।
- কিছু গুরুত্বপূর্ণ রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা হল :
  - (i) পথ্য বিষয়ক সমস্যা
  - (ii) উৎপাদন সমস্যা
  - (iii) পরিবহণ সমস্যা
- একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সকল বাধাগোষ্ঠী সহ অ-ঋণাত্মক বাধাগোষ্ঠী $x \geq 0, y \geq 0$ দ্বারা নির্ণীত সাধারণ অঞ্চলকে বলা হয় এই সমস্যার **কার্যকর অঞ্চল** (অথবা **সমাধান অঞ্চল**)।
- কার্যকর অঞ্চলের ভিতরে এবং সীমারেখার ওপর অবস্থিত বিন্দুগুলো, বাধাগোষ্ঠীর কার্যকর সমাধানকে বোঝায়।

  কার্যকর অঞ্চলের বাইরে অবস্থিত যে-কোনো বিন্দু হল একটি অকার্যকর সমাধান ।

- কার্যকর অঞ্চলের যে-কোনো বিন্দু যা একটি বিষয়াত্মক অপেক্ষকের প্রান্তিক মান (চরম অথবা অবম) দেয়, তাকে বলা হয় **প্রান্তিক সমাধান** ।
- রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা সমাধানের মৌলিক উপপাদ্যগুলো হল নিম্নরূপ :

  উপপাদ্য 1 ধরো একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার জন্য R হল কার্যকর অঞ্চল (উত্তল বহুভুজ) এবং $Z = ax + by$ হল বিষয়াত্মক অপেক্ষক। যখন Z একটি প্রান্তিক মান (চরম বা অবম) দেয় যেটি রৈখিক অসমতা চল x এবং y দ্বারা শর্তসাপেক্ষে বাধাগোষ্ঠীরূপে বর্ণিত হয়, তবে এই প্রান্তিক মান কার্যকর অঞ্চলের একটি কৌণিক বিন্দু (শীর্ষবিন্দু)-তে অবশ্যই উৎপন্ন হয়।

  উপপাদ্য 2 ধরো একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার জন্য R হল কার্যকর অঞ্চল এবং $Z= ax + by$ হল বিষয়াত্মক অপেক্ষক। যদি R **সীমাবদ্ধ** হয়, তবে বিষয়াত্মক অপেক্ষক Z এর চরম এবং অবম উভয়েই R -এর মধ্যে থাকবে এবং এদের প্রতিটি R-এর একটি কৌণিক বিন্দু (শীর্ষবিন্দু)-তে উৎপন্ন হয়।
- যদি কার্যকর অঞ্চলটি অসীমাবদ্ধ হয়, তবে একটি চরম বা একটি অবম মানের অস্তিত্ব নাও থাকতে পারে। উপরন্তু, যদি ইহার অস্তিত্ব থাকে এটি অবশ্যই R -এর একটি কৌণিক বিন্দুতে উৎপন্ন হয়।
- একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সমাধানের জন্য **কৌণিক বিন্দু পদ্ধতি**। নিম্নলিখিত ধাপগুলো নিয়ে গঠিত :

  (i) একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার কার্যকর অঞ্চল এবং এর কৌণিক বিন্দুগুলো (শীর্ষবিন্দু) নির্ণয় করো।

  (ii) বিষয়াত্মক অপেক্ষক, $Z = ax + by$ এর প্রতিটি কৌণিক বিন্দুতে মান নির্ণয় করো। ধরো M এবং m যথাক্রমে ঐ বিন্দুগুলোতে বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান।

  (iii) যদি কার্যকর অঞ্চলটি অসীমাবদ্ধ হয়, তবে বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম এবং অবম মান যথাক্রমে M এবং m ।

  যদি কার্যকর অঞ্চলটি অসীমাবদ্ধ হয়, তখন

  (i) বিষয়াত্মক অপেক্ষকটির চরম মান M হবে যদি, কার্যকর অঞ্চলে $ax + by > M$ দ্বারা নির্ণীত খোলা অর্ধতলে কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে। অন্যথায়, বিষয়াত্মক অপেক্ষকটির কোনো চরম মান থাকে না।

  (ii) বিষয়াত্মক অপেক্ষকটির অবম মান m হবে যদি, কার্যকর অঞ্চলে $ax + by > M$ দ্বারা নির্ণীত খোলা অর্ধতলে কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে। অন্যথায়, বিষয়াত্মক অপেক্ষকটির কোনো অবম মান থাকে না।
- যদি কার্যকর অঞ্চলের দুটি কৌণিক বিন্দুতে উভয় প্রান্তিক সমাধান একই ধরনের হয়, অর্থাৎ উভয়েই একই চরম অথবা অবম মান উৎপন্ন করে, তখন এই দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের উপর যে-কোনো বিন্দুতেও একই ধরনের প্রান্তিক সমাধান থাকবে।

ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধে, যখন যুদ্ধ পরিচালিত করতে ব্যয় সংকোচন, শত্রুর ব্যাপক ক্ষতির পরিকল্পনা করা হয়েছিল তখন রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাগুলো সামনে এসেছে।

রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার প্রথম সমস্যাটি 1941 সালে রাশিয়ান গণিতবিদ্ L. Kantorovich এবং আমেরিকান অর্থনীতিবিদ্, F. L. Hitchcock সূত্রায়িত করেছেন, যাদের প্রত্যেকেই পরস্পর স্বাধীনভাবে কাজ করেছিলেন। এটি ছিল সুপরিচিত **পরিবহণ সমস্যা**। 1945 সালে একজন ইংরেজ অর্থনীতিবিদ্, G.Stigler , অপর একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার বর্ণনা করেছিলেন— যেটি ছিল *প্রান্তীয় পথ্য* নির্ণয়ের সমস্যা।

1947 সালে আমেরিকান অর্থনীতিবিদ্ G. B. Dantzig একটি কার্যকর পদ্ধতি প্রস্তাব করেছিলেন, এটি সিম্পেলেক্স পদ্ধতি (simplex method) নামে পরিচিত, যেটি একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাকে নির্দিষ্ট সংখ্যক ধাপে সমাধান করার একটি পুনরাবৃত্ত পদ্ধতি।

L. Katorovich এবং আমেরিকান গণিতীয় অর্থনীতিবিদ্ T. C. Koopmans কে 1975 সালে অর্থনীতিতে নোবেল পুরস্কারে ভূষিত করা হয়েছিল রৈখিক প্রোগ্রামবিধিতে তাদের পথ প্রদর্শক কাজের জন্য। কম্পিউটারের আবির্ভাব এবং প্রয়োজনীয় সফটওয়ার (softwares) প্রয়োগের ফলে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি মডেলে এটি প্রয়োগ সম্ভব হয়েছে অনেক ক্রমবর্ধমান জটিল সমস্যার ক্ষেত্রে।

অধ্যায় 13

সম্ভাবনা (PROBABILITY)

❖ *The theory of probabilities is simply the Science of logic quantitatively treated. – C.S. PEIRCE* ❖

13.1 ভূমিকা

পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে, আমরা কোনো একটি সমসম্ভব পরীক্ষায় (random experiment) ঘটনাসমূহের (events) অনিশ্চয়তার পরিমাপক হিসেবে সম্ভাবনার অধ্যয়ন করেছি। আমরা এখানে রাশিয়ান গণিতজ্ঞ, A.N. Kolmogorov (1903-1987) দ্বারা প্রণীত স্বতঃসিদ্ধ পদ্ধতি (axiomatic approach) আলোচনা করব এবং সম্ভাবনাকে কোনো পরীক্ষায় প্রাপ্ত ফলাফলগুলোর অপেক্ষক হিসেবে গণ্য করব। এছাড়াও আমরা সমভাবে সম্ভাব্য (equally likely) ফলাফলগুলোর ক্ষেত্রে সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধের তত্ত্ব এবং প্রাচীন (Classical) তত্ত্বের মধ্যে সাম্য (equivalence) প্রতিষ্ঠা করব। এই সম্পর্কের পরিপ্রেক্ষিতে, আমরা কোনো অসন্তত (discrete) নমুনা দেশ (sample space)-এর সাথে যুক্ত ঘটনাসমূহের সম্ভাবনা নির্ণয় করব। এছাড়াও আমরা সম্ভাবনার যোগের সূত্র (addition rule of probability) অধ্যয়ন করব। এই অধ্যায়ে, আমরা একটি ঘটনা শর্তাধীন সম্ভাবনা (conditional probability)-এর মতো একটি গুরুত্বপূর্ণ ধারণা এই শর্তে আলোচনা করব যখন সংশ্লিষ্ট আরেকটি ঘটনা ইতোপূর্বেই ঘটেছে এটি প্রদত্ত হয় এবং এটি বেইজের উপপাদ্য (Bayes' theorem), সম্ভাবনার গুণের সূত্র (multiplication rule) এবং ঘটনাসমূহের স্বাধীনতা (independence) বুঝতে সহায়ক হবে। এছাড়াও আমরা সমসম্ভব চলক (variable) ও এর সম্ভাবনা নিবেশন বা বিভাজন (distribution) এবং কোনো সম্ভাবনা নিবেশনের গড় (mean) ও ভেদমান (variance) এর মত গুরুত্বপূর্ণ ধারণাগুলো শিখব। এই অধ্যায়টির শেষ অনুচ্ছেদে, আমরা একটি গুরুত্বপূর্ণ অসন্তত সম্ভাবনা নিবেশন যাকে দ্বিপদ (Binomial) নিবেশন বলা হয়, এটি অধ্যয়ন করব। এই অধ্যায়ের সর্বত্র, আমরা পরীক্ষা সংক্রান্ত ফলাফলগুলো সমভাবে সম্ভাব্য হয় এমন ধরে নেব, যদি কোনো কিছু বিশেষভাবে উল্লেখ না থাকে।

Pierre de Fermat
(1601-1665)

13.2 শর্তাধীন সম্ভাবনা (Conditional Probability)

সম্ভাবনাতে এখন পর্যন্ত, আমরা ঘটনাসমূহের সম্ভাবনা নির্ণয়ের পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করেছি। যদি আমরা একই নমুনা দেশ থেকে দুটি ঘটনা নিই, তবে ঘটনা দুটির মধ্যে যে-কোনো একটি ঘটনা ঘটার তথ্যটি অন্য ঘটনার সম্ভাবনাকে প্রভাবিত করবে কি? চলো আমরা একটি সমসম্ভব পরীক্ষা, যেখানে ফলাফলগুলো ঘটার সম্ভাবনা সমান হয় তা নিয়ে উত্তর খুঁজে বের করার চেষ্টা করি।

তিনটি পক্ষপাতশূন্য (fair) মুদ্রার পরীক্ষাটি বিবেচনা করো। এই পরীক্ষাটির নমুনা দেশ হল

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

যেহেতু মুদ্রাগুলো পক্ষপাতশূন্য, অতএব আমরা এটি ধার্য করতে পারি যে, প্রতিটি নমুনা বিন্দুর সম্ভাবনা হল $\frac{1}{8}$ । ধরা যাক E হল 'কমপক্ষে দুটি হেড্ পড়ার' ঘটনা এবং F হল 'প্রথম মুদ্রাটিতে টেল্ পড়ার' ঘটনা। তাহলে,

$$E = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

এবং $$F = \{THH, THT, TTH, TTT\}$$

সুতরাং, $$P(E) = P(\{HHH\}) + P(\{HHT\}) + P(\{HTH\}) + P(\{THH\})$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2} \text{ (কেন ?)}$$

এবং $$P(F) = P(\{THH\}) + P(\{THT\}) + P(\{TTH\}) + P(\{TTT\})$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

আবার, $$E \cap F = \{THH\}$$

সুতরাং, $$P(E \cap F) = P(\{THH\}) = \frac{1}{8}$$

এখন, মনে করো প্রথম মুদ্রাটিতে টেল্ অর্থাৎ F ঘটেছে এটি দেওয়া আছে, তবে E ঘটার সম্ভাবনা কত ? F ঘটনা ঘটেছে এই তথ্যের সাহায্যে আমরা এই বিষয়ে নিশ্চিত যে, যেসব ক্ষেত্রে প্রথম মুদ্রা নিক্ষেপের ফলাফলে টেল্ উঠেনি সেগুলো আমরা E-এর সম্ভাবনা নির্ণয়ের জন্য বিবেচনা করব না। এই তথ্যটি, ঘটনা E-এর জন্য আমাদের নমুনা দেশের সেট S-কে, এর উপসেট F-এ সংকুচিত করেছে। অর্থাৎ, এই বাড়তি তথ্যটি প্রকৃতপক্ষে আমাদের বলে দিচ্ছে যে, এই পরিস্থিতিতে একটি নতুন সমসম্ভব পরীক্ষা হিসেবে বিবেচনা করা যেতে পারে, যার জন্য শুধুমাত্র এই ফলাফলগুলোর সবগুলোকে নিয়ে গঠিত নমুনা দেশটি ঘটনা F ঘটার উপযোগী হয়।

এখন, F-এর নমুনা বিন্দুটি যা ঘটনা E -এর উপযোগী তা হল THH।

অর্থাৎ, F-কে নমুনা দেশ হিসেবে বিবেচনা করে E-এর সম্ভাবনা = $\frac{1}{4}$,

বা, F ঘটনাটি ইতিপূর্বেই ঘটেছে এটি প্রদত্ত হলে, E-এর সম্ভাবনা $= \frac{1}{4}$

ঘটনা E-এর এই সম্ভাবনাকে *E-এর শর্তাধীন সম্ভাবনা বলা হয় যেখানে F ঘটনাটি ইতিপূর্বেই ঘটেছে এটি দেওয়া আছে* এবং এটাকে P (E|F) দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং, $$P(E|F) = \frac{1}{4}$$

লক্ষ করো যে, F-এর যে পদগুলো ঘটনা E -এর উপযোগী সেগুলো হল E এবং F-এর সাধারণ পদ, অর্থাৎ $E \cap F$-এর নমুনা বিন্দুসমূহ।

সুতরাং, F ঘটনাটি ইতিপূর্বেই ঘটেছে এটি দেওয়া থাকলে E-এর শর্তাধীন সম্ভাবনাকে আমরা নিম্নরূপে লিখতে পারি

$$P(E|F) = \frac{E \cap F\text{-এর উপযোগী মৌলিক (প্রাথমিক) উপাদানের সংখ্যা}}{F\text{-এর উপযোগী মৌলিক (প্রাথমিক) উপাদানের সংখ্যা}}$$

$$= \frac{n(E \cap F)}{n(F)}$$

নমুনা দেশের মৌলিক উপাদানের মোট সংখ্যা দিয়ে হর ও লব উভয়কে ভাগ করে, আমরা দেখতে পাচ্ছি যে, P(E|F) কে নিম্নরূপেও লেখা যায়

$$P(E|F) = \frac{\dfrac{n(E \cap F)}{n(S)}}{\dfrac{n(F)}{n(S)}} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \qquad \ldots (1)$$

লক্ষ করো যে (1) বৈধ হবে শুধুমাত্র তখনই যখন $P(F) \neq 0$ অর্থাৎ, $F \neq \phi$ হয় (কেন?)
অর্থাৎ, আমরা নিম্নরূপে শর্তাধীন সম্ভাবনার সংজ্ঞা দিতে পারি :

সংজ্ঞা 1 যদি E এবং F ঘটনাদ্বয় একটি সমসম্ভব পরীক্ষার সংশ্লিষ্ট একই নমুনা দেশের সাথে যুক্ত থাকে, তবে F ঘটনাটি ইতিপূর্বেই ঘটেছে এটি দেওয়া থাকলে E ঘটনার শর্তাধীন সম্ভাবনা অর্থাৎ, P (E|F) -কে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \text{ এই শর্তে যে } P(F) \neq 0$$

13.2.1 *শর্তাধীন সম্ভাবনার ধর্মাবলি (Properties of conditional probability)*

ধরা যাক, যদি কোনো পরীক্ষার সংশ্লিষ্ট একটি নমুনা দেশ S-এর সাথে যুক্ত দুটি ঘটনা E এবং F হয় তবে, আমরা নিম্নের ধর্মগুলো পাই

ধর্ম 1 $P(S|F) = P(F|F) = 1$

আমরা জানি যে,

$$P(S|F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

আবার,

$$P(F|F) = \frac{P(F \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

সুতরাং,

$$P(S|F) = P(F|F) = 1$$

ধর্ম 2 যদি একটি নমুনা দেশ S-এর সাথে যুক্ত যে-কোনো দুটি ঘটনা A এবং B এবং S-এর আরেকটি ঘটনা F এমন যে $P(F) \neq 0$ হয়, তবে

$$P((A \cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F) - P((A \cap B)|F)$$

নির্দিষ্টভাবে, যদি A এবং B ঘটনাদ্বয় বিচ্ছিন্ন হয়, তবে

$$P((A\cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F)$$

আমরা জানি,
$$P((A\cup B)|F) = \frac{P[(A\cup B)\cap F]}{P(F)}$$

$$= \frac{P[(A\cap F) \cup (B\cap F)]}{P(F)}$$

(সেটের ছেদের উপর সংযোগের বণ্টন সূত্র অনুযায়ী)

$$= \frac{P(A\cap F)+P(B\cap F)-P(A\cap B\ \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A\cap F)}{P(F)}+\frac{P(B\cap F)}{P(F)}-\frac{P[(A\cap B)\ \cap F]}{P(F)}$$

$$= P(A|F) + P(B|F) - P((A\cap B)|F)$$

যখন A এবং B ঘটনাদ্বয় পরস্পর বিচ্ছিন্ন, তখন

$$P((A \cap B)|F) = 0$$

$$\Rightarrow \quad P((A \cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F)$$

ধর্ম 3 $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

ধর্ম 1 থেকে, আমরা জানি যে $P(S|F) = 1$

$\Rightarrow \quad P(E \cup E'|F) = 1$ যেহেতু $S = E \cup E'$

$\Rightarrow \quad P(E|F) + P(E'|F) = 1$ যেহেতু E এবং E' ঘটনাদ্বয় পরস্পর বিচ্ছিন্ন

অর্থাৎ, $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

চলো এখন আমরা কিছু উদাহরণ বিবেচনা করি।

উদাহরণ 1 যদি $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{9}{13}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$ হয় তবে, $P(A|B)$-এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা জানি $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{13}}{\frac{9}{13}} = \frac{4}{9}$

উদাহরণ 2 একটি পরিবারে দুটি শিশু আছে। যদি জানা থাকে যে তাদের মধ্যে কমপক্ষে একজন শিশু বালক হয়, তবে উভয় শিশু বালক হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান বালককে b ও বালিকাকে g দিয়ে সূচিত কর। তাহলে পরীক্ষাটির নমুনা দেশ হল নিম্নরূপ

$$S = \{(b, b), (g, b), (b, g), (g, g)\}$$

ধরো E এবং F দিয়ে নিম্নলিখিত ঘটনাগুলো সূচিত করা হয় :

E : ‘উভয় শিশু বালক’

F : ‘কমপক্ষে একজন শিশু বালক’

তখন $\quad E = \{(b,b)\}$ এবং $F = \{(b,b), (g,b), (b,g)\}$

এখন $\quad E \cap F = \{(b,b)\}$

তাই, $\quad P(F) = \dfrac{3}{4}$ এবং $P(E \cap F) = \dfrac{1}{4}$

সুতরাং, $$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

উদাহরণ 3 1 থেকে 10 সংখ্যাগুলো দ্বারা চিহ্নিত 10টি কার্ড একটি বাক্সে রেখে সেগুলো ভালো করে মিশিয়ে তাদের মধ্য থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি কার্ড তোলা হল। যদি এটি জানা থাকে যে, তোলা কার্ডের ওপর লেখা সংখ্যাটি 3-এর চেয়ে বড়ো, তবে ওই সংখ্যাটি যুগ্ম সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ধরা যাক, A হল ‘তোলা কার্ডের ওপর লেখা সংখ্যাটি যুগ্ম’ হওয়ার ঘটনা এবং B হল ‘তোলা কার্ডের ওপর লেখা সংখ্যাটি 3-এর চেয়ে বড়ো’ হওয়ার ঘটনা। আমাদের $P(A|B)$ নির্ণয় করতে হবে।

এখন, পরীক্ষাটির নমুনা দেশ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

তাহলে, $\quad A = \{2, 4, 6, 8, 10\},\ B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

এবং $\quad A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$

এছাড়া, $\quad P(A) = \dfrac{5}{10},\ P(B) = \dfrac{7}{10}$ এবং $P(A\cap B) = \dfrac{4}{10}$

সুতরাং, $$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$$

উদাহরণ 4 কোনো একটি স্কুলে মোট 1000 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 430 জন হল বালিকা। এটি জানা আছে যে, 430 জনের মধ্যে 10% বালিকা দ্বাদশ শ্রেণিতে পড়াশোনা করে। যদি এটি জানা থাকে যে নির্বাচিত শিক্ষার্থীটি হল একজন বালিকা তবে যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত একজন শিক্ষার্থী দ্বাদশ শ্রেণিতে পড়াশোনা করে এর সম্ভাবনা কত?

সমাধান ধরা যাক E হল যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত একজন শিক্ষার্থী দ্বাদশ শ্রেণিতে পড়াশোনা করে এর ঘটনা এবং F হল যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত শিক্ষার্থী একজন বালিকা হওয়ার ঘটনা। আমাদের $P(E|F)$ নির্ণয় করতে হবে।

এখন $P(F) = \frac{430}{1000} = 0.43$ এবং $P(E \cap F) = \frac{43}{1000} = 0.043$ (কেন?)

সুতরাং, $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.043}{0.43} = 0.1$

উদাহরণ 5 একটি লুডোর ছক্কাকে তিনবার নিক্ষেপ করা হয়েছে। A এবং B ঘটনাদ্বয় নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে :

A : তৃতীয় নিক্ষেপে 4 উঠেছে

B : প্রথম নিক্ষেপে 6 এবং দ্বিতীয় নিক্ষেপে 5 উঠেছে।

B ঘটনাটি ইতিপূর্বেই ঘটেছে যদি ইহা জানা থাকে, তবে A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান নমুনা দেশটিতে ফলাফলের সংখ্যা হল 216 টি।

এখন,
$$A = \begin{Bmatrix} (1,1,4) & (1,2,4) & \ldots (1,6,4) & (2,1,4) & (2,2,4) & \ldots (2,6,4) \\ (3,1,4) & (3,2,4) & \ldots (3,6,4) & (4,1,4) & (4,2,4) & \ldots (4,6,4) \\ (5,1,4) & (5,2,4) & \ldots (5,6,4) & (6,1,4) & (6,2,4) & \ldots (6,6,4) \end{Bmatrix}$$

$$B = \{(6,5,1), (6,5,2), (6,5,3), (6,5,4), (6,5,5), (6,5,6)\}$$

এবং $A \cap B = \{(6,5,4)\}$.

এখন, $P(B) = \frac{6}{216}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{216}$

সুতরাং, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}} = \frac{1}{6}$

উদাহরণ 6 একটি লুডোর ছক্কাকে দুবার নিক্ষেপ করা হয়েছে এবং এটি লক্ষ করা হয়েছে যে, দুবারে ছক্কার ওপর ওঠা সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল হল 6। এখন 4 সংখ্যাটি কমপক্ষে একবার ওঠার শর্তাধীন সম্ভাবনা কত?

সমাধান ধরা যাক, E হল '4 সংখ্যাটি কমপক্ষে একবার ওঠার' ঘটনা এবং F হল 'ওঠা সংখ্যা দুটির যোগফল 6' হওয়ার ঘটনা।

তাহলে, $E = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (1,4), (2,4), (3,4), (5,4), (6,4)\}$

এবং $F = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

আমরা পাই, $P(E) = \frac{11}{36}$ এবং $P(F) = \frac{5}{36}$

এছাড়া $E \cap F = \{(2,4), (4,2)\}$

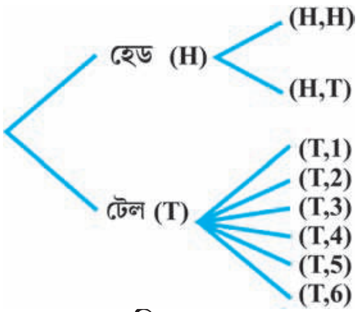
সুতরাং, $P(E \cap F) = \frac{2}{36}$

সুতরাং, নির্ণেয় সম্ভাবনা হল

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

উপরের আলোচনায় আমরা শর্তাধীন সম্ভাবনার জন্য পরীক্ষাটির সাপেক্ষে প্রাথমিক (elementary) ঘটনাসমূহকে সমভাবে সম্ভাব্য ধরে নিয়েছি এবং কোনো ঘটনার সম্ভাবনার অনুরূপ সংজ্ঞার ব্যবহার করেছি। যা হোক, সাধারণ ক্ষেত্রে যেখানে নমুনা দেশের সাপেক্ষে প্রাথমিক ঘটনাসমূহ সমভাবে সম্ভাব্য নয় সেখানেও একই সংজ্ঞা ব্যবহার করা যেতে পারে এবং তদানুসারে $P(E \cap F)$ এবং $P(F)$ সম্ভাবনাসমূহ গণনা করা হচ্ছে। চলো আমরা নিম্নলিখিত উদাহরণটি আলোচনা করি।

উদাহরণ 7 একটি মুদ্রা নিক্ষেপের পরীক্ষা বিবেচনা করো। যদি মুদ্রাটিতে হেড্ ওঠে তবে এটিকে পুনরায় নিক্ষেপ করো কিন্তু যদি এটিতে টেল ওঠে, তবে একটি লুডোর ছক্কা নিক্ষেপ করো। তাহলে লুডোর ছক্কাটিতে 4 অপেক্ষা বৃহত্তম সংখ্যা ওঠে, এই ঘটনাটির শর্তাধীন সম্ভাবনা নির্ণয় করো যদি ‘কমপক্ষে একটি টেল ওঠে’ এই ঘটনাটি জানা থাকে।



চিত্র 13.1

সমাধান প্রদত্ত পরীক্ষাটির ফলাফলগুলোকে পাশের নকশা চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় যাকে ‘বৃক্ষচিত্র’ (tree diagram) বলা হয়।

পরীক্ষার নমুনা দেশটিকে নিম্নের আকারে লেখা যেতে পারে

S = {(H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)}

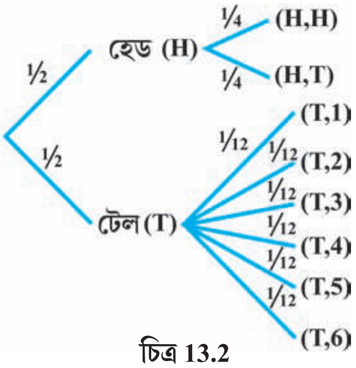
যেখানে (H, H) সূচিত করে যে উভয় নিক্ষেপের ফলাফল হল হেড্ এবং (T, i) সূচিত করে যে প্রথম নিক্ষেপের ফলাফল হল টেল এবং i হল ছক্কার ওপর প্রদর্শিত সংখ্যা, যেখানে $i = 1,2,3,4,5,6$ ।

অর্থাৎ, 8 টি মৌলিক ঘটনাসমূহ যথা

(H, H), (H, T), (T, 1), (T, 2), (T, 3) (T, 4), (T, 5), (T, 6)

এর সম্ভাবনাগুলো হল যথাক্রমে $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}$

যা চিত্র 13.2 থেকে স্পষ্ট।



চিত্র 13.2

ধরা যাক, F হল ‘কমপক্ষে একটি টেল’ হওয়ার ঘটনা এবং E হল ‘ছক্কাটিতে ওঠা সংখ্যাটি 4 থেকে বড়ো, হওয়ার ঘটনা। তাহলে

$$F = \{(H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$$

$$E = \{(T,5), (T,6)\} \text{ এবং } E \cap F = \{(T,5), (T,6)\}$$

এখন, $$P(F) = P(\{(H,T)\}) + P(\{(T,1)\}) + P(\{(T,2)\}) + P(\{(T,3)\}) + P(\{(T,4)\}) + P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\})$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

এবং $$P(E \cap F) = P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\}) = \frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

সুতরাং, $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9}$$

অনুশীলনী 13.1

1. প্রদত্ত E এবং F ঘটনাসমূহ এমন যে $P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.3$ এবং $P(E \cap F) = 0.2$। তাহলে $P(E|F)$ এবং $P(F|E)$ নির্ণয় করো।

2. যদি $P(B) = 0.5$ এবং $P(A \cap B) = 0.32$ হয়, তবে $P(A|B)$ নির্ণয় করো।

3. যদি $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$ এবং $P(B|A) = 0.4$ হয়, তবে নিম্নলিখিতগুলো নির্ণয় করো :

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(A \cup B)$

4. যদি $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ এবং $P(A|B) = \frac{2}{5}$ হয়, তবে $P(A \cup B)$-এর মান নির্ণয় করো।

5. যদি $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ এবং $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ হয়, তবে নিম্নলিখিতগুলো নির্ণয় করো:

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(B|A)$

6 থেকে 9 নং প্রশ্নের প্রতিটিতে $P(E|F)$ নির্ণয় করো।

6. একটি মুদ্রাকে তিনবার নিক্ষেপ করা হয়েছে, যেখানে

(i) E : তৃতীয় নিক্ষেপে হেড্ উঠেছে , F : প্রথম দুটি নিক্ষেপে হেড্ উঠেছে

(ii) E : কমপক্ষে দুটি হেড্ উঠেছে , F : সবচেয়ে বেশি দুটি হেড্ উঠেছে

(iii) E : সবচেয়ে বেশি দুটি টেল উঠেছে , F : কমপক্ষে একটি টেল উঠেছে

7. দুটি মুদ্রাকে একযোগে একবার টস্ করা হয়েছে, যেখানে

(i) E : একটি মুদ্রাতে টেল ওঠেছে, F : একটি মুদ্রাতে হেড্ ওঠেছে,

(ii) E : কোনো টেল ওঠেনি, F : কোনো হেড্ ওঠেনি,

8. একটি লুডোর ছক্কাকে তিনবার নিক্ষেপ করা হয়েছে,
E : তৃতীয় নিক্ষেপে 4 ওঠেছে, F : প্রথম দুটি নিক্ষেপে যথাক্রমে 6 এবং 5 ওঠেছে।

9. একটি পারিবারিক ছবিতে মা, বাবা ও ছেলে এলোমেলোভাবে একই লাইনে দাঁড়িয়েছে
E : এক প্রান্তে ছেলে দাঁড়িয়েছে, F : মাঝখানে বাবা দাঁড়িয়েছে।

10. একটি কালো এবং একটি লাল রঙের লুডোর ছক্কা নিক্ষেপ করা হয়েছে।
(a) যোগফল 9-এর চেয়ে বড়ো হওয়ার শর্তাধীন সম্ভাবনা নির্ণয় করো, যেখানে দেওয়া আছে যে কালো রঙের ছক্কায় ফলাফল 5 পড়েছে।
(b) যোগফল 8 হওয়ার শর্তাধীন সম্ভাবনা নির্ণয় করো, যদি দেওয়া থাকে যে লাল রঙের ছক্কায় প্রাপ্ত ফলাফলটি 4 থেকে ছোটো সংখ্যা হয়।

11. একটি পক্ষপাতশূন্য লুডোর ছক্কা গড়ানো হল : $E = \{1,3,5\}$, $F = \{2,3\}$ এবং $G = \{2,3,4,5\}$ ঘটনাসমূহ বিবেচনা করে
(i) $P(E|F)$ এবং $P(F|E)$ (ii) $P(E|G)$ এবং $P(G|E)$
(iii) $P((E \cup F)|G)$ এবং $P((E \cap F)|G)$ নির্ণয় করো।

12. মনে করো যে, প্রতিটি নবজাতক শিশু একজন বালক অথবা একজন বালিকা হওয়া সমভাবে সম্ভাব্য ঘটনা। একটি পরিবারে যদি দুজন শিশু থাকে, তবে উভয় শিশু বালিকা হওয়ার শর্তাধীন সম্ভাবনা কত হবে, যদি দেওয়া থাকে যে (i) ছোটো শিশুটি হল বালিকা, (ii) কমপক্ষে একজন শিশু হল বালিকা ?

13. একজন শিক্ষকের কাছে একটি প্রশ্ন ব্যাংক আছে। প্রশ্ন ব্যাংকটি 300টি সহজ সত্য / মিথ্যাধর্মী, 200টি কঠিন সত্য/ মিথ্যা ধর্মী, 500 টি সহজ বহুমুখী নির্বাচনধর্মী এবং 400 টি কঠিন বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্নাবলি নিয়ে গঠিত। প্রশ্ন ব্যাংকটি থেকে যদি যথেচ্ছভাবে একটি প্রশ্ন নির্বাচন করা হয় তবে, এটি একটি সহজ প্রশ্ন হবে এর সম্ভাবনা কত হবে, যদি এটি দেওয়া থাকে যে প্রশ্নটি একটি বহুমুখী নির্বাচনধর্মী ?

14. দেওয়া আছে যে, দুটি লুডোর ছক্কা নিক্ষেপের ফলে প্রাপ্ত ফলাফলগুলো বিভিন্ন। তাহলে ‘দুটি ছক্কাতে প্রাপ্ত ফলাফলগুলোর যোগফল 4’ এই ঘটনাটির সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

15. একটি লুডোর ছক্কা নিক্ষেপের পরীক্ষা বিবেচনা করো। নিক্ষেপের ফলে যদি 3 উঠে, তবে ছক্কাটি পুনরায় নিক্ষেপ করো এবং যদি অন্য কোনো সংখ্যা উঠে তবে একটি মুদ্রা টস্ করো। ‘মুদ্রাটিতে একটি টেল দেখায়’ এই ঘটনাটির শর্তাধীন সম্ভাবনা নির্ণয় করো যদি দেওয়া থাকে যে, ‘কমপক্ষে একটি লুডোর ছক্কায় 3 দেখায়’।

16 থেকে 17 নং প্রশ্নের প্রতিটিতে সঠিক উত্তরটি বাছাই করো :

16. যদি $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = 0$, তবে $P(A|B)$ হল
(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$
(C) অসংজ্ঞাত (D) 1

17. যদি A এবং B ঘটনাদ্বয় এমন যে $P(A|B) = P(B|A)$, তবে
(A) $A \subset B$ কিন্তু $A \neq B$ (B) $A = B$
(C) $A \cap B = \phi$ (D) $P(A) = P(B)$

13.3 সম্ভাবনা তত্ত্বের গুণের উপপাদ্য (Multiplication Theorem on Probability)

ধরা যাক, একটি নমুনা দেশ S-এর সাথে যুক্ত দুটি ঘটনা হল E এবং F। স্পষ্টতই, $E \cap F$ সেটটি E এবং F উভয়ই ঘটেছে এই ঘটনাটিকে সূচিত করে। অর্থাৎ, E এবং F ঘটনাদ্বয় একসঙ্গে ঘটেছে, এটিকে $E \cap F$ দ্বারা সূচিত করা হয়। $E \cap F$ ঘটনাটিকে EF রূপেও লেখা হয়।

প্রায়ই আমাদের EF ঘটনাটির সম্ভাবনা নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়। উদাহরণস্বরূপ, দুটি তাস একের পর এক টানার পরীক্ষায়, আমরা 'একটি রাজা এবং একটি রাণী' এই ঘটনাটির সম্ভাবনা নির্ণয়ে আগ্রহী হতে পারি। শর্তাধীন সম্ভাবনা ব্যবহার করে আমরা EF ঘটনাটির সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারি যা নিম্নে দেখানো হয়েছে :

আমরা জানি যে, একটি ঘটনা F ইতিপূর্বেই ঘটেছে এটি দেওয়া হয়েছে, এই শর্তে E ঘটনাটির শর্তাধীন সম্ভাবনাকে $P(E|F)$ দিয়ে সূচিত করা হয় এবং এটিকে লেখা যায়

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, P(F) \neq 0$$

এই ফলাফল থেকে, আমরা লিখতে পারি

$$P(E \cap F) = P(F) \, . \, P(E|F) \qquad \ldots (1)$$

এছাড়া, আমরা জানি যে

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}, P(E) \neq 0$$

বা, $$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \quad (\text{যেহেতু } E \cap F = F \cap E)$$

সুতরাং, $$P(E \cap F) = P(E). \; P(F|E) \qquad \ldots. (2)$$

(1) এবং (2) নং কে একত্রিত করে, আমরা পাই

$$P(E \cap F) = P(E) \; P(F|E)$$
$$= P(F) \; P(E|F)$$ এই শর্তে যে $P(E) \neq 0$ এবং $P(F) \neq 0$।

উপরের ফলাফলটি সম্ভাবনা *তত্ত্বের গুণের নিয়ম (multiplication rule of probability)* হিসেবে পরিচিত।

চলো, এখন আমরা একটি উদাহরণের সাহায্যে আলোচনা করি।

উদাহরণ 8 একটি পাত্রে 10টি কালো রঙের এবং 5টি সাদা রঙের বল আছে। পুনঃস্থাপন না করে পাত্রটি থেকে দুটি বল একের পর এক তোলা হল। তোলা বল দুটির উভয়ই কালো রঙের হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ধরা যাক, প্রথম ও দ্বিতীয় তোলা বল দুটি কালো রঙের হওয়ার ঘটনা যথাক্রমে E এবং F। আমাদের $P(E \cap F)$ অথবা $P(EF)$ নির্ণয় করতে হবে।

এখন, $$P(E) = P\,(\text{প্রথম তোলা বলটি কালো রঙের}) = \frac{10}{15}$$

এছাড়াও, প্রথম তোলা বলটি কালো রঙের এটি প্রদত্ত অর্থাৎ, E ঘটনাটি ঘটার পর পাত্রটিতে এখন 9টি কালো রঙের বল ও 5টি সাদা রঙের বল অবশিষ্ট আছে। সুতরাং প্রথম তোলা বলটি কালো রঙের এটি দেওয়া আছে এই শর্তে দ্বিতীয় তোলা বলটি কালো রঙের হওয়ার সম্ভাবনা আর কিছুই না এটি শুধু E ঘটনাটি ইতিপূর্বেই ঘটেছে এই শর্তে F ঘটনাটির শর্তাধীন সম্ভাবনাকে বোঝায়।

অর্থাৎ, $$P(F|E) = \frac{9}{14}$$

সম্ভাবনা তত্ত্বের গুণের নিয়মের সাহায্যে, আমরা পাই

$$P(E \cap F) = P(E)\ P(F|E)$$

$$= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$$

দুই এর অধিক ঘটনাসমূহের ক্ষেত্রে সম্ভাবনা তত্ত্বের গুণের নিয়ম (Multiplication rule of probability for more than two events) কোনো নমুনা দেশের সাথে যুক্ত তিনটি ঘটনা যদি E, F এবং G হয়, তবে আমরা পাই

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\ P(F|E)\ P(G|(E \cap F)) = P(E)\ P(F|E)\ P(G|EF)$$

একইভাবে, সম্ভাবনা তত্ত্বের গুণের নিয়মকে চারটি অথবা এর অধিক ঘটনাসমূহের জন্যও সম্প্রসারিত করা যেতে পারে।

তিনটি ঘটনার জন্য সম্ভাবনা তত্ত্বের গুণের নিয়মের বর্ধিত রূপ নিম্নলিখিত উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়।

উদাহরণ 9 অবিন্যস্তভাবে 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে পুনঃস্থাপন না করে পরপর তিনটি তাস টানা হল। প্রথম দুটি তাস রাজা ও তৃতীয় তাসটি টেক্কা (ace) টানা হয়েছে, এরূপ ঘটনার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ধরা যাক প্যাকেট থেকে টানা তাসটি রাজা হওয়ার ঘটনাকে K এবং ওই প্যাকেট থেকে টানা তাসটি টেক্কা হওয়ার ঘটনাকে A দিয়ে সূচিত করা হয়েছে। স্পষ্টতই, আমাদের P (KKA) নির্ণয় করতে হবে।

এখন, $$P(K) = \frac{4}{52}$$

এছাড়া, P (K|K) হল দ্বিতীয় বার রাজা পাওয়ার সম্ভাবনা এই শর্তে যে একটি রাজা ইতিমধ্যেই টানা হয়েছে। এখন প্যাকটে অবশিষ্ট (52 – 1) = 51 টি তাসের মধ্যে তিনটি রাজা আছে।

সুতরাং, $$P(K|K) = \frac{3}{51}$$

সবশেষে, P(A|KK) হল তৃতীয়বারে টানা তাসটি টেক্কা হওয়ার সম্ভাবনা এই শর্তে যে দুটি রাজা ইতিমধ্যেই টানা হয়েছে। এখন অবশিষ্ট 50টি তাসে চারটি টেক্কা আছে।

সুতরাং, $$P(A|KK) = \frac{4}{50}$$

সম্ভাবনা তত্ত্বের গুণের নিয়ম অনুযায়ী, আমরা পাই

$$P(KKA) = P(K) \quad P(K|K) \quad P(A|KK)$$
$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{2}{5525}$$

13.4 স্বাধীন ঘটনা (Independent Events)

52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে একটি তাস টানার পরীক্ষাটি বিবেচনা করো, যেখানে মৌলিক ঘটনাসমূহ সমভাবে সম্ভাব্য ঘটনা এমন ধরে নেওয়া হয়েছে। যদি 'একটি ইস্কাবনের তাস টানা হয়েছে' ও 'একটি টেক্কা টানা হয়েছে' এই ঘটনাদ্বয়কে যথাক্রমে E এবং F দ্বারা সূচিত করা হয়, তখন

$$P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \text{ এবং } P(F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

এছাড়া, 'ইস্কাবনের টেক্কা টানা হয়েছে' এই ঘটনাটিকে E এবং F উভয়ই ঘটেছে বলে ধরা হয়। অতএব

$$P(E \cap F) = \frac{1}{52}$$

সুতরাং,
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{4}$$

যেহেতু, $P(E) = \frac{1}{4} = P(E|F)$, আমরা বলতে পারি যে, F ঘটনাটি ঘটার জন্য E ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনাকে প্রভাবিত করবে না। আমরা আরো জানি যে,

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{13} = P(F)$$

আবার, $P(F) = \frac{1}{13} = P(F|E)$ থেকে বলা যায় যে, E ঘটনাটি ঘটার ফল F ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনাকে প্রভাবিত করবে না।

অর্থাৎ, দুটি ঘটনা E এবং F এমন যে তাদের মধ্যে যে-কোনো একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা, অপরটি ঘটার ফলাফলকে প্রভাবিত করে না। এ ধরনের ঘটনাসমূহকে *স্বাধীন ঘটনা* বলা হয়।

সংজ্ঞা 2 দুটি ঘটনা E এবং F কে স্বাধীন বলা হবে, যদি

$$P(F|E) = P(F) \text{ এই শর্তে যে } P(E) \neq 0$$

এবং $$P(E|F) = P(E) \text{ এই শর্তে যে } P(F) \neq 0$$

অর্থাৎ, এই সংজ্ঞায় $P(E) \neq 0$ এবং $P(F) \neq 0$ থাকা দরকার।

এখন, সম্ভাবনা তত্ত্বের গুণের নিয়ম অনুযায়ী, আমরা পাই

$$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F|E) \qquad \ldots (1)$$

যদি E এবং F ঘটনাদ্বয় স্বাধীন হয়, তবে (1) কে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F) \qquad \ldots (2)$$

অর্থাৎ, (2) নং সমীকরণ ব্যবহার করে আমরা দুটি ঘটনা স্বাধীন হওয়ার সংজ্ঞা নিম্নরূপেও দিতে পারি :

সংজ্ঞা 3 ধরা যাক, E এবং F একই সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত দুটি ঘটনা। তাহলে E এবং F ঘটনাদ্বয় স্বাধীন হবে, যদি $P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$ হয়।

মন্তব্য

(i) E এবং F ঘটনাদ্বয় অধীন (dependent) হবে যদি তারা স্বাধীন না হয় অর্থাৎ,

যদি $P(E \cap F) \neq P(E) \,.\, P(F)$ হয়।

(ii) কখনো কখনো স্বাধীন ঘটনাসমূহ ও পরস্পর পৃথক ঘটনাসমূহের মধ্যে একটি বিভ্রান্তি তৈরি হয়। 'স্বাধীন' পদটিকে 'ঘটনাসমূহের সম্ভাবনার' সাপেক্ষে সংজ্ঞায়িত করা হয় অপরপক্ষে 'পরস্পর পৃথক' পদটিকে শুধু ঘটনাসমূহের (নমুনা দেশের উপসেট) সাপেক্ষে সংজ্ঞায়িত করা হয়। অধিকন্তু, পরস্পর পৃথক ঘটনাসমূহের কখনো সাধারণ ফলাফল থাকে না, কিন্তু স্বাধীন ঘটনাসমূহের সাধারণ ফলাফল থাকতে পারে। স্পষ্টতই, 'স্বাধীন' এবং 'পরস্পর পৃথক' একই অর্থে ব্যবহৃত হয় না।

অন্যভাবে, দুটি স্বাধীন ঘটনা যাদের ঘটার অশূন্য সম্ভাবনা আছে তারা কখনো পরস্পর পৃথক হতে পারে না এবং বিপরীতক্রমে, অর্থাৎ, দুটি পরস্পর পৃথক ঘটনা যাদের ঘটার অশূন্য সম্ভাবনা আছে তারা কখনো স্বাধীন হতে পারে না।

(iii) দুটি পরীক্ষাকে স্বাধীন বলা হবে যদি E এবং F ঘটনাদ্বয়ের প্রতি জোড়ার জন্য, যেখানে E ঘটনাটি প্রথম পরীক্ষার সাথে যুক্ত এবং F ঘটনাটি দ্বিতীয় পরীক্ষার সাথে যুক্ত, যখন পরীক্ষা দুটি সম্পাদন করা হয় তখন E এবং F ঘটনাদ্বয় যুগপৎ ঘটার সম্ভাবনা হল পরীক্ষা দুটির ভিত্তিতে আলাদাভাবে গণনাকৃত P(E) এবং P(F)-এর গুণফল, অর্থাৎ, $P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$

(iv) A, B এবং C ঘটনা তিনটি পরস্পর স্বাধীন হবে, যদি

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)\, P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)\, P(C)$$

এবং $$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$$

তিনটি প্রদত্ত ঘটনাসমূহের জন্য যদি উপরের ফলাফলগুলোর মধ্যে কমপক্ষে একটি সত্য না হয়, তবে আমরা বলব যে ঘটনাসমূহ স্বাধীন নয়।

উদাহরণ 10 একটি লুডোর ছক্কা নিক্ষেপ করা হল। যদি '3-এর গুণিতক সংখ্যা ওঠে' এই ঘটনাটিকে E এবং 'যুগ্ম সংখ্যা ওঠে' এই ঘটনাটিকে F দিয়ে সূচিত করা হয়, তবে E এবং F ঘটনাদ্বয় স্বাধীন কিনা, নির্ণয় করো?

সমাধান আমরা জানি যে, নমুনা দেশটি হল $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

এখন $E = \{3, 6\}$, $F = \{2, 4, 6\}$ এবং $E \cap F = \{6\}$

তাহলে $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ এবং $P(E \cap F) = \frac{1}{6}$

স্পষ্টতই $P(E \cap F) = P(E). P(F)$

সুতরাং, E এবং F ঘটনাদ্বয় স্বাধীন।

উদাহরণ 11 একটি ঝোঁকশূন্য লুডোর ছক্কাকে দুইবার চালা হল। ধরা যাক 'প্রথম চালে অযুগ্ম সংখ্যা ওঠে' এই ঘটনাটিকে A এবং 'দ্বিতীয় চালে অযুগ্ম সংখ্যা ওঠে' এই ঘটনাটিকে B দিয়ে সূচিত করা হল। A এবং B ঘটনাদ্বয় স্বাধীন কিনা পরীক্ষা করো।

সমাধান পরীক্ষাটির সকল 36 সংখ্যক মৌলিক ঘটনাসমূহকে যদি সমভাবে সম্ভাব্য ঘটনা বলে বিবেচিত করা হয়, তবে আমরা পাই

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ এবং } P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

এছাড়া $P(A \cap B) = P$ (উভয় চালে অযুগ্ম সংখ্যা ওঠে)

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

এখন $P(A)\ P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

স্পষ্টতই $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

অর্থাৎ, A এবং B ঘটনাদ্বয় স্বাধীন।

উদাহরণ 12 তিনটি মুদ্রাকে একযোগে টস্ করা হল। 'তিনটি হেড্ অথবা তিনটি টেল' এই ঘটনাটিকে E, 'কমপক্ষে দুটি হেড্' একে F এবং 'সবচেয়ে বেশি দুটি হেড্' এটিকে G বিবেচনা করো। (E,F), (E,G) এবং (F,G)-এই জোড়াগুলোর মধ্যে কোন্‌গুলো স্বাধীন? কোন্‌গুলো অধীন?

সমাধান পরীক্ষাটির নমুনা দেশ হল নিম্নরূপ

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

স্পষ্টতই, $E = \{HHH, TTT\}$, $F = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

এবং $G = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

এছাড়া, $E \cap F = \{HHH\}, E \cap G = \{TTT\}, F \cap G = \{HHT, HTH, THH\}$

সুতরাং, $$P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, P(G) = \frac{7}{8}$$

এবং $$P(E \cap F) = \frac{1}{8}, P(E \cap G) = \frac{1}{8}, P(F \cap G) = \frac{3}{8}$$

আবার, $$P(E) \,.\, P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, P(E) \cdot P(G) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{32}$$

এবং $$P(F) \,.\, P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$$

অর্থাৎ, $$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$$
$$P(E \cap G) \neq P(E) \,.\, P(G)$$

এবং $$P(F \cap G) \neq P(F) \,.\, P(G)$$

সুতরাং, (E এবং F) ঘটনাদ্বয় স্বাধীন, এবং (E এবং G) ও (F এবং G) হল অধীন ঘটনাযুগল।

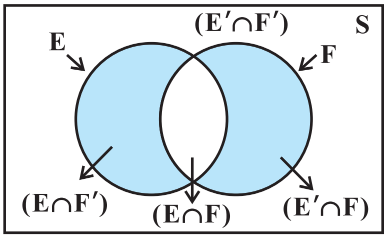
উদাহরণ 13 যদি E এবং F ঘটনাদ্বয় স্বাধীন হয়, তবে প্রমাণ করো যে E এবং F' ঘটনাদ্বয়ও স্বাধীন হবে।

সমাধান যেহেতু E এবং F ঘটনাদ্বয় স্বাধীন, তাহলে আমরা জানি

$$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F) \qquad \text{....(1)}$$

চিত্র 13.3-এ ভেন চিত্র থেকে এটি স্পষ্ট যে, $E \cap F$ এবং $E \cap F'$ হল পরস্পর পৃথক ঘটনা এবং এছাড়া,

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F')।$$



চিত্র 13.3

সুতরাং, $$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F')$$

বা, $$P(E \cap F') = P(E) - P(E \cap F)$$
$$= P(E) - P(E) \,.\, P(F) \qquad [(1)\text{-এর সাহায্যে}]$$
$$= P(E)\,(1 - P(F))$$
$$= P(E) \,.\, P(F')$$

সুতরাং, E এবং F' ঘটনাদ্বয় স্বাধীন।

> **দ্রষ্টব্য** একইভাবে, এটি দেখানো যেতে পারে যে, যদি E এবং F ঘটনাদ্বয় স্বাধীন হয়, তবে
>
> (a) E' এবং F ঘটনাদ্বয় স্বাধীন,
>
> (b) E' এবং F' ঘটনাদ্বয় স্বাধীন।

উদাহরণ 14 যদি A এবং B ঘটনা দুটি স্বাধীন হয়, তবে A এবং B-এর মধ্যে কমপক্ষে একটি ঘটার সম্ভাবনা হল $1-P(A')\,P(B')$ ।

সমাধান আমরা জানি,

$$
\begin{aligned}
P(\text{A এবং B-এর মধ্যে কমপক্ষে একটি}) &= P(A \cup B)\\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B)\\
&= P(A) + P(B) - P(A)\,P(B)\\
&= P(A) + P(B)\,[1-P(A)]\\
&= P(A) + P(B).\,P(A')\\
&= 1-P(A') + P(B)\,P(A')\\
&= 1-P(A')\,[1-P(B)]\\
&= 1-P(A')\,P(B')
\end{aligned}
$$

অনুশীলনী 13.2

1. যদি $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$, এবং A এবং B ঘটনাদ্বয় স্বাধীন হয়, তবে $P(A \cap B)$ নির্ণয় করো।
2. 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে দুটি তাস যথেচ্ছভাবে এবং প্রতিস্থাপন না করে টানা হল। উভয় তাসই কালো রঙের হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।
3. প্রতিস্থাপন না করে একটি কমলার বাক্স থেকে যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত তিনটি কমলা পর্যবেক্ষণ করা হল। যদি নির্বাচিত সবগুলো কমলা ভালো হয় তবে বাক্সটি বিক্রয়ের জন্য অনুমোদিত হবে, অন্যথায়, এটি বাতিল করা হয়। যদি একটি বাক্সে 15টি কমলার মধ্যে 12টি ভালো ও 3টি খারাপ কমলা থাকে, তাহলে বাক্সটি বিক্রির জন্য অনুমোদিত হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।
4. পক্ষপাতশূন্য একটি মুদ্রা ও একটি লুডোর ছক্কা ছোঁড়া হল। ধরা যাক A ঘটনাটি হল ‘মুদ্রাটিতে হেড্ ওঠেছে’ এবং B ঘটনাটি হল ‘ছক্কাটিতে 3 ওঠেছে’। A এবং B ঘটনাদ্বয় স্বাধীন কিনা পরীক্ষা করো।
5. একটি লুডোর ছক্কার 1, 2, 3 সংখ্যাযুক্ত তলগুলোকে লাল রঙ ও 4, 5, 6 সংখ্যাযুক্ত তলগুলোকে সবুজ রঙ দিয়ে চিহ্নিত করে ছোঁড়া হল। ধরা যাক, A ঘটনাটি হল ‘সংখ্যাটি যুগ্ম’ এবং B ঘটনাটি হল ‘সংখ্যাটি লাল রঙের’। A এবং B ঘটনাদ্বয় কি স্বাধীন?
6. ধরা যাক E এবং F ঘটনাদ্বয়, $P(E) = \frac{3}{5}$, $P(F) = \frac{3}{10}$ এবং $P(E \cap F) = \frac{1}{5}$ -এর সাথে যুক্ত। E এবং F ঘটনাদ্বয় কি স্বাধীন?

7. A এবং B ঘটনাদ্বয় এমন যে $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ এবং $P(B) = p$ প্রদত্ত। p নির্ণয় করো যদি তারা (i) পরস্পর পৃথক (ii) স্বাধীন হয়।

8. মনে করো A এবং B স্বাধীন ঘটনাদ্বয় $P(A) = 0.3$ এবং $P(B) = 0.4$-এর সাথে যুক্ত। তাহলে নিম্নলিখিতগুলো নির্ণয় করো।

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$
(iii) $P(A|B)$ (iv) $P(B|A)$

9. যদি A এবং B দুটি ঘটনা এমন যে $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ হয়, তবে P (A নয় এবং B নয়) নির্ণয় করো।

10. A এবং B ঘটনাদ্বয় এমন যে $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{7}{12}$ এবং P(A নয় অথবা B নয়) $= \frac{1}{4}$। A এবং B স্বাধীন কিনা, ব্যাখ্যা করো।

11. দুটি স্বাধীন ঘটনা A এবং B প্রদত্ত যেখানে $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$। তাহলে নিম্নলিখিতগুলো নির্ণয় করো :

(i) P(A এবং B) (ii) P(A এবং B নয়)
(iii) P(A অথবা B) (iv) P (A অথবা B-এর কোনোটিই নয়)

12. একটি লুডোর ছক্কাকে তিনবার ছোঁড়া হল। কমপক্ষে একবার অযুগ্ম সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

13. একটি বাক্সে 10টি কালো এবং 8টি লাল বল আছে। যা থেকে দুটি বল পুনঃস্থাপন করে তোলা হল। নিম্নলিখিত ঘটনাসমূহের সম্ভাবনা নির্ণয় করো, যখন —

(i) উভয় বলই লাল হয়।
(ii) প্রথম বলটি কালো এবং দ্বিতীয় বলটি লাল হয়।
(iii) তাদের মধ্যে একটি কালো এবং অপরটি লাল হয়।

14. A এবং B দ্বারা স্বাধীনভাবে নির্দিষ্ট সমস্যা সমাধান করার সম্ভাবনা হল যথাক্রমে $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{3}$। উভয়েই যদি স্বাধীনভাবে সমস্যাটি সমাধানের চেষ্টা করে তবে, নিম্নলিখিত ঘটনাসমূহের সম্ভাবনা নির্ণয় করো :

(i) সমস্যাটি সমাধান হয়েছে (ii) তাদের মধ্যে ঠিক একজন সমস্যাটি সমাধান করেছে।

15. অবিন্যস্তভাবে 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে একটি তাস টানা হল। নিম্নলিখিত কোন্‌টিতে E এবং F ঘটনাদ্বয় স্বাধীন ?

(i) E : 'টানা তাসটি ইস্কাবন'
F : 'টানা তাসটি টেক্কা'
(ii) E : 'টানা তাসটি কালো রঙের'
F : 'টানা তাসটি রাজা'

(iii) E : ‘টানা তাসটি রাজা অথবা রাণী’
F : ‘টানা তাসটি রাণী অথবা গোলাম’।

16. একটি হোস্টেলের 60% শিক্ষার্থী হিন্দি সংবাদপত্র পড়ে, 40% ইংরেজী সংবাদপত্র পড়ে এবং 20% হিন্দি ও ইংরেজী উভয় সংবাদপত্র পড়ে। একজ শিক্ষার্থীকে যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত করা হল।
(a) সে হিন্দি অথবা ইংরেজী সংবাদপত্র না পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।
(b) যদি সে হিন্দি সংবাদপত্র পড়ে, তবে তার ইংরেজী সংবাদপত্র পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।
(c) যদি সে ইংরেজী সংবাদপত্র পড়ে, তবে তার হিন্দি সংবাদপত্র পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

অনুশীলনীর 17 এবং 18 নং প্রশ্নের সঠিক উত্তরটি বাছাই করো।

17. যখন একজোড়া লুডোর ছক্কাকে গড়িয়ে দেওয়া হয়, তবে প্রতিটি ছক্কাতে একটি যুগ্ম মৌলিক সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা হলো

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

18. দুটি ঘটনা A এবং B স্বাধীন হবে, যদি
(A) A এবং B পরস্পর পৃথক
(B) $P(A'B') = [1 - P(A)]\,[1 - P(B)]$
(C) $P(A) = P(B)$
(D) $P(A) + P(B) = 1$

13.5 বেইজের উপপাদ্য (Bayes' Theorem)

দুটি ব্যাগ I এবং II বিবেচনা করো। ব্যাগ I-এ 2টি সাদা এবং 3টি লাল বল আছে এবং ব্যাগ II-এ 4 টি সাদা এবং 5টি লাল বল আছে। একটি বল যথেচ্ছভাবে যে-কোনো একটি ব্যাগ থেকে তোলা হল। আমরা যে-কোনো ব্যাগ নির্বাচনের সম্ভাবনা (অর্থাৎ, $\frac{1}{2}$) অথবা একটি নির্দিষ্ট ব্যাগ (ধরো ব্যাগ I) হতে একটি নির্দিষ্ট রঙের বল (ধরো সাদা) তোলার, সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারি। অন্যভাবে বলা যায় যে, যদি আমাদের দেওয়া থাকে বলটি কোনো একটি ব্যাগ থেকে তোলা হয়েছে, তবে আমরা একটি নির্দিষ্ট রঙের বল তোলার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারি। কিন্তু, যদি তোলা বলটির রঙ জানা থাকে, আমরা কি তোলা বলটি একটি নির্দিষ্ট ব্যাগ (ধরো ব্যাগ II) থেকে আসার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারি? এখানে, আমাদের ব্যাগ II নির্বাচনের বিপরীত সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হবে যখন একটি ঘটে যাওয়া ঘটনা জানা থাকে। বিখ্যাত গণিতবিদ্ John Bayes' শর্তসাপেক্ষ সম্ভাবনা ব্যবহার করে বিপরীত সম্ভাবনা নির্ণয়ের সমস্যাটি সমাধান করেছেন। ওনার আবিষ্কৃত এই সূত্রটি ‘বেইজের উপপাদ্য’ হিসেবে পরিচিত, যা তার মৃত্যুর পর 1763 সালে প্রকাশিত হয়েছিল। বেইজের উপপাদ্য আলোচনা এবং তা প্রমাণ করার পূর্বে চলো আমরা প্রথমেই একটি সংজ্ঞা এবং কিছু প্রাথমিক ফলাফল নিই।

13.5.1 *একটি নমুনা দেশের বিভাজন (Partition of a sample space)*

$E_1, E_2, ..., E_n$ ঘটনাগুলোর একটি সেট S নমুনা দেশের একটি বিভাজনকে প্রকাশ করে, যদি
(a) $E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3, ..., n$
(b) $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ এবং

(c) $P(E_i) > 0$ সকল $i = 1, 2, ..., n$-এর জন্য।

অন্যভাবে বলা যায়, $E_1, E_2, ..., E_n$ ঘটনাগুলো S নমুনা দেশের একটি বিভাজনকে বোঝায় যদি ঘটনাগুলো পরস্পর বা জোড়ায় জোড়ায় (pairwise) বিচ্ছিন্ন, সম্পূর্ণ এবং অশূন্য সম্ভাবনা বিশিষ্ট হয়।

উদাহরণ হিসাবে, আমরা দেখতে পাই যে-কোনো অশূন্য ঘটনা E এবং এর পূরক E′ নমুনা দেশ S-এর একটি বিভাজন গঠন করে, যেহেতু তারা $E \cap E' = \phi$ এবং $E \cup E' = S$ কে সিদ্ধ করে।

চিত্র 13.3-এর ভেনচিত্র হতে, একজন সহজেই লক্ষ করতে পারে যে যদি E এবং F যে-কোনো দুটি ঘটনা নমুনা দেশ S এর সহিত যুক্ত তখন $\{E \cap F', E \cap F, E' \cap F, E' \cap F'\}$ এই সেটটি নমুনা দেশ S-এর একটি বিভাজন। এটি উল্লেখ করা যেতে পারে যে, নমুনা দেশের এই বিভাজনটি অনন্য (unique) নয়। এই নমুনা দেশটির ভিন্ন বিভাজনও হতে পারে।

আমরা এখন একটি উপপাদ্য প্রমাণ করব, যা ***সমগ্র সম্ভাবনার উপপাদ্য (Theorem of total probability)*** হিসেবে পরিচিত।

13.5.2 *সমগ্র সম্ভাবনার উপপাদ্য (Theorem of total probability)*

ধরো, $\{E_1, E_2,...,E_n\}$ হল S নমুনা দেশের একটি বিভাজন এবং মনে করো যে প্রতিটি ঘটনা $E_1, E_2,..., E_n$ ঘটার সম্ভাবনা অশূন্য। ধরো A যে-কোনো একটি ঘটনা যা S-এর সাথে যুক্ত, তাহলে

$$P(A) = P(E_1)\ P(A|E_1) + P(E_2)\ P(A|E_2) + ... + P(E_n)\ P(A|E_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A|E_j)$$

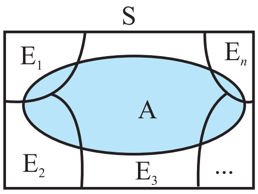
প্রমাণ দেওয়া আছে যে $E_1, E_2,..., E_n$ হল S নমুনা দেশের একটি বিভাজন (চিত্র 13.4)। সুতরাং,

$$S = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n \qquad ... (1)$$

এবং $\quad E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, ..., n$

এখন, আমরা জানি যে, যে-কোনো ঘটনা A-এর জন্য,

$$A = A \cap S$$
$$= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n)$$
$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup (A \cap E_n)$$



চিত্র 13.4

আবার, $A \cap E_i$ এবং $A \cap E_j$ হল যথাক্রমে E_i এবং E_j-এর উপসেট। আমরা জানি যে, $i \neq j$ -এর জন্য E_i এবং E_j হল বিচ্ছিন্ন। সুতরাং, সকল $i \neq j,\ i, j = 1, 2, ..., n$-এর জন্যও $A \cap E_i$ এবং $A \cap E_j$ বিচ্ছিন্ন।

অতএব, $\quad P(A) = P\,[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup .....\cup (A \cap E_n)]$

$$= P\,(A \cap E_1) + P\,(A \cap E_2) + ... + P\,(A \cap E_n)$$

এখন, সম্ভাবনার গুণের সূত্র হতে আমরা পাই,

$$P(A \cap E_i) = P(E_i)\ P(A|E_i) \text{ যেহেতু } P(E_i) \neq 0 \forall i = 1,2,..., n$$

সুতরাং, $$P(A) = P(E_1)\, P(A|E_1) + P(E_2)\, P(A|E_2) + \ldots + P(E_n) P(A|E_n)$$

বা, $$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A|E_j)$$

উদাহরণ 15 এক ব্যক্তি একটি নির্মাণ কার্য হাতে নিয়েছেন। ধর্মঘট হওয়ার সম্ভাবনা হল 0.65। যদি ধর্মঘট না হয় তবে নির্মাণ কাজটি সঠিক সময়ে সম্পন্ন হওয়ার সম্ভাবনা হয় 0.80 এবং যদি ধর্মঘট হয় তবে নির্মাণ কার্য সঠিক সময়ে সম্পন্ন হওয়ার সম্ভাবনা 0.32। নির্মাণ কার্যটি সঠিক সময়ে সম্পন্ন হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো, নির্মাণ কার্যটি সঠিক সময়ে সম্পন্ন হওয়ার ঘটনাটি A এবং ধর্মঘট হওয়ার ঘটনাটি হল B। আমাদের P(A) নির্ণয় করতে হবে।

আমরা পাই, $P(B) = 0.65$, P (ধর্মঘট না হওয়ার) $= P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$

$P(A|B) = 0.32$, $P(A|B') = 0.80$

যেহেতু B এবং B′ ঘটনাদ্বয় নমুনা দেশ S-এর একটি বিভাজন গঠন করে, সুতরাং, সমগ্র সম্ভাবনার উপপাদ্য হতে আমরা পাই

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)\; P(A|B) + P(B')\; P(A|B') \\ &= 0.65 \times 0.32 + 0.35 \times 0.8 \\ &= 0.208 + 0.28 = 0.488 \end{aligned}$$

অতএব, এই নির্মাণ কার্যটি সঠিক সময়ে সম্পন্ন হওয়ার সম্ভাবনা হল 0.488।

এখন আমরা বেইজের উপপাদ্যটি বিবৃত এবং প্রমাণ করব।

বেইজের উপপাদ্য যদি $E_1, E_2, \ldots, E_n$ নমুনা দেশ S-এর n-সংখ্যক অশূন্য ঘটনার বিভাজন গঠন করে, অর্থাৎ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ জোড়ায় জোড়ায় বিচ্ছিন্ন ও $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$ এবং A হল যে-কোনো অশূন্য সম্ভাবনা বিশিষ্ট ঘটনা, তখন

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i) P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A|E_j)}$$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ -এর যে-কোনো মানের জন্য

প্রমাণ শর্তাধীন সম্ভাবনার সূত্র প্রয়োগ করে আমরা জানি যে

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_i) P(A|E_i)}{P(A)}$$ (সম্ভাবনার গুণের সূত্র প্রয়োগ করে)

$$= \frac{P(E_i) P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A|E_j)}$$ (সমগ্র সম্ভাবনার উপপাদ্যের ফলাফল প্রয়োগ করে)

মন্তব্য নিম্নলিখিত পরিভাষাগুলো সাধারণত ব্যবহার করা হয় যখন বেইজের উপপাদ্য প্রয়োগ করা হয়।

$E_1, E_2, ..., E_n$ ঘটনাগুলোকে বলা হয় *প্রকল্প (hypotheses)*।

সম্ভাবনা, $P(E_i)$ -কে E_i প্রকল্পের *পূর্বকালীন সম্ভাবনা (Priori Probability)* বলা হয়।

শর্তাধীন সম্ভাবনা, $P(E_i|A)$ -কে E_i প্রকল্পের *উত্তরকালীন সম্ভাবনা (Posteriori probability)* বলা হয়।

বেইজের উপপাদ্যকে "কারণসমূহ" (causes) সম্ভাবনার সূত্রও বলা হয়। যেহেতু E_i নমুনা দেশ S-এর একটি বিভাজন, একটি এবং কেবলমাত্র একটি ঘটনা E_i সংঘটিত হয় (অর্থাৎ E_i ঘটনাগুলোর একটি ঘটনা অবশ্যই ঘটবে এবং শুধুমাত্র একটি ঘটনাই ঘটতে পারে)। অতএব, উপরের সূত্রটি আমাদেরকে একটি বিশেষ ঘটনা E_i (অর্থাৎ একটি 'কারণ') ঘটনার সম্ভাবনা প্রদান করে, যখন A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা দেওয়া থাকে।

বিভিন্ন পরিস্থিতিতে বেইজের উপপাদ্যের প্রয়োগ হয়। এদের মধ্যে কয়েকটি নিম্নলিখিত উদাহরণগুলোর মাধ্যমে বিবৃত করা হয়েছে।

উদাহরণ 16 ব্যাগ I-এ 3টি লাল এবং 4টি কালো বল আছে, আবার অন্য একটি ব্যাগ II-এ 5টি লাল এবং 6টি কালো বল আছে। একটি বল যথেচ্ছভাবে কোনো একটি ব্যাগ থেকে তোলা হল এবং দেখা গেল বলটি লাল। তোলা বলটি ব্যাগ II থেকে আসার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো ব্যাগ I পছন্দের ঘটনাটি হল E_1, ব্যাগ II থেকে পছন্দের ঘটনাটি হল E_2 এবং একটি লাল বল উঠার ঘটনাটি হল A ।

তবে $$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

আবার $$P(A|E_1) = P\text{ (ব্যাগ I থেকে তোলা বলটি লাল হওয়া)} = \frac{3}{7}$$

এবং $$P(A|E_2) = P\text{ (ব্যাগ II থেকে তোলা বলটি লাল হওয়া)} = \frac{5}{11}$$

এখন, ব্যাগ II থেকে বলটি তোলার সম্ভাবনা, যখন বলটি লাল, তা হল $P(E_2|A)$ বেইজের উপপাদ্য প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$P(E_2|A) = \frac{P(E_2)P(A|E_2)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}} = \frac{35}{68}$$

উদাহরণ 17 প্রদত্ত তিনটি একই রকমের বাক্স I, II এবং III-এর প্রতিটিতে দুটি করে মুদ্রা আছে। বাক্স I-এর মধ্যে উভয় মুদ্রাই হল স্বর্ণমুদ্রা, বাক্স II তে উভয়েই রূপার মুদ্রা এবং বাক্স III তে একটি স্বর্ণমুদ্রা এবং একটি রূপার মুদ্রা আছে। এক ব্যক্তি যথেচ্ছভাবে একটি বাক্স পছন্দ করল এবং একটি মুদ্রা বের করে নিল। যদি মুদ্রাটি স্বর্ণমুদ্রা হয়, তবে ঐ বাক্সের অপর মুদ্রাটিও স্বর্ণমুদ্রা হওয়ার সম্ভাবনা কি?

সমাধান ধরো বাক্স I, II এবং III পছন্দ করার ঘটনাগুলো যথাক্রমে E_1, E_2 এবং E_3 ।

তবে, $$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$$

আরও, ধরো 'উঠানো মুদ্রাটি স্বর্ণমুদ্রা' হওয়ার ঘটনাটি হল A।

তখন $$P(A|E_1) = P\text{ (বাক্স I থেকে উঠানো মুদ্রাটি একটি স্বর্ণ মুদ্রা)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(A|E_2) = P\text{ (বাক্স II থেকে উঠানো মুদ্রাটি একটি স্বর্ণ মুদ্রা)} = 0$$

$$P(A|E_3) = P\text{ (বাক্স III থেকে উঠানো মুদ্রাটি একটি স্বর্ণ মুদ্রা)} = \frac{1}{2}$$

এখন, বাক্সটির অপর মুদ্রাটি স্বর্ণ মুদ্রা হওয়ার সম্ভাবনা

= স্বর্ণমুদ্রাটি বাক্স I থেকে উঠার সম্ভাবনা

= $P(E_1|A)$

বেইজের উপপাদ্য হতে, আমরা জানি যে,

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

উদাহরণ 18 মনে করো যে, HIV পরীক্ষার নির্ভরযোগ্যতা নিম্নলিখিতভাবে উল্লেখ করা হয় :
একটি পরীক্ষায় যে সকল লোক HIV আক্রান্ত তাদের 90% -এর ক্ষেত্রে রোগটির শনাক্ত হয় কিন্তু 10% অশনাক্ত থেকে যায়। যে সকল লোক HIV মুক্ত, তাদের 99% -এর পরীক্ষায় HIV–ive নির্ধারিত হয় কিন্তু 1% HIV+ive ধরা পড়ে। একটি বিশাল জনসংখ্যার মধ্যে মাত্র 0.1%-এর HIV আছে, তা হতে একজন লোক যথেচ্ছভাবে নির্বাচন করে HIV পরীক্ষা করতে দেওয়া হল এবং রোগবিদ্যাবিৎ (Pathologise) রিপোর্ট দিলেন যে তার HIV+ive। ঐ লোকটির প্রকৃতপক্ষে HIV আক্রান্ত হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ধরো নির্বাচিত লোকটির প্রকৃতপক্ষে HIV আক্রান্ত হওয়ার ঘটনাটি E দ্বারা এবং লোকটির HIV পরীক্ষায় +ive ধরা পড়ার ঘটনাটি A দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আমাদের $P(E|A)$ নির্ণয় করা প্রয়োজন। আবার নির্বাচিত লোকটির প্রকৃতপক্ষে HIV আক্রান্ত না হওয়ার ঘটনাটি দ্বারা E' প্রকাশ করা হয়।

স্পষ্টতই, $\{E, E'\}$ হল জনসংখ্যার সকল লোকের নমুনা দেশের একটি বিভাজন। আমরা জানি যে

$$P(E) = 0.1\% = \frac{0.1}{100} = 0.001$$

$$P(E') = 1 - P(E) = 0.999$$

$P(A|E)$ =P (লোকটির HIV পরীক্ষায় +ive , দেওয়া আছে যে, লোকটি প্রকৃতপক্ষে HIV আক্রান্ত)

$$= 90\% = \frac{90}{100} = 0.9$$

এবং, $P(A|E') = P$ (লোকটির HIV পরীক্ষায় +ive , দেওয়া আছে যে, লোকটি প্রকৃতপক্ষে HIV আক্রান্ত নয়)

$$= 1\% = \frac{1}{100} = 0.01$$

এখন, বেইজের উপপাদ্য হতে,

$$P(E|A) = \frac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E)+P(E')P(A|E')}$$

$$= \frac{0.001\times 0.9}{0.001\times 0.9+0.999\times 0.01} = \frac{90}{1089}$$

$= 0.083$ আসন্ন।

সুতরাং, যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত লোকটির প্রকৃতপক্ষে HIV আক্রান্ত, দেওয়া আছে যে লোকটির HIV পরীক্ষায় +ive হওয়ার সম্ভাবনা হল 0.083।

উদাহরণ 19 বল্টু (bolts) তৈরির একটি কারখানায়, মেশিন A, B এবং C যথাক্রমে 25%, 35% এবং 40% বল্টু তৈরি করে। উৎপাদিত বল্টুগুলোর যথাক্রমে 5%, 4% এবং 2% ত্রুটিপূর্ণ। উৎপাদিত বল্টুগুলো হতে একটি বল্টু যথেচ্ছভাবে নেওয়া হল এবং এটি ত্রুটিপূর্ণ পাওয়া গেল। বল্টুটি মেশিন B দ্বারা তৈরি হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ধরো, B_1, B_2, B_3 ঘটনাগুলো নিম্নরূপ :

B_1 : বল্টুটি মেশিন A দ্বারা তৈরি।

B_2 : বল্টুটি মেশিন B দ্বারা তৈরি।

B_3 : বল্টুটি মেশিন C দ্বারা তৈরি।

স্পষ্টতই, B_1, B_2, B_3 হল পরস্পর পৃথক এবং সম্পূর্ণ ঘটনা এবং তাই এগুলো নমুনা দেশের একটি বিভাজন উপস্থাপন করে।

ধরো, 'বল্টুটি ত্রুটিপূর্ণ' হওয়ার ঘটনাটি E । E ঘটনাটি B_1 এর সঙ্গে অথবা B_2-এর সঙ্গে অথবা B_3-এর সঙ্গে ঘটে। দেওয়া আছে যে,

$$P(B_1) = 25\% = 0.25,\ \ P(B_2) = 0.35 \text{ এবং } P(B_3) = 0.40$$

আবার, $P(E|B_1)$ =নেওয়া বল্টুটি ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা, দেওয়া আছে যে এটি মেশিন A দ্বারা তৈরী

$$= 5\% = 0.05$$

অনুরূপে, $P(E|B_2) = 0.04,\ \ P(E|B_3) = 0.02.$

অতএব, বেইজের উপপাদ্য হতে, আমরা পাই

$$P(B_2|E) = \frac{P(B_2)P(E|B_2)}{P(B_1)P(E|B_1)+P(B_2)P(E|B_2)+P(B_3)P(E|B_3)}$$

$$= \frac{0.35 \times 0.04}{0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.40 \times 0.02}$$

$$= \frac{0.0140}{0.0345} = \frac{28}{69}$$

উদাহরণ 20 একজন ডাক্তারবাবু তাঁর এক রোগীকে দেখতে আসবেন। অতীতের অভিজ্ঞতা থেকে এটি জানা আছে যে, তাঁর ট্রেন, বাস, স্কুটার অথবা যাতায়াতের অন্য মাধ্যম দ্বারা আসার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ এবং $\frac{2}{5}$ । যদি তিনি ট্রেনে, বাসে এবং স্কুটারে আসেন, তাঁর দেরি হওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{12}$ কিন্তু যদি তিনি যাতায়াতের অন্য মাধ্যমে আসেন, তবে তাঁর দেরি হয় না। যখন তিনি পৌঁছুলেন, তাঁর দেরি হয়ে গেল। তবে তাঁর ট্রেনে আসার সম্ভাবনা কত হবে?

সমাধান ধরো ডাক্তারবাবুর রোগীটিকে দেখতে যেতে দেরি হওয়ার ঘটনাটি E এবং মনে করো, ডাক্তারবাবু ট্রেন, বাস, স্কুটার এবং যাতায়াতের অন্য মাধ্যম দিয়ে আসার ঘটনাগুলো যথাক্রমে T_1, T_2, T_3, T_4 ।

তাহলে $P(T_1) = \frac{3}{10}$, $P(T_2) = \frac{1}{5}$, $P(T_3) = \frac{1}{10}$ এবং $P(T_4) = \frac{2}{5}$ (প্রদত্ত)

$P(E|T_1)$ = ট্রেনে আসলে ডাক্তারবাবুর দেরিতে পৌঁছানোর সম্ভাবনা = $\frac{1}{4}$

অনুরূপে, $P(E|T_2) = \frac{1}{3}$, $P(E|T_3) = \frac{1}{12}$ এবং $P(E|T_4) = 0$, যেহেতু তিনি যদি যাতায়াতের অন্য মাধ্যমে আসেন, তাঁর দেরি হয় না।

সুতরাং, বেইজের উপপাদ্য হতে আমরা পাই,

$P(T_1|E)$ = ডাক্তারবাবু দেরিতে পৌঁছলে, তবে তাঁর ট্রেন দিয়ে আসার সম্ভাবনা।

$$= \frac{P(T_1)P(E|T_1)}{P(T_1)P(E|T_1)+P(T_2)P(E|T_2)+P(T_3)P(E|T_3)+P(T_4)P(E|T_4)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{5}\times 0} = \frac{3}{40}\times\frac{120}{18} = \frac{1}{2}$$

অতএব, নির্ণেয় সম্ভাবনা হল $\frac{1}{2}$

উদাহরণ 21 জানা আছে যে, একজন লোক 4 বারের মধ্যে 3 বার সত্য কথা বলে। সে একটি ছক্কা নিক্ষেপ করল এবং সে জানালো যে 6 উঠেছে। ছক্কায় সত্যই 6 উঠার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো লোকটি একটি ছক্কা নিক্ষেপ করার ফলে, ছক্কায় 6 উঠেছে বলার ঘটনাটি E এবং ধরো 6 উঠার ঘটনাটি S_1 ও 6 না উঠার ঘটনাটি হল S_2।

তখন, $P(S_1)$ = 6 উঠার সম্ভাবনা = $\frac{1}{6}$

$P(S_2)$ = 6 না উঠায় সম্ভাবনা = $\frac{5}{6}$

$P(E|S_1)$ = যখন ছক্কাতে সত্যই 6 উঠেছে, তখন লোকটি 6 উঠেছে বলার সম্ভাবনা।

= লোকটির সত্য বলার সম্ভাবনা = $\frac{3}{4}$

$P(E|S_2)$ = যখন ছক্কাতে সত্যই 6 উঠেনি, তখন লোকটি 6 উঠেছে বলার সম্ভাবনা

= লোকটির সত্য না বলার সম্ভাবনা $=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

সুতরাং, বেইজের উপপাদ্য হতে, আমরা পাই

$P(S_1|E)$ = 6 উঠেছে লোকটি বলল, যখন সত্যই ছক্কায় 6 উঠেছে এটির সম্ভাবনা

$$= \frac{P(S_1)P(E|S_1)}{P(S_1)P(E|S_1)+P(S_2)P(E|S_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}\times\frac{24}{8} = \frac{3}{8}$$

অতএব, নির্ণেয় সম্ভাবনা হল $\frac{3}{8}$.।

অনুশীলনী 13.3

1. একটি পাত্রে 5 টি লাল ও 5টি কালো বল আছে। একটি বল যথেচ্ছভাবে তোলা হল এবং এটির রং লক্ষ করে এটিকে পুনরায় পাত্রে রেখে দেওয়া হল। উপরন্তু তোলা বলের একই রং বিশিষ্ট দুটি অতিরিক্ত বল পাত্রে রাখা হল এবং তারপর একটি বল যথেচ্ছভাবে তোলা হল। দ্বিতীয় বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

2. একটি থলিতে 4টি লাল এবং 4 টি কালো বল আছে। অপর একটি থলিতে 2 টি লাল এবং 6 টি কালো বল আছে। দুটির মধ্যে একটি থলিকে যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত করে, ওই থলি থেকে একটি বল তোলা হল। প্রাপ্ত বলটি লাল হলে, এটি প্রথম থলি থেকে তোলার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

3. একটি মহাবিদ্যালয়ের শিক্ষার্থীদের বিষয়ে এটি জানা যায় যে 60% হোস্টেলে থাকে এবং 40% হোস্টেলে থাকে না। গত বছরের বার্ষিক পরীক্ষার ফলাফল দেখাচ্ছে যে হোস্টেলে থাকা সকল শিক্ষার্থীদের 30% A গ্রেড (grade) পেয়েছে এবং হোস্টেলে থাকে না এরূপ শিক্ষার্থীদের 20% A গ্রেড পেয়েছে। বছরের শেষে ঐ মহাবিদ্যালয় থেকে যথেচ্ছভাবে একজন শিক্ষার্থী নির্বাচন করা হল এবং দেখা গেলো সে A গ্রেড প্রাপ্ত। শিক্ষার্থীটি যে হোস্টেলের শিক্ষার্থী তার সম্ভাবনা কত?

4. একটি বহুমুখী নির্বাচন পরীক্ষার (multiple choice) একটি প্রশ্নের উত্তর দেওয়ার সময় একজন শিক্ষার্থী হয়তো উত্তরটি জানে অথবা অনুমান করেছে। ধরো, সে যে উত্তরটি জানে তার সম্ভাবনা হল $\frac{3}{4}$ এবং সে যে অনুমান করেছে তার সম্ভাবনা $\frac{1}{4}$ । মনে করো একজন শিক্ষার্থী যে উত্তরটি অনুমান করেছে সেটি সঠিক হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{4}$ । শিক্ষার্থী উত্তরটি যে জানে, তার সম্ভাবনা কী, দেওয়া আছে যে সে এটিকে সঠিকভবে উত্তর করেছে?

5. একটি নির্দিষ্ট রোগ নির্ণয়ের জন্য একটি পরীক্ষাগারে রক্ত পরীক্ষা 99% ফলপ্রসূ, যখন প্রকৃতপক্ষে রোগটিতে আক্রান্ত হয়। কিন্তু একজন স্বাস্থ্যবান লোকের পরীক্ষার ক্ষেত্রে 0.5% পরীক্ষায় ভ্রান্ত ধনাত্মক ফলাফল (false positive result) প্রকাশ পায় (অর্থাৎ যদি একজন স্বাস্থ্যবান লোক পরীক্ষা করে, তবে পরীক্ষাটি দেখাবে যে লোকটির রোগটি থাকার সম্ভাবনা 0.005)। যদি জনসংখ্যার 0.1% প্রকৃতপক্ষে রোগাক্রান্ত হয়, তবে একজন ব্যক্তির রোগাক্রান্ত হওয়ার সম্ভাবনা কত হবে? দেওয়া আছে যে তার পরীক্ষার ফলাফলটি ধনাত্মক।

6. তিনটি মুদ্রা আছে। একটি হল দুই হেড্ বিশিষ্ট মুদ্রা (যার উভয়দিকে হেড্ আছে), দ্বিতীয়টি এমনভাবে পক্ষপাতদুষ্ট (baised) যে, 75% ক্ষেত্রে হেড্ পড়ে এবং তৃতীয়টি ঝোঁকশূন্য (Unbaised) । তিনটি মুদ্রা থেকে যথেচ্ছভাবে একটি মুদ্রা নির্বাচন করে নিক্ষেপ করা হয় এবং হেড্ পড়তে দেখা যায়। নির্বাচিত মুদ্রাটি উভয় দিক হেড্ বিশিষ্ট হওয়ার সম্ভাবনা কত?

7. একটি বীমা কোম্পানি 2000 জন স্কুটার চালক, 4000 জন ছোট গাড়ি চালক এবং 6000 জন ট্রাক চালকের বীমা করেছে। একটি দুর্ঘটনা হওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে 0.01, 0.03 এবং 0.15 । একজন বীমাকৃত লোক দুর্ঘটনার কবলে পড়েছে। লোকটি একজন স্কুটার চালক হওয়ার সম্ভাবনা কত?

8. একটি কারখানায় দুটি মেশিন A এবং B আছে। অজিতের তথ্য দেখাচ্ছে যে উৎপাদিত দ্রব্যের 60% দ্রব্য মেশিন A উৎপাদন করে এবং 40% দ্রব্য মেশিন B উৎপাদন করে। উপরন্তু মেশিন A দ্বারা উৎপাদিত দ্রব্যের 2% ত্রুটিপূর্ণ এবং মেশিন B দ্বারা উৎপাদিত দ্রব্যের 1% ত্রুটিপূর্ণ। সকল উৎপাদিত দ্রব্য এক সঙ্গো মজুত রাখা হল এবং তারপর এখান থেকে একটি দ্রব্য যথেচ্ছভাবে নির্বাচন করা হয় এবং এটি ত্রুটিপূর্ণ পাওয়া যায়। এটি মেশিন B দ্বারা উৎপাদিত হওয়ার সম্ভাবনা কত?

9. কোনো একটি নিগমের (corporation) পরিচালক মণ্ডলীতে স্থান পাওয়ার জন্য দুটি দল প্রতিদ্বন্দ্বিতা করে। প্রথম ও দ্বিতীয় দলের জয়লাভের সম্ভাবনা যথাক্রমে 0.6 এবং 0.4 । উপরন্তু, যদি প্রথম দল জয়লাভ করে তবে একটি নতুন প্রোডাক্ট চালু হওয়ার সম্ভাবনা 0.7 এবং দ্বিতীয় দল জয়লাভ করলে অনুরূপ সম্ভাবনা 0.3 । দ্বিতীয় দল দ্বারা নতুন প্রোডাক্ট চালু করার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

10. মনে করো একটি বালিকা একটি ছক্কা নিক্ষেপ করল। যদি সে একটি 5 অথবা 6 পায়, সে একটি মুদ্রাকে 3 বার টস্ করে এবং হেড্ এর সংখ্যাগুলো লিপিবন্দ্ধ করে। যদি সে 1, 2, 3 অথবা 4 পায়, সে একটি মুদ্রাকে একবার টস করে এবং সেটি কি হেড্ নাকি টেল পাওয়া গেল তা লিপিবন্দ্ধ করে। যদি সে ঠিক একটি হেড্ পায়, সে ছক্কায় নিক্ষেপে 1, 2, 3 অথবা 4 পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

11. একজন উৎপাদনকারীর কাছে A, B এবং C তিনজন মেশিন চালক আছে। প্রথম মেশিন চালক A, 1% ত্রুটিপূর্ণ দ্রব্য উৎপাদন করে, যেখানে অপর দুই মেশিন চালক B এবং C যথাক্রমে 5% এবং 7% ত্রুটিপূর্ণ দ্রব্য উৎপাদন করে। A মোট সময়ের 50% সময় কাজ করে, B মোট সময়ের 30% সময় কাজ করে এবং C মোট সময়ের 20% সময় কাজ করে। একটি ত্রুটিপূর্ণ দ্রব্য উৎপন্ন হয়েছে, এটি A দ্বারা উৎপাদিত হওয়ার সম্ভাবনা কত?

12. 52 টি তাসের একটি প্যাকেট হতে একটি তাস হারিয়ে গেছে। প্যাকেটটির অবশিষ্ট তাসগুলো হতে দুটি তাস টানা হল এবং দেখা গেল সে উভয় তাসই রুইতন (diamonds)। হারানো তাসটি রুইতন হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

13. A এর সত্য বলার সম্ভাবনা হল $\frac{4}{5}$ । একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করা হল। A বলল যে, একটি হেড্ উঠেছে. সত্যই হেড্ উঠেছে, তার সম্ভাবনা হল

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

14. যদি A এবং B দুটি ঘটনা এরূপ হয় যে $A \subset B$ এবং $P(B) \neq 0$, তবে নিম্নের কোনটি সঠিক?

(A) $P(A|B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ (B) $P(A|B) < P(A)$

(C) $P(A|B) \geq P(A)$ (D) কোনটিই নয়।

13.6 সমসম্ভব চলক এবং এর সম্ভাবনা বিভাজন (Random Variables and its Probability Distributions)

আমরা ইতিমধ্যে সমসম্ভব পরীক্ষা এবং নমুনা দেশের গঠন সম্পর্কে জেনেছি। এই পরীক্ষাগুলোর বেশির ভাগ ক্ষেত্রে আমরা কেবলমাত্র ঘটে যাওয়া নির্দিষ্ট ফলাফলের প্রতি আগ্রহী ছিলাম না বরং নিম্নলিখিত উদাহরণ/পরীক্ষাগুলোতে দেখানো ফলাফলগুলোর সঙ্গে যুক্ত কয়েকটি সংখ্যায়ও আগ্রহী ছিলাম।

(i) দুটি ছক্কার নিক্ষেপে, আমরা দুটি ছক্কায় উঠা সংখ্যার সমষ্টি সম্পর্কে আগ্রহী হতে পারি।

(ii) একটি মুদ্রা 50 বার নিক্ষেপে, হেড্ উঠার সংখ্যা আমরা জানতে চাইতে পারি।

(iii) 20টি বস্তুর একটি লট্-এ 6টি বস্তু ত্রুটিযুক্ত, যা থেকে যথেচ্ছভাবে 4টি বস্তু (একটির পর আর একটি করে) তোলার পরীক্ষায়, 4টি নমুনায় ত্রুটিযুক্ত বস্তুর সংখ্যা জানতে আমরা আগ্রহী এবং এটি ত্রুটিযুক্ত ও ত্রুটিমুক্ত বস্তুগুলোর কোনো বিশেষ ক্রম নয়।

উপরোক্ত সবগুলো পরীক্ষাতেই, আমাদের একটি নিয়ম আছে যা পরীক্ষার প্রতিটি ফলাফলকে একটি বাস্তব সংখ্যা নির্ধারণ করে। এই বাস্তব সংখ্যাটি পরীক্ষার বিভিন্ন ফলাফলের সাথে পরিবর্তিত হতে পারে। সুতরাং এটি একটি চলক। এছাড়াও এর মান একটি সমসম্ভব পরীক্ষার ফলাফলের উপর নির্ভর করে এবং তাই এটিকে সমসম্ভব চলক (Random vairable) বলে। একটি সমসম্ভব চলক সাধারণত X দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যদি তুমি একটি অপেক্ষকের সংজ্ঞা স্মরণ করো, তুমি বুঝতে পারবে যে সমসম্ভব চলক X বলতে বস্তুত একটি অপেক্ষককে বুঝায়, যার ক্ষেত্র হল একটি সমসম্ভব পরীক্ষায় প্রাপ্ত ফলাফলের (অথবা নমুনা দেশের) একটি সেট্। একটি সমসম্ভব চলকের মান যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, সুতরাং, এর সহ-ক্ষেত্রটি হল বাস্তব সংখ্যার একটি সেট্। অতএব, একটি সমসম্ভব চলক নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা যেতে পারে :

সংজ্ঞা 4 একটি সমসম্ভব চলক হল একটি বাস্তব মান বিশিষ্ট অপেক্ষক, যার ক্ষেত্র হল সমসম্ভব পরীক্ষার একটি নমুনা দেশ।

উদাহরণস্বরূপ, চল আমরা একটি মুদ্রা পর পর দুইবার নিক্ষেপণের পরীক্ষাটি বিবেচনা করি।

এই পরীক্ষার নমুনা দেশ হল S = {HH, HT, TH, TT}।

যদি X হেড পাওয়ার সংখ্যাকে প্রকাশ করে, তবে X হল একটি সমসম্ভব চলক এবং প্রতিটি ফলাফলের জন্য, এর মান নিম্নরূপে দেওয়া হল :

$$X(HH) = 2,\ X(HT) = 1,\ X(TH) = 1,\ X(TT) = 0।$$

একই নমুনা দেশে একের বেশি সমসম্ভব চলক সংজ্ঞায়িত করা যেতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, ধরো Y উপরের নমুনা দেশ S এর প্রতিটি ফলাফলের জন্য হেড-এর সংখ্যা হতে টেল-এর সংখ্যার বিয়োগফলকে প্রকাশ করে।

তখন $Y(HH) = 2,\ Y(HT) = 0,\ Y(TH) = 0,\ Y(TT) = -2$।

এইভাবে, একই নমুনা দেশ S-এ X এবং Y দুটি ভিন্ন সমসম্ভব চলক সংজ্ঞাত।

উদাহরণ 22 একজন লোক একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করার একটি খেলা খেলে। প্রতিটি হেড-এর জন্য খেলার পরিচালক তাকে 2 টাকা দেয় এবং প্রতিটি টেল-এর জন্য সে পরিচালককে 1.50 টাকা দেয়। ধরো লোকটির লাভ বা ক্ষতির পরিমাণ X দ্বারা প্রকাশ করা হয়। দেখাও যে X হল একটি সমসম্ভব চলক এবং এটিকে পরীক্ষাটির নমুনা দেশের একটি অপেক্ষকরূপে প্রদর্শন করো।

সমাধান X একটি সংখ্যা যার মান একটি সমসম্ভব পরীক্ষার ফলাফলের উপর সংজ্ঞাত। সুতরাং X হল একটি সমসম্ভব চলক।

এখন, এই পরীক্ষাটির নমুনা দেশ হল

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

তাহলে $X(HHH) = (2 \times 3)$ টাকা = 6 টাকা

$$X(HHT) = X(HTH) = X(THH) = (2 \times 2 - 1 \times 1.50) \text{ টাকা} = 2.50 \text{ টাকা}$$
$$X(HTT) = X(THT) = (TTH) = (1 \times 2) - (2 \times 1.50) \text{ টাকা} = -1 \text{ টাকা}$$
এবং $X(TTT) = -(3 \times 1.50)$ টাকা $= -4.50$ টাকা

যেখানে, বিয়োগ চিহ্নটি খেলোয়াড়ের ক্ষতিকে বোঝায়। এভাবে, নমুনা দেশের প্রতিটি উপাদানের জন্য, X এর একটি অনন্য মান হবে। অতএব, X হল নমুনা দেশের একটি অপেক্ষক যার প্রসার হল
$$\{-1,\ 2.50,\ -4.50,\ 6\}$$

উদাহরণ 23 একটি ব্যাগে 2 টি সাদা এবং 1 টি লাল বল আছে। একটি বল যথেচ্ছভাবে উঠানো হল এবং এটির রং লক্ষ করে পুনরায় ব্যাগে রাখা হল। এই প্রক্রিয়াটি আবার পুনরাবৃত্তি করা হল। যদি X দুইবারে উঠানো লাল বলের সংখ্যাকে নির্দেশ করে, তবে X নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো ব্যাগের বলগুলো w_1, w_2, r. দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। তখন নমুনা দেশটি হবে
$$S = \{w_1\, w_1, w_1\, w_2, w_2\, w_2, w_2\, w_1, w_1\, r, w_2\, r, r\, w_1, r\, w_2, r\, r\}$$
এখন $\omega \in S$ এর জন্য
$$X(\omega) = \text{লাল বলের সংখ্যা।}$$
সুতরাং,
$$X(\{w_1\, w_1\}) = X(\{w_1\, w_2\}) = X(\{w_2\, w_2\}) = X(\{w_2\, w_1\}) = 0$$
$$X(\{w_1\, r\}) = X(\{w_2\, r\}) = X(\{r\, w_1\}) = X(\{r\, w_2\}) = 1 \text{ এবং } X(\{r\, r\}) = 2$$
এইভাবে, X হল একটি সমসম্ভব চলক যার মানগুলো হল 0, 1 অথবা 2.

13.6.1 *সমসম্ভব চলকের সম্ভাবনা বিভাজন (Probability distribution of a random variable)*

চলো আমরা $f_1,\ f_2, ..., f_{10}$ দশটি পরিবারের মধ্যে একটি পরিবার নির্বাচন করার পরীক্ষাটি লক্ষ করি, এইভাবে যে প্রতিটি পরিবারের নির্বাচন হবে সমসম্ভব। ধরো $f_1, f_2, ... f_{10}$ পরিবারের সদস্য সংখ্যা যথাক্রমে 3, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 6, 4, 5।

চলো আমরা একটি পরিবার নির্বাচন করি এবং ঐ পরিবারের সদস্য সংখ্যা লিপিবদ্ধ করি যা X দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে। স্পষ্টতই, X হল একটি সমসম্ভব চলক যা নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :
$$X(f_1) = 3,\ X(f_2) = 4,\ X(f_3) = 3,\ X(f_4) = 2,\ X(f_5) = 5,$$
$$X(f_6) = 4,\ X(f_7) = 3,\ X(f_8) = 6,\ X(f_9) = 4,\ X(f_{10}) = 5$$
এইভাবে, X -এর 2,3,4,5 অথবা 6 যে-কোনো মান হতে পারে যা নির্ভর করবে কোন পরিবারটি নির্বাচন করা হয়েছে।

এখন, X এর মান হবে 2 যখন f_4 পরিবারটি নির্বাচন করা হয়। X এর মান 3 হতে পারে যখন f_1, f_3, f_7 পরিবারের যে-কোনো একটি নির্বাচন করা হয়।

অনুরূপে, $X = 4$, যখন f_2, f_6 অথবা f_9 পরিবারটি নির্বাচন করা হয়,

$X = 5$, যখন f_5 অথবা f_{10} পরিবারটি নির্বাচন করা হয়,

এবং $X = 6$, যখন f_8 পরিবারটি নির্বাচন করা হয়।

যেহেতু আমরা ধরে নিয়েছি যে প্রতিটি পরিবার সমসম্ভবভাবে নির্বাচিত হয়েছে, তাই f_4 পরিবারটি নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা হল $\frac{1}{10}$ ।

এইভাবে, X এর মান 2 হওয়ার সম্ভাবনা হল $\frac{1}{10}$ । আমরা এটিকে লিখতে পারি $P(X = 2) = \frac{1}{10}$

আবার, f_1, f_3 অথবা f_7 পরিবারগুলোর যে-কোনো একটিকে নির্বাচন করার সম্ভাবনা হল

$$P(\{f_1, f_3, f_7\}) = \frac{3}{10}$$

এইভাবে, X এর মান 3 হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{10}$

আমরা লিখতে পারি $$P(X = 3) = \frac{3}{10}$$

অনুরূপে, আমরা পাই

$$P(X = 4) = P(\{f_2, f_6, f_9\}) = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 5) = P(\{f_5, f_{10}\}) = \frac{2}{10}$$

এবং $$P(X = 6) = P(\{f_8\}) = \frac{1}{10}$$

একটি সমসম্ভব চলকের মানসমূহের সঙ্গে তাদের অনুরূপ সম্ভাবনার বিবরণকে *সমসম্ভব চলক X এর সম্ভাবনা বিভাজন বলা হয়।*

সাধারণত, সমসম্ভব চলক X এর সম্ভাবনা বিভাজন নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত:

সংজ্ঞা 5 একটি সমসম্ভব চলক X -এর সম্ভাবনা বিভাজন হল সংখ্যার তন্ত্র।

X	:	x_1	x_2	...	x_n
P(X)	:	p_1	p_2	...	p_n

যেখানে, $$p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, i = 1, 2, ..., n$$

বাস্তব সংখ্যা $x_1, x_2, ..., x_n$ সমসম্ভব চলক X -এর সম্ভাব্য মান এবং p_i $(i = 1,2,..., n)$ হল সমসম্ভব চলক X এর ধরো, x_i -এর মান সম্ভাবনা অর্থাৎ, $P(X = x_i) = p_i$

দ্রষ্টব্য যদি সমসম্ভব চলক X -এর সম্ভাব্য মানগুলোর মধ্যে একটি মান x_i হয়, তবে $X = x_i$ উক্তিটি শুধুমাত্র নমুনা দেশের কিছু বিন্দুতে (বিন্দুগুলোতে) সত্য হয়। অতএব, X -এর মান x_i হওয়ার সম্ভাবনা সর্বদাই অশূন্য, অর্থাৎ, $P(X = x_i) \neq 0$ ।

আবার সমসম্ভব চলক X এর সম্ভাব্য সকল মানের জন্য, নমুনা দেশের সকল উপাদানগুলো অন্তর্ভুক্ত হয়। অতএব, একটি সম্ভাবনা বিভাজনের সকল সম্ভাবনার সমষ্টি অবশ্যই 1 হবে।

উদাহরণ 24 উত্তমরূপে মেশানো 52 টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে পরপর দুটি তাস পুন: প্রতিস্থাপিত করে টানা হল। টেক্কার সংখ্যার সম্ভাবনা বিভাজন নির্ণয় করো।

সমাধান টেক্কার সংখ্যা হল একটি সমসম্ভব চলক। ধরো এটি X দ্বারা প্রকাশ করা হল। স্পষ্টতই, X-এর মান 0, 1, অথবা 2 হতে পারে।

এখন, যেহেতু তাসগুলো পুন: প্রতিস্থাপিত করে টানা হয়েছে, সুতরাং দুটি তাস টানার পরীক্ষা দুটি স্বাধীন পরীক্ষা হয়।

সুতরাং,
$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(\text{ টেক্কা নয় এবং টেক্কা নয়}) \\ &= P(\text{টেক্কা নয়}) \times P(\text{টেক্কা নয়}) \\ &= \frac{48}{52} \times \frac{48}{52} = \frac{144}{169} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(\text{টেক্কা এবং টেক্কা নয় অথবা টেক্কা নয় এবং টেক্কা}) \\ &= P(\text{ টেক্কা এবং টেক্কা নয়}) + P(\text{ টেক্কা নয় এবং টেক্কা}) \\ &= P(\text{টেক্কা}).\ P(\text{টেক্কা নয়}) + P\ (\text{টেক্কা নয়})\ .\ P(\text{টেক্কা}) \\ &= \frac{4}{52} \times \frac{48}{52} + \frac{48}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{24}{169} \end{aligned}$$

এবং
$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P\ (\text{টেক্কা এবং টেক্কা}) \\ &= \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169} \end{aligned}$$

সুতরাং, নির্ণেয় সম্ভাবনা বিভাজনটি হল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{144}{169}$	$\frac{24}{169}$	$\frac{1}{169}$

উদাহরণ 25 এক জোড়া ছক্কা তিনবার ছোড়া হলে 2 টি ছক্কায় একই সংখ্যা জোড় (doublet)পড়ার সম্ভাবনা বিভাজন নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো X দুটি ছক্কায় একই সংখ্যা জোড় পড়ার সংখ্যাকে প্রকাশ করে। সম্ভাব্য সংখ্যা জোড়গুলো হল

$$(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)$$

স্পষ্টতই, X-এর মান 0, 1, 2, অথবা 3 হতে পারে।

দুটি ছক্কায় একই সংখ্যা জোড় পড়ার সম্ভাবনা $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

দুটি ছক্কায় একই সংখ্যা জোড় না পড়ার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

এখন $P(X = 0) = P$ (একই সংখ্যা জোড় না হওয়া) $= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

$P(X = 1) = P$ (একটি একই সংখ্যা জোড় এবং দুটি একই সংখ্যা জোড় নয়)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= 3\left(\frac{1}{6} \times \frac{5^2}{6^2}\right) = \frac{75}{216}$$

$P(X = 2) = P$ (দুটি একই সংখ্যা জোড় এবং একটি একই সংখ্যা জোড় নয়)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = 3\left(\frac{1}{6^2} \times \frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$$

এবং $P(X = 3) = P$ (তিনটি একই সংখ্যা জোড়)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

এইভাবে, নির্ণেয় সম্ভাবনা বিভাজনটি হল

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

যাচাইকরণ সম্ভাবনাগুলোর যোগফল

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216}$$

$$= \frac{125 + 75 + 15 + 1}{216} = \frac{216}{216} = 1$$

উদাহরণ 26 ধরো যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত বিদ্যালয় চলাকালীন কোনো একদিনে তুমি যত ঘণ্টা পড়াশোনা করো সেটিকে X দ্বারা সূচিত করা হয়। X দ্বারা x -এর মানসমূহ নিতে পারার সম্ভাবনার গঠন হল নিম্নরূপ, যেখানে k হল যে-কোনো অজ্ঞাত ধ্রুবক।

$$P(X = x) = \begin{cases} 0{\cdot}1, & \text{যদি } x = 0 \\ kx, & \text{যদি } x = 1 \text{ অথবা } 2 \\ k(5-x), & \text{যদি } x = 3 \text{ অথবা } 4 \\ 0, & \text{অন্যান্য ক্ষেত্রে} \end{cases}$$

(a) k এর মান নির্ণয় করো।

(b) সম্ভাবনা কত হবে যখন, তুমি কমপক্ষে দুই ঘণ্টা পড়াশোনা করো? ঠিক দুই ঘণ্টা পড়াশোনা করো? সবচেয়ে বেশি দুই ঘণ্টা পড়াশোনা করো?

সমাধান X -এর সম্ভাবনা বিভাজনটি হল

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	k	$2k$	$2k$	k

(a) আমরা জানি যে $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

সুতরাং, $0.1 + k + 2k + 2k + k = 1$

অর্থাৎ, $k = 0.15$

(b) P (তুমি কমপক্ষে দুই ঘণ্টা পড়াশোনা করো) $= P(X \geq 2)$

$= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$= 2k + 2k + k = 5k = 5 \times 0.15 = 0.75$

P(তুমি ঠিক দুই ঘণ্টা পড়াশোনা করো) $= P(X = 2)$

$= 2k = 2 \times 0.15 = 0.3$

P(তুমি সবচেয়ে বেশি দুই ঘণ্টা পড়াশোনা করো) $= P(X \leq 2)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 0.1 + k + 2k = 0.1 + 3k = 0.1 + 3 \times 0.15$

$= 0.55$

13.6.2 *সমসম্ভব চলকের মধ্যক (Mean of a random variable)*

অনেক সমস্যায়, একটি সমসম্ভব চলকের কিছু বৈশিষ্ট্য একটি একক সংখ্যা দ্বারা বিবৃত করা বাঞ্ছনীয়, যা এটির পরিসংখ্যা বিভাজন হতে গণনা করা যেতে পারে। এরূপ কিছু সংখ্যা হল মধ্যক, মধ্যমা এবং সংখ্যাগুরু মান। এই অনুচ্ছেদে, আমরা শুধুমাত্র মধ্যক নিয়ে আলোচনা করব। মধ্যক হল অবস্থানের একটি পরিমাপক অথবা কেন্দ্রীয় প্রবণতার ধারণা, যা মোটামুটিভাবে একটি সমসম্ভব চলকের মধ্যমান বা গড়মানকে নির্দেশ করে।

সংজ্ঞা 6 ধরো X একটি সমসম্ভব চলক যার সম্ভাব্য মানসমূহ হল $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ যাদের অনুরূপ সম্ভাবনাগুলো হল যথাক্রমে $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ । X -এর মধ্যক, μ দ্বারা প্রকাশিত সংখ্যাটি হল $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ অর্থাৎ, X-এর মধ্যক হল X-এর সম্ভাব্য মানগুলোর ভারযুক্ত গড়, যেখানে প্রতিটি মান ঘটে যাওয়া মানগুলোর সম্ভাবনা দ্বারা ভারযুক্ত।

একটি সমসম্ভব চলক X-এর মধ্যককে X -এর প্রত্যাশা (expectation)ও বলা হয়, যা E(X) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

এভাবে, $E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$.

অন্যভাবে বলা যায় যে, একটি সমসম্ভব চলক X -এর মধ্যক বা প্রত্যাশা হল X-এর সম্ভাব্য সকল মানের সাথে তাদের অনুরূপ সম্ভাবনার গুণফলের সমষ্টি।

উদাহরণ 27 ধরো একজোড়া ছক্কা নিক্ষেপ করা হল এবং সমসম্ভব চলক X হবে দুটি ছক্কায় উঠা সংখ্যাগুলোর সমষ্টি। X এর মধ্যক অথবা প্রত্যাশা নির্ণয় করো।

সমাধান এই পরীক্ষার নমুনা দেশটি 36 টি মৌলিক উপাদান (x_i, y_i) আকার বিশিষ্ট ক্রমযুগল দ্বারা গঠিত, যেখানে $x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ এবং $y_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

সমসম্ভব চলক X অর্থাৎ, দুটি ছক্কায় উঠা সংখ্যাগুলোর সমষ্টি 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 অথবা 12।

এখন, $P(X = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$

$$P(X = 3) = P(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 4) = P(\{(1,3), (2,2), (3,1)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 5) = P(\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 6) = P(\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 7) = P(\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}) = \frac{6}{36}$$

$$P(X = 8) = P(\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X=9) = P(\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(X=10) = P(\{(4,6),(5,5),(6,4)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P(X=11) = P(\{(5,6),(6,5)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X=12) = P(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}$$

X -এর সম্ভাবনা বিভাজন হল

X অথবা x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X) অথবা p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

অতএব,

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}$$

$$+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}$$

$$= \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = 7$$

এইভাবে, দুটি পক্ষপাতশূন্য ছক্কায় উঠা সংখ্যাগুলোর সমষ্টির মধ্যক হল 7 ।

13.6.3 একটি সমসম্ভব চলকের ভেদমান *(Variance of a random variable)*

একটি সমসম্ভব চলকের মধ্যক ওই সমসম্ভব চলকের মানের চলিষ্ণুতা (Variability) সম্পর্কে আমাদের কোনো তথ্য দেয় না। বস্তুতপক্ষে যদি ভেদমান ছোট হয়, তবে সমসম্ভব চলকের মান মধ্যকের মানের কাছাকাছি হয়। আবার, ভিন্ন সম্ভাবনা বিভাজনযুক্ত সমসম্ভব চলকগুলোর সমান মধ্যক থাকতে পারে, যা নিম্নের X এবং Y-এর বিভাজনে দেখানো হয়েছে।

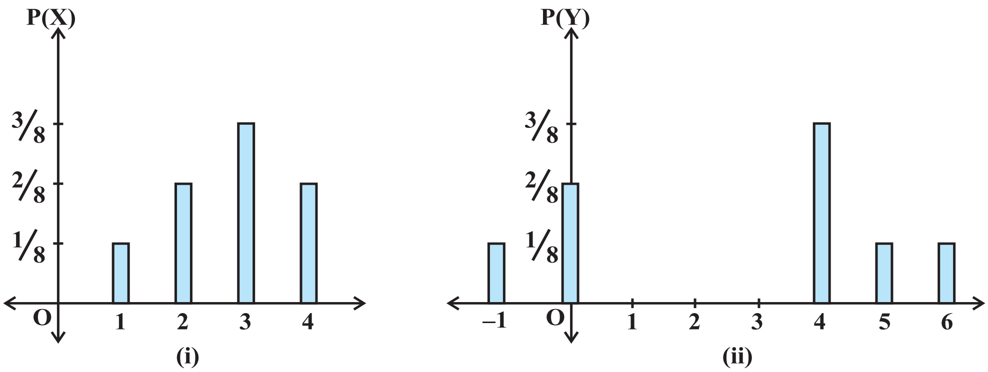
X	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

Y	-1	0	4	5	6
P(Y)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

স্পষ্টতই $\quad \mathrm{E(X)} = 1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{2}{8}+3\times\frac{3}{8}+4\times\frac{2}{8}=\frac{22}{8}=2.75$

এবং $\quad \mathrm{E(Y)} = -1\times\frac{1}{8}+0\times\frac{2}{8}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{1}{8}= 6\times\frac{1}{8}=\frac{22}{8}=2.75$

চলক X এবং Y হল ভিন্ন, যদিও তাদের মধ্যক সমান। এই বিভাজনগুলোর চিত্র উপস্থাপন থেকেও এটি সহজেই লক্ষ করা যায় (চিত্র 13.5)।



চিত্র 13.5

Y থেকে X কে আলাদা করতে, সমসম্ভব চলকের মানগুলো থেকে একটি পরিমাপ আমাদের প্রয়োজন। পরিসংখ্যায়, আমরা অধ্যয়ন করেছি যে ভেদমান হল তথ্যের মধ্যে ছড়ানো অথবা বিক্ষিপ্ত একটি পরিমাপ। একইরকমভাবে, একটি সমসম্ভব চলকের চলিষ্ণুতা অথবা ছড়ানো মান ভেদমানের সাহায্যে পরিমাপ করা যেতে পারে।

সংজ্ঞা 7 ধরো একটি সমসম্ভব চলক X -এর সম্ভাব্য মানগুলো $x_1, x_2,\ldots,x_n$ ঘটার সম্ভাবনাগুলো যথাক্রমে $p(x_1), p(x_2),\ldots, p(x_n)$ । ধরো $\mu = \mathrm{E(X)}$ হল X-এর গড় বা মধ্যক। X-এর ভেদমানকে Var (X) অথবা $\sigma_x^{\ 2}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যাকে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়

$$\sigma_x^{\ 2} = \mathrm{Var\,(X)} = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2\, p(x_i)$$

অথবা সমতুল্যভাবে

$$\sigma_x^{\ 2} = \mathrm{E}(\mathrm{X}-\mu)^2$$

অ-ঋণাত্মক সংখ্যা

$$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{Var(X)}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\, p(x_i)}$$

-কে সমসম্ভব চলক X -এর *সমক পার্থক্য* ***(Standard deviation)*** বলা হয়।
একটি সমসম্ভব চলকের ভেদমান নির্ণয়ের অপর একটি সূত্র।
আমরা জানি যে,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var\ (X)} &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\, p(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} ({x_i}^2 + \mu^2 - 2\mu x_i)\;\; p(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\, p(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu^2\, p(x_i) - \sum_{i=1}^{n} 2\mu x_i\, p(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\, p(x_i) + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p(x_i) - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\, p(x_i) + \mu^2 - 2\mu^2 \left[\text{যেহেতু } \sum_{i=1}^{n} p\ (x_i) = 1 \text{ এবং } \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\, p(x_i) - \mu^2
\end{aligned}
$$

অথবা, $$\mathrm{Var\ (X)} = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\, p(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)\right)^2$$

অথবা, $\mathrm{Var\ (X)} = \mathrm{E(X^2)} - [\mathrm{E(X)}]^2$, যেখানে $\mathrm{E(X^2)} = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\, p(x_i)$

উদাহরণ 28 একটি ঝোঁকশূন্য পাশা নিক্ষেপ করা হলে তার ওপর প্রাপ্ত সংখ্যার ভেদমান নির্ণয় করো।

সমাধান পরীক্ষার নমুনা দেশটি হল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}।

ধরো পাশা নিক্ষেপ করা হলে তার ওপর প্রাপ্ত সংখ্যা হল X। তাহলে X হল একটি সমসম্ভব চলক যেটি 1, 2, 3, 4, 5, অথবা 6 এই মানগুলো গ্রহণ করে।

এছাড়া $$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

সুতরাং, X এর সম্ভাবনা বিভাজন হল নিম্নরূপ

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

এখন $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$$

$$= 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}$$

এছাড়া $$E(X^2) = 1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

অর্থাৎ, $$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{91}{6}-\left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6}-\frac{441}{36} = \frac{35}{12}$$

উদাহরণ 29 যথেচ্ছভাবে বিন্যস্ত 52 টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে এক সাথে দুটি তাস (বা, পুনঃস্থাপন না করে একটির পর একটি) টানা হল। টানা তাস দুটিতে রাজার সংখ্যার গড়, ভেদমান এবং সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো টানা তাস দুটিতে রাজার সংখ্যা হল X । তাহলে X হল একটি সমসম্ভব চলক যেটি 0, 1 বা 2 এই মানগুলো গ্রহণ করতে পারে।

এখন, $$P(X = 0) = P\ (\text{রাজা নয়}) = \frac{^{48}C_2}{^{52}C_2} = \frac{\frac{48!}{2!(48-2)!}}{\frac{52!}{2!(52-2)!}} = \frac{48\times47}{52\times51} = \frac{188}{221}$$

$$P(X = 1) = P\ (\text{একটি রাজা এবং একটি রাজা নয়}) = \frac{^{4}C_1\ ^{48}C_1}{^{52}C_2}$$

$$= \frac{4\times48\times2}{52\times51} = \frac{32}{221}$$

এবং $$P(X = 2) = P\text{ (দুটি রাজা)} = \frac{^4C_2}{^{52}C_2} = \frac{4\times 3}{52\times 51} = \frac{1}{221}$$

অর্থাৎ, X এর সম্ভাবনা বিভাজন হল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

এখন, $$X\text{ -এর গড় মান } = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$$

$$= 0\times\frac{188}{221}+1\times\frac{32}{221}+2\times\frac{1}{221}=\frac{34}{221}$$

এছাড়া, $$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i)$$

$$= 0^2\times\frac{188}{221}+1^2\times\frac{32}{221}+2^2\times\frac{1}{221}=\frac{36}{221}$$

এখন, $$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{36}{221}-\left(\frac{34}{221}\right)^2=\frac{6800}{(221)^2}$$

সুতরাং, $$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\frac{\sqrt{6800}}{221}=0.37$$

অনুশীলনী 13.4

1. নিম্নলিখিত কোনটি একটি সমসম্ভব চলকের সম্ভাবনা বিভাজন নয় বিবৃত করো। তোমার উত্তরের সাপেক্ষে যুক্তি দাও।

(i)

X	0	1	2
P(X)	0.4	0.4	0.2

(ii)

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	0.5	0.2	– 0.1	0.3

(iii)

Y	– 1	0	1
P(Y)	0.6	0.1	0.2

(iv)

Z	3	2	1	0	–1
P(Z)	0.3	0.2	0.4	0.1	0.05

2. একটি পাত্রে 5 টি লাল ও 2 টি কালো বল আছে। পাত্র থেকে দুটি বল যথেচ্ছভাবে তোলা হল। ধরো কালো বলের সংখ্যাকে X দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে। X-এর সম্ভাব্য মানগুলো কী? X কি একটি সমসম্ভব চলক?

3. মনে করো যখন একটি মুদ্রা 6 বার টস করা হয়, তখন X দ্বারা হেড এর সংখ্যা ও টেল এর সংখ্যার মধ্যে অন্তরকে প্রকাশ করা হয়। X এর সম্ভাব্য মানগুলো কী?

4. নিম্নলিখিতগুলোর সম্ভাবনা বিভাজন নির্ণয় করো:

(i) একটি মুদ্রা দুইবার টস করায় হেড-এর সংখ্যা।

(ii) তিনটি মুদ্রাকে এক সাথে টস করায় টেল এর সংখ্যা।

(iii) একটি মুদ্রা চার বার টসে হেড এর সংখ্যা।

5. একটি লুডোর ছক্কা দুইবার নিক্ষেপের পরীক্ষায় সাফল্যের সংখ্যার সম্ভাবনা বিভাজন নির্ণয় করো, যেখানে সাফল্যকে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে

(i) 4 থেকে বড়ো সংখ্যা।

(ii) কমপক্ষে একটি ছক্কায় ছয় উঠেছে।

6. 6 টি ত্রুটিপূর্ণ বালব অন্তর্ভুক্ত আছে এমন 30 টি বাল্‌বের একটি লট্ থেকে যথেচ্ছভাবে পুনঃস্থাপিত করে 4 টি বাল্‌বের একটি নমুনা তোলা হয়েছে। ত্রুটিপূর্ণ বাল্‌বের সংখ্যার সম্ভাবনা বিভাজন নির্ণয় করো।

7. ঝোঁকপূর্ণ (biased) একটি মুদ্রা টস করে দেখা গেলো যে টেল এর চেয়ে হেড ঘটার সম্ভাবনা 3 গুণ। যদি মুদ্রাটি দুইবার টস করা হয় তবে, টেল এর সংখ্যার সম্ভাবনা বিভাজন নির্ণয় করো।

8. একটি সমসম্ভব চলক X এর সম্ভাবনা বিভাজন হল নিম্নরূপ ঃ

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

তাহলে নির্ণয় করো

(i) k (ii) $P(X < 3)$

(iii) $P(X > 6)$ (iv) $P(0 < X < 3)$

9. সমসম্ভব চলক X এর একটি সম্ভাবনা বিভাজন P(X) হল নিম্নরূপ, যেখানে k হল যে-কোনো সংখ্যা:

$$P(X)=\begin{cases} k, & \text{যদি } x=0 \\ 2k, & \text{যদি } x=1 \\ 3k, & \text{যদি } x=2 \\ 0, & \text{অন্যথায়} \end{cases}$$

(a) k এর মান নির্ণয় করো।

(b) নির্ণয় করো : $P(X<2)$, $P(X\le 2)$, $P(X\ge 2)$।

10. একটি পক্ষপাতশূন্য মুদ্রা তিনবার টসের পরীক্ষায় হেড-এর সংখ্যার গড় নির্ণয় করো।

11. দুটি পাশাকে এক সাথে নিক্ষেপ করা হয়েছে। যদি পাশা দুটিতে ছয় ওঠার সংখ্যাকে X দিয়ে সূচিত করা হয় তবে X এর প্রত্যাশা (expectetion) নির্ণয় করো।

12. প্রথম ছয়টি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা থেকে যথেচ্ছভাবে (পুনঃস্থাপন না করে) দুটি সংখ্যা নির্বাচন করা হল। ধরো প্রাপ্ত সংখ্যা দুটির মধ্যে বড়োটিকে X দিয়ে সূচিত করা হল। E(X) নির্ণয় করো।

13. মনে করো দুটি পক্ষপাতশূন্য পাশা গড়িয়ে দেওয়ার পরীক্ষায় পাশার ওপর প্রাপ্ত সংখ্যা দুটির যোগফলকে X দিয়ে সূচিত করা হয়। X এর ভেদমান এবং সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

14. একটি শ্রেণিতে পাঠরত 15 জন শিক্ষার্থীর বয়স হল 14, 17, 15, 14, 21, 17, 19, 20, 16, 18, 20, 17, 16, 19 এবং 20 বছর। একজন শিক্ষার্থী এমনভাবে নির্বাচন করা হয়েছে যে প্রত্যেক শিক্ষার্থী নির্বাচিত হওয়ার একই সুযোগ রয়েছে এবং নির্বাচিত শিক্ষার্থীর বয়সকে X হিসাবে নথিভুক্ত করা হয়েছে। সমসম্ভব চলক X-এর সম্ভাবনা বিভাজন কী হবে? X-এর গড়, ভেদমান এবং সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

15. কোনো বৈঠকে উত্থাপিত একটি নির্দিষ্ট প্রস্তাব ওই বৈঠকে উপস্থিত সদস্যদের মধ্যে 70% সদস্য সমর্থন করে এবং 30% সদস্য বিরোধিতা করে। একজন সদস্য যথেচ্ছভাবে নির্বাচন করা হল এবং যদি সে বিরোধিতা করে তবে আমরা $X = 0$ ধরে নেবো এবং যদি সে সমর্থন করে তবে $X = 1$ ধরব। E(X) এবং Var (X) নির্ণয় করো।

নিম্নলিখিত প্রতিটি ক্ষেত্রে সঠিক উত্তরটি বেঁছে নাও :

16. একটি পাশার তিনটি তলে 1 , দুটি তলে 2 এবং একটি তলে 5 লেখা আছে. পাশাটি নিক্ষেপে প্রাপ্ত সংখ্যাগুলোর গড় হল

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) $\frac{8}{3}$

17. ধরে নাও যে তাসের একটি প্যাকেট থেকে যথেচ্ছভাবে দুটি তাস টানা হয়েছে। মনে করো X হল প্রাপ্ত টেক্কার সংখ্যা। তাহলে E(X) এর মান হল

(A) $\frac{37}{221}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{2}{13}$

13.7 বার্নোলি প্রচেষ্টা এবং দ্বিপদ বিভাজন (Bernoulli Trials Binomial Distribution)

13.7.1 *বার্নোলি প্রচেষ্টা (Bernoulli trials)*

অনেক পরীক্ষার প্রকৃতি পরস্পর বিপরীত দুটি ফলাফল যুক্ত (dichotomous) হয়। উদাহরণস্বরূপ, একটি মুদ্রাকে টস্ করা হলে 'হেড' বা 'টেল' দেখায়, একটি উৎপাদিত বস্তু 'ত্রুটিপূর্ণ' বা 'ত্রুটিমুক্ত' হতে পারে, কোনো প্রশ্নের উত্তর 'হ্যাঁ' বা 'না' হতে পারে, একটি ডিম ফুটে 'বাঁচ্চা হতে পারে' বা 'বাচ্চা নাও হতে পারে', একটি সিদ্ধান্ত হল 'হ্যাঁ' বা 'না' ইত্যাদি। এই ক্ষেত্রগুলোতে, প্রচলিতভাবে ফলাফলগুলির একটিকে 'সাফল্য' (success) এবং অন্যটিকে 'অসাফল্য' বা 'ব্যর্থতা' ('not success' or 'failure') বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ, একটি মুদ্রাকে টস করার পর, যদি হেড ওঠাকে সাফল্য ধরা হয়, তবে টেল ওঠাকে ব্যর্থতা বলা হয়।

প্রত্যেকবার যখন আমরা একটি মুদ্রা টস করি বা একটি ছক্কা নিক্ষেপ করি বা অন্য কোনো পরীক্ষা সম্পাদন করি, তখন আমরা এটিকে একটি প্রচেষ্টা (trial) বলব। যদি একটি মুদ্রা, ধরা যাক, 4 বার টস করা হল, তবে প্রচেষ্টার সংখ্যা হবে 4 এবং প্রত্যেক প্রচেষ্টার ক্ষেত্রে ঠিক দুটি ফলাফল থাকবে, যথা 'সাফল্য' বা 'অসাফল্য'। একটি প্রচেষ্টার ফলাফল অপর কোনো প্রচেষ্টার ফলাফল থেকে স্বাধীন। এরূপ প্রত্যেক প্রচেষ্টায়, সাফল্য বা ব্যর্থতার সম্ভাবনা স্থির থাকে। এরূপ স্বাধীন প্রচেষ্টাগুলো যার কেবলমাত্র দুটি ফলাফল থাকে, যা সাধারণত সাফল্য বা ব্যর্থতা হিসেবে অভিহিত হয়, তাকে *বার্নোলি প্রচেষ্টা* বলে।

সংজ্ঞা 8 একটি সমসম্ভব পরীক্ষার প্রচেষ্টাসমূহকে বার্নোলি প্রচেষ্টা বলা হবে, যদি এগুলো নিম্নলিখিত শর্তগুলো সিদ্ধ করে :

(i) প্রচেষ্টার সংখ্যা সসীম হতে হবে।

(ii) প্রচেষ্টাসমূহ স্বাধীন হতে হবে।

(iii) প্রতিটি প্রচেষ্টার ঠিক দুটি ফলাফল থাকবে : 'সাফল্য' অথবা 'ব্যর্থতা'।

(iv) প্রতিটি প্রচেষ্টায় সাফল্যের সম্ভাবনা একই থাকবে।

উদাহরণস্বরূপ, একটি ছক্কার 50 বার নিক্ষেপ, হল একটি 50 টি বার্নোলি প্রচেষ্টার ক্ষেত্র, যেখানে প্রতিটি প্রচেষ্টার ফলাফল সাফল্য (ধরো একটি যুগ্ম সংখ্যা) বা ব্যর্থতা (একটি অযুগ্ম সংখ্যা) হয় এবং 50 টি নিক্ষেপের জন্য সাফল্যের সম্ভাবনা (p) একই থাকে। নিঃসন্দেহে, ছক্কাটির পরপর নিক্ষেপগুলো হল স্বাধীন পরীক্ষা। যদি ছক্কাটি পক্ষপাতশূন্য হয় এবং ছক্কাটির ছয়টি তলে 1 থেকে 6 সংখ্যাগুলো লেখা থাকে, তবে $p = \frac{1}{2}$ এবং $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ = ব্যর্থতার সম্ভাবনা।

উদাহরণ 30 7টি লাল এবং 9 টি কালো বল পূর্ণ একটি পাত্র থেকে ছয়টি বল ক্রমান্বয়ে তোলা হল। বল তোলার প্রচেষ্টাগুলো বার্নোলি প্রচেষ্টা কিনা বলো, যখন প্রতিবার তোলার পরে তোলা বলটি

(i) পুনঃস্থাপন করা হয় (ii) পাত্রটিতে পুনঃস্থাপন করা হয় না।

সমাধান

(i) এখানে প্রচেষ্টাগুলোর সংখ্যা সসীম। যখন পুনঃস্থাপন করে তোলা হয়, তখন সাফল্যের সম্ভাবনা

(ধরা যাক, লাল বল) হল $p = \dfrac{7}{16}$ যা ছয়টি প্রচেষ্টার (তোলার) জন্য একই থাকে। অতএব, পুনঃ স্থাপনের সাথে বল তোলা হল বার্নৌলি প্রচেষ্টা।

(ii) যখন পুনঃস্থাপন না করে বল তোলা হয়, তখন প্রথম প্রচেষ্টায় সাফল্যের (অর্থাৎ, লাল বল) সম্ভাবনা হল $\dfrac{7}{16}$, দ্বিতীয় প্রচেষ্টায় $\dfrac{6}{15}$ হবে যদি প্রথম তোলা বলটি লাল হয় বা $\dfrac{7}{15}$ যদি প্রথম তোলা বলটি কালো হয় এবং একইভাবে। স্পষ্টতই, সমস্ত প্রচেষ্টায় সাফল্যের সম্ভাবনা সমান নয়, সুতরাং, প্রচেষ্টাটি বার্নৌলি প্রচেষ্টা নয়।

13.7.2 *দ্বিপদ বিভাজন (Binomial distribution)*

একটি মুদ্রা টস্ করার প্রয়োগ বিবেচনা করো যেখানে প্রত্যেক প্রচেষ্টার ফলাফল সাফল্য (ধরো হেড) বা অসাফল্য (টেল) হয়। ধরা যাক প্রতিটি প্রচেষ্টার সাফল্য এবং অসাফল্যকে যথাক্রমে S এবং F দ্বারা নির্ধারণ করা হয়। মনে করো আমরা ছয়টি প্রচেষ্টার মধ্যে একটি সাফল্য কত রকমে পেতে পারি তা নির্ণয়ে আগ্রহী। স্পষ্টতই, এখানে ছয়টি বিভিন্ন ক্ষেত্র রয়েছে যেগুলো নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায় ঃ

SFFFFF, FSFFFF, FFSFFF, FFFSFF, FFFFSF, FFFFFS

একইভাবে, দুটি সাফল্য এবং 4 টি ব্যর্থতাকে $\dfrac{6!}{4! \times 2!}$ সমবায়ে লেখা যায়। সমস্ত ক্ষেত্রগুলোকে লিপিবদ্ধ করা একটি দীর্ঘ কার্য হবে। এজন্য, 0, 1, 2,..., n সংখ্যক সাফল্যের সম্ভাবনা গণনা একটি দীর্ঘ এবং সময় সাপেক্ষ কাজ। n- সংখ্যক বার্নৌলি প্রচেষ্টার সাফল্যের সংখ্যার সম্ভাবনা নির্ণয় করার জন্য একটি সূত্র গঠন করা হয়েছে, যাতে দীর্ঘ গণনাকে এড়ানো যায় এবং সম্ভাব্য ক্ষেত্রগুলোকে লিপিবদ্ধ করা থেকে অব্যাহিত পাওয়া যায়। এটির জন্য চলো আমরা তিনটি বার্নৌলি প্রচেষ্টা দ্বারা গঠিত একটি পরীক্ষা লক্ষ করি, যেখানে প্রতিটি প্রচেষ্টার সাফল্য এবং ব্যর্থতার সম্ভাবনা যথাক্রমে p এবং $q = 1 - p$ । পরীক্ষাটির নমুনা দেশের (Sample space) সেটটি হল —

$$S = \{SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF\}$$

সাফল্যের সংখ্যা হল একটি সমসম্ভব চলক X এবং এটির মান 0, 1, 2, বা 3 হতে পারে। সাফল্যের সংখ্যার সম্ভাবনা বিভাজনটি নিম্নরূপ :

$$P(X = 0) = P(\text{কোনো সাফল্য নয়}) = P(\{FFF\}) = P(F)\ P(F)\ P(F)$$
$$= q\,.\,q\,.\,q = q^3 \quad \text{যেহেতু প্রচেষ্টাগুলো স্বাধীন।}$$
$$P(X = 1) = P(\text{একটি সাফল্য})$$
$$= P(\{SFF, FSF, FFS\}) = P(\{SFF\}) + P(\{FSF\}) + P(\{FFS\})$$
$$= P(S)\ P(F)\ P(F) + P(F)\ P(S)\ P(F) + P(F)\ P(F)\ P(S)$$
$$= p.q.q + q.p.q + q.q.p = 3pq^2$$
$$P(X = 2) = P\ (\text{দুইটি সাফল্য}) = P(\{SSF, SFS, FSS\})$$
$$= P(\{SSF\}) + P\ (\{SFS\}) + P(\{FSS\})$$

$= \text{P(S) P(S) P(F)} + \text{P(S) P(F) P(S)} + \text{P(F) P(S) P(S)}$

$= p.p.q. + p.q.p + q.p.p = 3p^2q$

এবং $\text{P}(\text{X} = 3) = \text{P}$(তিনটি সাফল্য) $= \text{P}(\{\text{SSS}\})$

$= \text{P(S)} . \text{P(S)} . \text{P(S)} = p^3$

সুতরাং, X এর সম্ভাবনা বিভাজন হল

X	0	1	2	3
P(X)	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

তাছাড়া, $(q+p)^3$ এর দ্বিপদ বিস্তৃতি হল

$$q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3$$

লক্ষ করো যে 0, 1, 2 অথবা 3 এর সাফল্যের সম্ভাবনা যথাক্রমে $(q+p)^3$ বিস্তৃতির প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পদ।

তাছাড়া, যেহেতু $q + p = 1$, এটি দেখায় যে, এই সম্ভাবনাসমূহের প্রত্যাশিত যোগফল 1।

এইভাবে, আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে, n-সংখ্যক বার্নৌলি প্রচেষ্টা বিশিষ্ট কোনো পরীক্ষায় 0, 1, 2,..., n সাফল্যের সম্ভাবনা, $(q+\text{p})^n$ বিস্তৃতির প্রথম, দ্বিতীয়, ... $(n+1)$ তম পদ থেকে প্রাপ্ত হয়। এই বিবৃতি (ফলাফল)টি প্রমাণ করতে, চলো আমরা, n -সংখ্যক বার্নৌলি প্রচেষ্টা বিশিষ্ট কোনো পরীক্ষায় x -সংখ্যক সাফল্যের সম্ভাবনা নির্ণয় করি।

স্পষ্টতই, x -সংখ্যক সাফল্য (S) এর ক্ষেত্রে, $(n-x)$ -সংখ্যক অসাফল্য (F) থাকবে।

এখন, x-সংখ্যক সাফল্য (S) এবং $(n-x)$-সংখ্যক অসাফল্য (F), $\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$ উপায়ে নির্ণয় করা যায়।

প্রতিটি ক্ষেত্রে, x-সংখ্যক সাফল্য এবং $(n-x)$ -সংখ্যক অসাফল্যের সম্ভাবনা হল

$= \text{P}(x$ -সংখ্যক সাফল্য$) \, . \, \text{P}(n\text{–}x)$ -সংখ্যক অসাফল্য

$$= \underbrace{\text{P(S).P(S)...P(S)}}_{x \text{ বার}} \cdot \underbrace{\text{P(F).P(F)...P(F)}}_{(n-x) \text{ বার}} = p^x \, q^{n-x}$$

অতএব, n-সংখ্যক বার্নৌলি প্রচেষ্টায় x-সংখ্যক সাফল্যের সম্ভাবনা হল $\dfrac{n!}{x!(n-x)!} p^x \, q^{n-x}$

বা, ${}^n\text{C}_x p^x \; q^{n-x}$

এইভাবে, P(x-সংখ্যক সাফল্য) $= {}^n\text{C}_x p^x \, q^{n-x}$, $\quad x = 0, 1, 2, ..., n.$ $(q = 1 - p)$

স্পষ্টতই, P(x-সংখ্যক সাফল্য), অর্থাৎ ${}^n\text{C}_x p^x \, q^{n-x}$ হল $(q+p)^n$ দ্বিপদ বিস্তৃতির $(x+1)$ তম পদ।

অতএব, n -সংখ্যক বার্নৌলি প্রচেষ্টা যুক্ত কোনো পরীক্ষায় সাফল্যের সংখ্যার সম্ভাবনা বিভাজন আমরা $(q+p)^n$-এর দ্বিপদ বিস্তৃতি থেকে পেতে পারি।

সুতরাং, x -সংখ্যক সাফল্যের বিভাজন নিম্নরূপে লেখা যায় :

X	0	1	2	...	x	...	n
P(X)	${}^nC_0\, q^n$	${}^nC_1\, q^{n-1}p^1$	${}^nC_2\, q^{n-2}p^2$		${}^nC_x\, q^{n-x}p^x$		${}^nC_n\, p^n$

উপরোক্ত এই সম্ভাবনা বিভাজনটি n এবং p প্রাচল (parameter) যুক্ত দ্বিপদ বিভাজন নামে পরিচিত, কারণ প্রদত্ত n এবং p এর মানের জন্য আমরা সম্পূর্ণ সম্ভাবনা বিভাজনটি নির্ণয় করতে পারি।

x -সংখ্যক সাফল্যের সম্ভাবনা $P(X = x)$ কে $P(x)$ রূপেও প্রকাশ করা হয় এবং এটিকে লেখা হয় $P(x) = {}^nC_x\, q^{n-x}p^x, \quad x = 0, 1, ..., n. \ (q = 1 - p)$

এই $P(x)$-কে দ্বিপদ বিভাজনের সম্ভাবনা অপেক্ষক *(probability function)* বলা হয়।

n-সংখ্যক বার্নোলি প্রচেষ্টা যুক্ত একটি দ্বিপদ বিভাজন এবং প্রতিটি প্রচেষ্টায় সাফল্যের সম্ভাবনা p কে, $B(n, p)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

চলো এখন আমরা কতগুলো উদাহরণ আলোচনা করি।

উদাহরণ 31 যদি একটি পক্ষপাতশূন্য মুদ্রাকে 10 বার টস্ করা হয়, তবে সম্ভাবনা নির্ণয় করো। যখন

(i) ঠিক ছয়টি হেড্ উঠে।

(ii) কমপক্ষে ছয়টি হেড্ উঠে।

(iii) সর্বাধিক ছয়টি হেড্ উঠে।

সমাধান একটি মুদ্রা বারবার টস্ করা হল বার্নোলি প্রচেষ্টা। ধরা যাক, 10টি প্রচেষ্টাযুক্ত পরীক্ষাটির হেড উঠার সংখ্যাকে X দ্বারা সূচিত করা হয়।

স্পষ্টতই, X এর $n = 10$ এবং $p = \dfrac{1}{2}$ যুক্ত একটি দ্বিপদ বিভাজন আছে।

সুতরাং, $$P(X = x) = {}^nC_x q^{n-x}p^x,\ x = 0, 1, 2, ..., n$$

এখানে, $$n = 10,\ p = \frac{1}{2},\ q = 1 - p = \frac{1}{2}$$

অতএব, $$P(X = x) = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} \left(\frac{1}{2}\right)^x = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

এখন, (i) $$P(X = 6) = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10!}{6! \times 4!}\,\frac{1}{2^{10}} = \frac{105}{512}$$

(ii) $P($ কমপক্ষে ছয়টি হেড্$) = P(X \geq 6)$

$$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$= {}^{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_7\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \left[\left(\frac{10!}{6!\times4!}\right)+\left(\frac{10!}{7!\times3!}\right)+\left(\frac{10!}{8!\times2!}\right)+\left(\frac{10!}{9!\times1!}\right)+\left(\frac{10!}{10!}\right)\right]\frac{1}{2^{10}} = \frac{193}{512}$$

(iii) P(সর্বাধিক ছয়টি হেড) $= P(X \le 6)$

$$= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$+ {}^{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{848}{1024} = \frac{53}{64}$$

উদাহরণ 32 10% নষ্ট ডিম আছে এমন একগুচ্ছ ডিম থেকে পুনঃস্থাপনের সাহায্যে ক্রমান্বয়ে 10টি ডিম তোলা হল। তোলা ডিমগুলোর মধ্যে অন্তত একটি ডিম নষ্ট হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক, তোলা 10 টি ডিমের মধ্যে নষ্ট ডিমের সংখ্যাকে X দ্বারা সূচিত করা হল। যেহেতু পুন:স্থাপনের মাধ্যমে ডিমগুলো তোলা হয়, তাই প্রচেষ্টাটি হল একটি বার্নোলি প্রচেষ্টা।

স্পষ্টতই, $n = 10$ এবং $p=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$ যুক্ত X এর দ্বিপদ বিভাজন আছে।

অতএব, $q = 1-p=\frac{9}{10}$

এখন, P(কমপক্ষে একটি নষ্ট ডিম) $=P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1-{}^{10}C_0\left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 1-\frac{9^{10}}{10^{10}}$$

অনুশীলনী 13.5

1. একটি ছক্কাকে 6 বার নিক্ষেপ করা হল। যদি ‘একটি অযুগ্ম সংখ্যা পাওয়া’ একটি সাফল্য হয়, তবে সম্ভাবনা কি হবে, যখন

   (i) 5টি সাফল্য ? (ii) কমপক্ষে 5টি সাফল্য ?

   (iii) সর্বাধিক 5টি সাফল্য প্রাপ্ত হয় ?

2. এক জোড়া ছক্কাকে 4 বার নিক্ষেপ করা হল। যদি দুটি একই সংখ্যা পাওয়াকে সাফল্য বিবেচনা করা হয়, তবে দুটি সাফল্য পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

3. বিপুল পরিমাণ বস্তুর সংকলনে 5% ত্রুটি যুক্ত বস্তু রয়েছে। 10 টি বস্তুর একটি নমুনায় একটির বেশি ত্রুটিযুক্ত বস্তু না থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

4. অবিন্যস্তভাবে মেশানো 52 টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে পুনঃস্থাপনের মাধ্যমে ক্রমান্বয়ে 5টি তাস তোলা হল। তবে সম্ভাবনা কী হবে, যখন

(i) 5 টি তাসের প্রতিটিই ইস্কাবন (Spades) হয়?

(ii) কেবলমাত্র 3 টি তাস ইস্কাবন হয়?

(iii) কোনোটিই ইস্কাবন নয়?

5. কোনো কারখানায় উৎপাদিত একটি বাল্ব 150 দিন ব্যবহারের পর নষ্ট (fuse) হওয়ার সম্ভাবনা 0.05। এরূপ 5 টি বাল্বের ক্ষেত্রে 150 দিন ব্যবহারের পর সম্ভাবনা নির্ণয় করো, যখন

(i) একটিও নষ্ট হবে না।

(ii) একটির বেশি নষ্ট হবে না।

(iii) একটির বেশি নষ্ট হবে।

(iv) কমপক্ষে একটি নষ্ট হবে।

6. একটি থলিতে 10 টি বল আছে যাদের প্রত্যেকটির উপর 0 থেকে 9 পর্যন্ত অঙ্কগুলোর যে-কোনো একটি অঙ্ক লেখা আছে। যদি থলি থেকে পুনঃস্থাপনের মাধ্যমে ক্রমান্বয়ে 4 টি বল তোলা হয়, তবে কোনোটিই 0 অঙ্ক চিহ্নিত নয়, এর সম্ভাবনা কত?

7. কোনো একটি পরীক্ষায়, সত্য-মিথ্যা প্রকারের 20টি প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করা হল। ধরা যাক একজন ছাত্র তার প্রতিটি প্রশ্নের উত্তর নির্ধারণে একটি পক্ষপাতশূন্য মুদ্রাকে টস্ করল। যদি মুদ্রাটিতে হেড উঠে, তবে সে 'সত্য' উত্তর দেয়; যদি টেল্ উঠে, তবে 'মিথ্যা' উত্তর দেয়। কমপক্ষে 12 টি প্রশ্নের উত্তর সঠিক দেওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

8. ধরা যাক, X এর দ্বিপদ বিভাজনটি হল $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$। দেখাও যে $X = 3$ হল সর্বাধিক সম্ভাব্য পরিণাম (likely outcome)।

(ইঙ্গিত : $P(X = 3)$ হল সমস্ত $P(x_i)$, $x_i = 0,1,2,3,4,5,6$) এর মধ্যে বৃহত্তম।

9. সম্ভাব্য তিনটি উত্তরযুক্ত একটি বহু বিকল্প পরীক্ষায় একটি পরীক্ষার্থীর প্রতি পাঁচটি প্রশ্নের উত্তরে কেবলমাত্র অনুমানের মাধ্যমে চারটি বা তার অধিক সঠিক উত্তর পাওয়ার সম্ভাবনা কি হবে?

10. এক ব্যক্তি একটি লটারির 50 টি টিকিট ক্রয় করে, যার মধ্যে প্রত্যেকটিতে পুরস্কার পাওয়ার সুযোগ হল $\frac{1}{100}$। তবে এর সম্ভাবনা কি হবে যখন সে (a) কমপক্ষে একবার (b) ঠিক একবার (c) কমপক্ষে দুবার, পুরস্কার পাবে?

11. একটি ছক্কাকে 7 বার নিক্ষেপ করা হলে ঠিক দুবার 5 পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

12. একটি ছক্কাকে 6 বার নিক্ষেপ করা হলে সর্বাধিক দুবার 6 পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

13. এটি জানা যায় যে, উৎপাদিত নির্দিষ্ট কতগুলো দ্রব্যের 10% ত্রুটিযুক্ত। এ জাতীয় 12 টি দ্রব্যের একটি যথেচ্ছ নমুনায় 9 টি দ্রব্য ত্রুটিযুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা কত?

নীচের প্রতিটি ক্ষেত্রে সঠিক উত্তর নির্বাচনে করো:

14. 100 টি বাল্ব পূর্ণ একটি বাক্সে 10 টি ত্রুটিযুক্ত। 5 টি বাল্বের একটি নমুনায়, কোনো বাল্বই ত্রুটিযুক্ত না হওয়ার সম্ভাবনা হল

(A) 10^{-1} (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (C) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (D) $\frac{9}{10}$

15. একজন শিক্ষার্থীর সাঁতারু না হওয়ার সম্ভাবনা হল $\frac{1}{5}\cdot$ । তবে পাঁচজন শিক্ষার্থীর মধ্যে, চারজন সাঁতারু হওয়ার সম্ভাবনা হল

(A) ${}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$ (B) $\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$

(C) ${}^5C_1\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4$ (D) কোনোটি নয়।

বিবিধ উদাহরণ

উদাহরণ 33 চারটি বাক্সে কতগুলো রঙিন বল নিম্নের সারণির মত বণ্টন করা হল :

বাক্স	রঙ			
	কালো	সাদা	লাল	নীল
I	3	4	5	6
II	2	2	2	2
III	1	2	3	1
IV	4	3	1	5

যথেচ্ছভাবে একটি বাক্স নির্বাচন করা হল এবং নির্বাচিত বাক্স থেকে একটি বল যথেচ্ছভাবে তোলা হল। যদি তোলা বলটি কালো হয় তবে তা বাক্স III থেকে তোলার সম্ভাবনা কী হবে?

সমাধান ধরা যাক A, E_1, E_2, E_3 এবং E_4 হল নিম্নরূপে সংজ্ঞাত ঘটনা :

A : একটি কালো বল নির্বাচিত হল E_1 : বাক্স I নির্বাচিত হল

E_2 : বাক্স II নির্বাচিত হল E_3 : বাক্স III নির্বাচিত হল

E_4 : বাক্স IV নির্বাচিত হল

যেহেতু যথেচ্ছভাবে বাক্সগুলো নির্বাচিত করা হচ্ছে,

অতএব $$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$$

এছাড়াও, $$P(A|E_1) = \frac{3}{18},\ P(A|E_2) = \frac{2}{8},\ P(A|E_3) = \frac{1}{7} \text{ এবং } P(A|E_4) = \frac{4}{13}$$

P(বাক্স III নির্বাচিত হয়, যখন এটি জানা আছে যে তোলা বলটি কালো) = $P(E_3|A)$। বেইজের উপপাদ্যের সাহায্যে,

$$P(E_3|A) = \frac{P(E_3)\cdot P(A|E_3)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)+P(E_4)P(A|E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{18}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{13}} = 0.165$$

উদাহরণ 34 দ্বিপদ বিভাজন $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ -এর মধ্যক নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক, X হল যথেচ্ছ চলক যার সম্ভাবনা বিভাজন হল $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$।

এখানে, $$n = 4,\ p = \frac{1}{3} \text{ এবং } q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

আমরা জানি, $$P(X = x) = {}^4C_x\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}\left(\frac{1}{3}\right)^x,\ x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

অর্থাৎ X -এর বিভাজন হল

x_i	$P(x_i)$	$x_i\ P(x_i)$
0	${}^4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^4$	0
1	${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$	${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$

2	${}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$2\left({}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$
3	${}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3\left({}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)$
4	${}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$4\left({}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)$

এখন মধ্যক (μ) $= \sum_{i=1}^{4} x_i\, p(x_i)$

$$= 0 + {}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) + 2\cdot{}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\cdot{}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4\cdot{}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 4\times\frac{2^3}{3^4} + 2\times 6\times\frac{2^2}{3^4} + 3\times 4\times\frac{2}{3^4} + 4\times 1\times\frac{1}{3^4}$$

$$= \frac{32+48+24+4}{3^4} = \frac{108}{81} = \frac{4}{3}$$

উদাহরণ 35 একজন বন্দুকবাজের একটি লক্ষ্যকে আঘাত করার সম্ভাবনা $\frac{3}{4}$ । সে কমপক্ষে কতবার গুলি চালাবে যাতে লক্ষ্যটিকে কমপক্ষে একবার আঘাত করার সম্ভাবনা 0.99 এর অধিক হয়?

সমাধান ধরা যাক বন্দুকবাজ n বার গুলি চালায়। অবশ্যই, n বার গুলি চালানো হল n -সংখ্যক বার্নৌলি প্রচেষ্টা। প্রতিটি প্রচেষ্টায়, p = লক্ষ্যবস্তুকে আঘাত করার সম্ভাবনা $= \frac{3}{4}$ এবং q = লক্ষ্যবস্তুকে আঘাত না করার সম্ভাবনা $= \frac{1}{4}$ । অতএব, $P(X = x) = {}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x = {}^nC_x\left(\frac{1}{4}\right)^{n-x}\left(\frac{3}{4}\right)^x = {}^nC_x\,\frac{3^x}{4^n}$.

এখন, দেওয়া আছে,

P(কমপক্ষে একবার লক্ষ্যবস্তুকে আঘাত করা) > 0.99

অর্থাৎ, $P(x \geq 1) > 0.99$

সুতরাং, $1 - P(x=0) > 0.99$

বা, $1 - {}^{n}C_0 \frac{1}{4^n} > 0.99$

বা, ${}^{n}C_0 \frac{1}{4^n} < 0.01$ অর্থাৎ, $\frac{1}{4^n} < 0.01$

বা, $4^n > \frac{1}{0.01} = 100$ ... (1)

অসমতা (1)কে সিদ্ধকারী n এর ন্যূনতম মান হল 4।

তাই, বন্দুকবাজ অবশ্যই 4 বার গুলি চালাবে।

উদাহরণ 36 A এবং B ক্রমান্বয়ে একজনের পর আরেকজন একটি ছক্কা নিক্ষেপ করে যতক্ষণ না পর্যন্ত তাদের মধ্যে একজন একটি ‘6’ পায় এবং অতঃপর খেলাটিতে জয়ী হয়। যদি প্রথমে A খেলাটি শুরু করে তবে তাদের প্রত্যেকের জয়লাভ করার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক, S সফলতার (নিক্ষেপে ‘6’ আসা) ঘটনাকে এবং F অসফলতার (নিক্ষেপে ‘6’ না আসা) ঘটনার প্রকাশ করে।

অতএব, $P(S) = \frac{1}{6}, P(F) = \frac{5}{6}$

$$P(\text{প্রথম নিক্ষেপে A জয়লাভ করে}) = P(S) = \frac{1}{6}$$

A তৃতীয় বার নিক্ষেপ করার সুযোগ পাবে, যখন A প্রথম নিক্ষেপে এবং B দ্বিতীয় নিক্ষেপে অসফল হয়।

অতএব, $P(\text{তৃতীয় নিক্ষেপে A জয়লাভ করে} = P(FFS) = P(F)P(F)P(S) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$$

$P(\text{পঞ্চম নিক্ষেপে A জয় লাভ করে}) = P(FFFFS) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)$ এবং একইরকমভাবে।

সুতরাং, $P(\text{A জয়লাভ করে}) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right) + \ldots$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

$$P(\text{B জয়লাভ করে}) = 1 - P(\text{A জয়লাভ করে}) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

মন্তব্য যদি $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...,$ যেখানে $|r| < 1$ হয়, তবে এই অসীম গুণোত্তর প্রগতির যোগফল $\dfrac{a}{1-r}$ দ্বারা পাওয়া যায়। (একাদশ শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তক এর A.1.3 পরিলক্ষিত কর)।

উদাহরণ 37 যদি একটি যন্ত্র সঠিক ভাবে স্থাপন করা হয়, তবে এটি 90% গ্রহণযোগ্য বস্তু উৎপাদন করে। যদি এটি সঠিকভাবে স্থাপন করা না হয়, তবে মাত্র 40% গ্রহণযোগ্য বস্তু উৎপাদন করে। পূর্বানুমান থেকে দেখা যায় 80% যন্ত্রের স্থাপন সঠিকভাবে করা হয়। যদি একটি নিশ্চিত স্থাপনের পর, যন্ত্রটি 2টি গ্রহণযোগ্য বস্তু উৎপাদন করে, তবে যন্ত্রটির সঠিক ভাবে স্থাপন হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক, যন্ত্রটির দ্বারা 2 টি গ্রহণযোগ্য বস্তু উৎপাদন হওয়ার ঘটনা A

আবার ধরা যাক, যন্ত্রটি সঠিকভাবে স্থাপনের ঘটনা B_1 এবং সঠিকভাবে স্থাপন না হওয়ার ঘটনা B_2 দ্বারা সূচিত হয়।

এখন, $P(B_1) = 0.8,\ P(B_2) = 0.2$

$P(A|B_1) = 0.9 \times 0.9$ এবং $P(A|B_2) = 0.4 \times 0.4$

অতএব
$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)\,P(A|B_1)}{P(B_1)\,P(A|B_1) + P(B_2)\,P(A|B_2)}$$

$$= \frac{0.8 \times 0.9 \times 0.9}{0.8 \times 0.9 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4 \times 0.4} = \frac{648}{680} = 0.95$$

অধ্যায় 13-এর বিবিধ অনুশীলনী

1. A এবং B দুটি ঘটনা এরূপ যে $P(A) \neq 0$। $P(B/A)$ নির্ণয় করো, যদি
   (i) B এর একটি উপসেট A হয় (ii) $A \cap B = \phi$ হয়।
2. একজন দম্পতির দুটি সন্তান আছে,
   (i) উভয় সন্তান বালক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো, যদি জানা থাকে যে কমপক্ষে একটি সন্তান হল বালক।
   (ii) উভয় সন্তান বালিকা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো, যদি জানা থাকে যে জেষ্ঠ্য সন্তান বালিকা।
3. ধরো, যে 5% পুরুষ এবং 0.25% মহিলার ধূসর বর্ণের চুল রয়েছে। একজন ধূসর বর্ণের চুলযুক্ত ব্যক্তি যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত হয়। এই ব্যক্তি পুরুষ হওয়ার সম্ভাবনা কত? ধরে নাও যে এখানে পুরুষ ও মহিলা সমান সংখ্যক রয়েছে।
4. ধরো যে 90% লোক ডানহাতি। যথেচ্ছভাবে 10 জন লোকের একটি নমুনায় সর্বাধিক 6 জন ডানহাতি হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।
5. একটি পাত্রে 25 টি বলের মধ্যে 10 টি বল 'X' চিহ্নযুক্ত এবং অবশিষ্ট 15 টি বল 'Y' চিহ্নযুক্ত করা

আছে। পাত্রটি থেকে যথেচ্ছভাবে একটি বল তোলা হল এবং বলটির চিহ্ন লিপিবদ্ধ করে এটিকে প্রতিস্থাপিত করা হল। যদি একইভাবে 6 টি বল তোলা হয়, তবে সম্ভাবনা নির্ণয় করো, যখন

(i) সকল বল 'X' চিহ্নযুক্ত হবে।
(ii) 2 টির অধিক বল 'Y' চিহ্নযুক্ত হবে না।
(iii) কমপক্ষে 1 টি বল 'Y' চিহ্নযুক্ত হবে।
(iv) 'X' এবং 'Y' চিহ্নযুক্ত বলের সংখ্যা সমান হবে।

6. একটি বাধা ডিঙ্গানো দৌড় প্রতিযোগিতায় (hurdle race) , একজন প্রতিযোগীকে 10 টি বাধা অতিক্রম করতে হবে। তার সবগুলো বাধা অতিক্রম করে ফেলার সম্ভাবনা $\frac{5}{6}$ । প্রতিযোগীর 2 টির কম বাধা অতিক্রম করতে না পারার সম্ভাবনা কত ?

7. একটি ছক্কাকে বার বার নিক্ষেপ করা হল যতক্ষণ না পর্যন্ত তিনবার ছয় প্রাপ্ত হয়। ছক্কাটির ষষ্ঠ নিক্ষেপে তৃতীয় ছয় পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

8. যদি যথেচ্ছভাবে একটি অধিবর্ষ নির্বাচিত করা হয় তবে ওই অধিবর্ষে 53 টি মঙ্গলবার থাকার সুযোগ নির্ণয় করো ?

9. একটি পরীক্ষার সফলতা তার অসফলতার দ্বিগুণ। পরবর্তী ছয়টি প্রচেষ্টায় কমপক্ষে 4 টি সফলতা পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

10. একজন ব্যক্তি কতবার একটি পক্ষপাতশূন্য মুদ্রা টস্ করবে যাতে অন্ততপক্ষে একটি হেড্ পাওয়ার সম্ভাবনা 90% এর অধিক হবে ?

11. একটি খেলায়, যখন একটি পক্ষপাত শূন্য ছক্কা নিক্ষেপ করা হয় তখন ছয় আসলে একজন ব্যক্তি এক টাকা লাভ করে এবং অন্যকোনো সংখ্যা আসলে এক টাকা হারায়। ব্যক্তিটি সিদ্ধান্ত নেয় যে ছক্কাটি তিনবার নিক্ষেপ করবে কিন্তু যখন ছয় আসবে তখন খেলা ছেড়ে দেবে। তাহলে ওই ব্যক্তির জয়ের / হারার প্রত্যাশিত মান (Expected value) নির্ণয় করো।

12. ধরা যাক, রঙিন মার্বেল আছে এরূপ চারটি বাক্স A, B, C এবং D যা নিম্নরূপে প্রদত্ত:

বাক্স	রঙিন মার্বেল		
	লাল	সাদা	কালো
A	1	6	3
B	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

যথেচ্ছভাবে একটি বাক্স নির্বাচন করা হল এবং তা থেকে একটি মার্বেল তোলা হল। যদি তোলা মার্বেলটি লাল হয় তবে এটি যথাক্রমে A বাক্স, B বাক্স, C বাক্স থেকে তোলার সম্ভাবনাগুলো কত হবে ?

13. ধরা যাক একজন রোগীর হৃদরোগে আক্রান্ত হওয়ার সুযোগ হল 40%। এটিও ধরা যাক যে ধ্যান এবং যোগসাধনা দ্বারা হৃদরোগে আক্রান্ত হওয়ার ঝুঁকি 30% কমে এবং ঔষুধের দ্বারা এর ঝুঁকি 25% কমানো যায়। কোনো এক সময়ে একজন রোগী সমান সম্ভাবনাযুক্ত উপরের দুটি বিকল্পের মধ্যে যে কোনো একটি নির্বাচন করতে পারে। দেওয়া আছে যে উপরিউক্ত বিকল্পগুলোর কোনো একটিকে পছন্দ করা রোগীদের মধ্য থেকে যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত রোগীটি হৃদরোগে আক্রান্ত পাওয়া গেল। রোগীটি ধ্যান এবং যোগসাধনা অনুসরণকারী হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

14. যদি একটি দ্বিতীয় ক্রমের নির্ণায়কের প্রতিটি উপাদান হয় শূন্য বা এক হয়, তবে নির্ণায়কটির মান ধনাত্মক হওয়ার সম্ভাবনা কত? (ধরে নাও যে, নির্ণায়কটির প্রতিটি উপাদান স্বতন্ত্রভাবে নির্বাচন করা হয় এবং প্রতিটি নির্বাচনের সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ হয়)।

15. একটি বৈদ্যুতিন সমাবেশ (assembly) A এবং B দুটি সহায়ক উপাদান নিয়ে গঠিত। পূর্ববর্তী পরীক্ষা পদ্ধতি থেকে নিম্নলিখিত সম্ভাবনাগুলো জানা যায়:

$$P(A \text{ এর অসফলতা}) = 0.2$$

$$P(\text{ শুধু } B \text{ এর অসফলতা}) = 0.15$$

$$P(A \text{ এবং } B \text{ এর অসফলতা}) = 0.15$$

নিম্নলিখিত সম্ভাবনাগুলো নির্ণয় করো।

(i) P(A এর অসফলতা |B অসফল হয়েছে) (ii) P(শুধু A এর অসফলতা)

16. I নং থলিতে 3 টি লাল এবং 4 টি কালো বল আছে এবং II নং থলিতে 4 টি লাল বেং 5 টি কালো বল আছে। একটি বল I নং থলি থেকে II নং থলিতে রাখা হল এবং তারপর II নং থলি থেকে একটি বল তোলা হল। এরূপে তোলা বলটি লাল রঙের হয়। দ্বিতীয় পাত্রে রাখা বলটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

নিম্নলিখিত প্রতিটি প্রশ্নের সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো :

17. যদি A এবং B দুটি ঘটনা এরূপ যে $P(A) \neq 0$ এবং $P(B \mid A) = 1$ তবে —

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

18. যদি $P(A|B) > P(A)$, তবে নিম্নলিখিত কোনটি সঠিক :

(A) $P(B|A) < P(B)$ (B) $P(A \cap B) < P(A) . P(B)$

(C) $P(B|A) > P(B)$ (D) $P(B|A) = P(B)$

19. যদি A এবং B দুটি ঘটনা এরূপ যে $P(A) + P(B) - P(A \text{ এবং } B) = P(A)$, তবে

(A) $P(B|A) = 1$ (B) $P(A|B) = 1$

(C) $P(B|A) = 0$ (D) $P(A|B) = 0$

সারসংক্ষেপ

এ অধ্যায়ের লক্ষণীয় বিষয়গুলো হল —

- একটি ঘটনা E এর শর্তাধীন সম্ভাবনা, যখন ঘটনা F ঘটেছে, তা সংজ্ঞায়িত হয়

  $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \; P(F) \neq 0$$

- $0 \leq P(E|F) \leq 1$, $\qquad P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

  $P((E \cup F)|G) = P(E|G) + P(F|G) - P((E \cap F)|G)$

- $P(E \cap F) = P(E)\, P(F|E),\ P(E) \neq 0$

  $P(E \cap F) = P(F)\ \ P(E|F),\ P(F) \neq 0$

- যদি E এবং F স্বাধীন হয়, তবে

  $P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$

  $P(E|F) = P(E),\ P(F) \neq 0$

  $P(F|E) = P(F),\ P(E) \neq 0$

- **সমগ্র সম্ভাবনার উপপাদ্য (Theorem of total probability)**

  ধরা যাক, $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ হল নমুনা দেশের একটি বিভাজন এবং ধরো $E_1, E_2, ..., E_n$ প্রতিটির সম্ভাবনা অশূন্য। ধরা যাক A ঘটনাটি হল S এর সাথে যুক্ত একটি ঘটনা, তাহলে

  $P(A) = P(E_1)\, P(A|E_1) + P(E_2)\, P(A|E_2) + ... + P(E_n)\, P(A|E_n)$

- **বেইজের উপপাদ্য (Bayes' theorem)** যদি $E_1, E_2, ..., E_n$ ঘটনাগুলো এমন যে, নমুনা দেশ S-এ একটি বিভাজন গঠন করে অর্থাৎ $E_1, E_2, ..., E_n$ প্রতি জোড়ায় বিচ্ছিন্ন এবং $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ এবং A হল অশূন্য সম্ভাবনা যুক্ত কোনো ঘটনা, তবে

  $$P(E_i | A) = \frac{P(E_i)\, P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\, P(A|E_j)}$$

- একটি সমসম্ভব চলক (Random variable) হল একটি বাস্তবমানযুক্ত অপেক্ষক যার ক্ষেত্র (domain) হল একটি সমসম্ভব পরীক্ষার নমুনা দেশ।

- একটি সমসম্ভব চলক X এর সম্ভাবনা বিভাজন হল নিম্নলিখিত সংখ্যা প্রণালী

X	:	x_1	x_2	...	x_n
P(X)	:	p_1	p_2	...	p_n

  যেখানে, $\quad p_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ i = 1, 2, ..., n$

- ধরা যাক, X হল একটি সমসম্ভব চলরাশি যার সম্ভাব্য মানসমূহ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ঘটার সম্ভাবনাগুলো যথাক্রমে $p_1, p_2, p_3, ... p_n$ । X-এর মধ্যক μ দ্বারা সূচিত হলে তা হয় $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

  একটি সমসম্ভব চলক X এর মধ্যককে X এর প্রত্যাশা (expectation) ও বলা হয় এবং এটি E (X) দ্বারা সূচিত।
- ধরা যাক, X হল একটি সমসম্ভব চলরাশি যার সম্ভাব্য মান $x_1, x_2, ..., x_n$ ঘটার সম্ভাবনা যথাক্রমে $p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)$

  ধরা যাক, $\mu = E(X)$ হল X-এর মধ্যক। X-এর ভেদমান (variance), Var (X) বা σ_x^2, দ্বারা সূচিত হয় এবং তা সংজ্ঞায়িত করা হয় $\sigma_x^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p(x_i)$

  বা সমতুল্যভাবে $\sigma_x^2 = E(X - \mu)^2$

  অ-ঋণাত্মক সংখ্যা

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p(x_i)}$$

  সমসম্ভব চলক X এর সমক পার্থক্য (Standard deviation) বলা হয়।
- $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- একটি সমসম্ভব পরীক্ষার প্রচেষ্টাগুলোকে (Trials) বার্নোলি প্রচেষ্টা (Bernoulli trials) বলা হবে, যদি তারা নিচের শর্তসমূহ সিদ্ধ করে:
  (i) পরীক্ষায় প্রচেষ্টা সংখ্যা নির্দিষ্ট থাকবে।
  (ii) প্রচেষ্টাগুলো স্বতন্ত্র বা স্বাধীন (independent) হতে হবে।
  (iii) প্রতিটি প্রচেষ্টার ঠিক দুটি ফলাফল থাকবে। 'সাফল্য' অথবা 'ব্যর্থতা'।
  (iv) প্রতিটি প্রচেষ্টায় সাফল্যের সম্ভাবনা একই থাকবে।

  বার্নোলি বিভাজন B (n, p), এর ক্ষেত্রে, $P(X = x) = {}^nC_x \, q^{n-x} p^x$, $x = 0, 1, ..., n$ $(q = 1 - p)$

ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

ছক্কা খেলায় সম্ভাবনা পরিমাপের প্রাথমিকতম ইঙ্গিতটি 1477 সালে Dante's Divine Comedy সম্পর্কিত একটি মন্তব্যে প্রকাশিত হয়েছিল। Geronimo Carden (1501-1576) এর *'liber de Ludo Alcae'* নামে পাশা খেলার উপর একটি গ্রন্থ 1663 সালে মরণোত্তরভাবে প্রকাশিত হয়েছিল। যখন দুটি ছক্কা চালনা করা হয় তখন প্রতিটি ঘটনার অনুকূল ক্ষেত্রগুলো (favourable cases) সংখ্যা তিনি এই গ্রন্থে দিয়েছিলেন।

Galileo (1564-1642) তিনটি ছক্কা খেলায় সুযোগের সঠিক মূল্যায়নের বিষয়ে নৈমত্তিক মন্তব্য করেছিলেন। Galileo বিশ্লেষণ করেছেন যে যখন তিনটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হয় তখন প্রাপ্ত সংখ্যার যোগফল 9 এর চেয়ে 10 বেশি হবে কারণ 10 এর পক্ষে অনুকূল ক্ষেত্রের সংখ্যা, 9 প্রাপ্ত হওয়ার ক্ষেত্রের সংখ্যার চেয়ে বেশি।

এই প্রাথমিক অবদানগুলো ছাড়াও, এটি সাধারণত স্বীকৃত যে সম্ভাবনা বিজ্ঞানের আসল উৎস সতেরো শতকের দুই মহামানব, (1623-1662) এবং Pierre de Fermat (1601-1665) এর যোগাযোগের মধ্যে রয়েছে। একজন ফরাসি জুয়াড়ি, Chevalier de Metre, Pascal কে তার তাত্ত্বিক যুক্তি এবং পাশা খেলা থেকে সংগৃহীত পর্যবেক্ষণের মধ্যে কিছুটা দ্বিধাদ্বন্দ্ব ব্যাখ্যা করতে বলেছিলেন প্রায় 1654 সালে লেখা একগুচ্ছ চিঠির মাধ্যমে Pascal এবং Fermat সম্ভাবনা বিজ্ঞানের প্রথম ভিত্তি স্থাপনা করেছিলেন। Pascal বীজগণিত পদ্ধতিতে সমস্যার সমাধান করেন যেখানে Fermat সমবায় পদ্ধতিটি ব্যবহার করে।

মহান Dutch বিজ্ঞানী, Huygens (1629-1695), Pascal এবং Fermat এর মধ্যে পারস্পরিক যোগাযোগের বিষয়বস্তুর সাথে পরিচিত হয়েছিলেন এবং সম্ভাবনার উপর প্রথম পুস্তক "*De Ratiociniis in Ludo Aleae*" প্রকাশ করেছিলেন এতে সুযোগের খেলায় সম্ভাবনার পক্ষে অনেক জটিল সমস্যার আকর্ষণীয় **সমাধান** রয়েছে।

সম্ভাবনা তত্ত্বের পরবর্তী মহান কাজটি হল Jacob Bernoulli (1654-1705) এর "*Ars Conjectendi*" পুস্তকটি, যা তার মৃত্যুর পর ওনার ভাইপো Nicholes Bernoulli 1713 সালে প্রকাশিত করেন। তিনি একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ সম্ভাবনা বিভাজন আবিষ্কার করেন যা দ্বিপদ বিভাজন হিসেবে পরিচিত। সম্ভাবনা তত্ত্বের উপর পরবর্তী উল্লেখযোগ্য কাজটি 1993 সালে হয়েছে। A. N. Kolmogorov (1903-1987) সম্ভাবনার স্বত:সিদ্ধ তত্ত্ব প্রদান করেন। 1933 সালে প্রকাশিত তাঁর পুস্তক, ‘Foundations of Probability’ -এ সম্ভাবনাকে একটি সেট অপেক্ষক রূপে উপস্থাপিত করেন এবং এটি একটি উচ্চ শ্রেণির রচনা (classic) হিসাবে বিবেচিত।

উত্তরমালা

অনুশীলনী 7.1

1. $-\frac{1}{2}\cos 2x$
2. $\frac{1}{3}\sin 3x$
3. $\frac{1}{2}e^{2x}$
4. $\frac{1}{3a}(ax+b)^3$
5. $-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{4}{3}e^{3x}$
6. $\frac{4}{3}e^{3x}+x+C$
7. $\frac{x^3}{3}-x+C$
8. $\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$
9. $\frac{2}{3}x^3+e^x+C$
10. $\frac{x^2}{2}+\log|x|-2x+C$
11. $\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$
12. $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+8\sqrt{x}+C$
13. $\frac{x^3}{3}+x+C$
14. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$
15. $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+C$
16. $x^2-3\sin x+e^x+C$
17. $\frac{2}{3}x^3+3\cos x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$
18. $\tan x + \sec x + C$
19. $\tan x - x + C$
20. $2\tan x - 3\sec x + C$
21. C
22. A

অনুশীলনী 7.2

1. $\log(1+x^2)+C$
2. $\frac{1}{3}(\log|x|)^3+C$
3. $\log|1+\log x|+C$
4. $\cos(\cos x)+C$
5. $-\frac{1}{4a}\cos 2(ax+b)+C$
6. $\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+C$
7. $\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$

8. $\frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ **9.** $\frac{4}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}+C$ **10.** $2\log\left|\sqrt{x}-1\right|+C$

11. $\frac{2}{3}\sqrt{x+4}(x-8)+C$

12. $\frac{1}{7}(x^3-1)^{\frac{7}{3}}+\frac{1}{4}(x^3-1)^{\frac{4}{3}}+C$ **13.** $-\frac{1}{18(2+3x^3)^2}+C$

14. $\frac{(\log x)^{1-m}}{1-m}+C$ **15.** $-\frac{1}{8}\log|9-4x^2|+C$ **16.** $\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$

17. $-\frac{1}{2e^{x^2}}+C$ **18.** $e^{\tan^{-1}x}+C$ **19.** $\log(e^x+e^{-x})+C$

20. $\frac{1}{2}\log(e^{2x}+e^{-2x})+C$ **21.** $\frac{1}{2}\tan(2x-3)-x+C$

22. $-\frac{1}{4}\tan(7-4x)+C$ **23.** $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2+C$

24. $\frac{1}{2}\log|2\sin x+3\cos x|+C$ **25.** $\frac{1}{(1-\tan x)}+C$

26. $2\sin\sqrt{x}+C$ **27.** $\frac{1}{3}(\sin 2x)^{\frac{3}{2}}+C$ **28.** $2\sqrt{1+\sin x}+C$

29. $\frac{1}{2}(\log\sin x)^2+C$ **30.** $\log|1+\cos x|+C$ **31.** $\frac{1}{1+\cos x}+C$

32. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+C$ **33.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x-\sin x|+C$

34. $2\sqrt{\tan x}+C$ **35.** $\frac{1}{3}(1+\log x)^3+C$ **36.** $\frac{1}{3}(x+\log x)^3+C$

37. $-\frac{1}{4}\cos(\tan^{-1}x^4)+C$ **38.** D

39. B

অনুশীলনী 7.3

1. $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin(4x+10)+C$

2. $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{2}\cos x+C$

3. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}\sin 12x+x+\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]+C$

4. $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{6}\cos^3(2x+1)+C$

5. $\frac{1}{6}\cos^6 x-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

6. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]+C$

7. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 12x\right]+C$

8. $2\tan\frac{x}{2}-x+C$

9. $x-\tan\frac{x}{2}+C$

10. $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

11. $\frac{3x}{8}+\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C$

12. $x-\sin x+C$

13. $2(\sin x+x\cos\alpha)+C$

14. $-\frac{1}{\cos x+\sin x}+C$

15. $\frac{1}{6}\sec^3 2x-\frac{1}{2}\sec 2x+C$

16. $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$

17. $\sec x-\operatorname{cosec} x+C$

18. $\tan x+C$

19. $\log|\tan x|+\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

20. $\log|\cos x+\sin x|+C$

21. $\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{2}+C$

22. $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right|+C$

23. A

24. B

অনুশীলনী 7.4

1. $\tan^{-1}x^3+C$

2. $\frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|+C$

3. $\log\left|\dfrac{1}{2-x+\sqrt{x^2-4x+5}}\right|+C$

4. $\dfrac{1}{5}\sin^{\ 1}\dfrac{5x}{3}+C$

5. $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}\,x^2+C$

6. $\dfrac{1}{6}\log\left|\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right|+C$

7. $\sqrt{x^2-1}-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

8. $\dfrac{1}{3}\log\left|x^3+\sqrt{x^6+a^6}\right|+C$

9. $\log\left|\tan x+\sqrt{\tan^2 x+4}\right|+C$

10. $\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$

11. $\dfrac{1}{6}\tan^{-1}\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)+C$

12. $\sin^{-1}\left(\dfrac{x+3}{4}\right)+C$

13. $\log\left|x\quad\dfrac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+C$

14. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x-3}{\sqrt{41}}\right)+C$

15. $\log\left|x\quad\dfrac{a+b}{2}+\sqrt{(x-a)(x-b)}\right|+C$

16. $2\sqrt{2x^2+x-3}+C$

17. $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

18. $\dfrac{5}{6}\log\left|3x^2+2x+1\right|-\dfrac{11}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\dfrac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$

19. $6\sqrt{x^2\quad 9x+20}+34\log\left|x-\dfrac{9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right|+C$

20. $-\sqrt{4x-x^2}+4\sin^{-1}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)+C$

21. $\sqrt{x^2+2x+3}+\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$

22. $\dfrac{1}{2}\log\left|x^2-2x-5\right|+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\log\left|\dfrac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C$

23. $5\sqrt{x^2+4x+10}-7\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$

24. B

25. B

অনুশীলনী 7.5

1. $\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C$

2. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

3. $\log|x-1|-5\log|x-2|+4\log|x-3|+C$

4. $\frac{1}{2}\log|x-1|-2\log|x-2|+\frac{3}{2}\log|x-3|+C$

5. $4\log|x+2|-2\log|x+1|+C$

6. $\frac{x}{2}+\log|x|-\frac{3}{4}\log|1-2x|+C$

7. $\frac{1}{2}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

8. $\frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C$

9. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$

10. $\frac{5}{2}\log|x+1|-\frac{1}{10}\log|x-1|-\frac{12}{5}\log|2x+3|+C$

11. $\frac{5}{3}\log|x+1|-\frac{5}{2}\log|x+2|+\frac{5}{6}\log|x-2|+C$

12. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{3}{2}\log|x-1|+C$

13. $-\log|x-1|+\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\tan^{-1}x+C$

14. $3\log|x+2|+\frac{7}{x+2}+C$

15. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

16. $\frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C$

17. $\log\left|\frac{2\ \ \sin x}{1\ \ \sin x}\right|+C$

18. $x+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}-3\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

19. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)+C$

20. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x^4-1}{x^4}\right|+C$

21. $\log\left(\frac{e^x \quad 1}{e^x}\right)+C$

22. B

23. A

অনুশীলনী 7.6

1. $-x\cos x + \sin x + C$

2. $-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$

3. $e^x(x^2-2x+2)+C$

4. $\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$

5. $\frac{x^2}{2}\log 2x-\frac{x^2}{4}+C$

6. $\frac{x^3}{3}\log x-\frac{x^3}{9}+C$

7. $\frac{1}{4}(2x^2-1)\sin^{-1}x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+C$

8. $\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

9. $(2x^2-1)\frac{\cos\ ^1x}{4}-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$

10. $\left(\sin\ ^1x\right)^2 x+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-2x+C$

11. $\left[\sqrt{1\ \ x^2}\cos\ ^1x+x\right]+C$

12. $x\tan x+\log|\cos x|+C$

13. $x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C$

14. $\frac{x^2}{2}(\log x)^2-\frac{x^2}{2}\log x+\frac{x^2}{4}+C$

15. $\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\log x-\frac{x^3}{9}-x+C$

16. $e^x\sin x+C$

17. $\frac{e^x}{1+x}+C$

18. $e^x\tan\frac{x}{2}+C$

19. $\frac{e^x}{x}+C$

20. $\frac{e^x}{(x-1)^2}+C$

21. $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x-\cos x)+C$

22. $2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)+C$

23. A

24. B

অনুশীলনী 7.7

1. $\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\sin^{-1}\frac{x}{2}+C$

2. $\frac{1}{4}\sin^{-1}2x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2}+C$

3. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+6}+\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right|+C$

4. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+1}-\frac{3}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+C$

5. $\frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2}+C$

6. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x-5}-\frac{9}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right|+C$

7. $\frac{(2x-3)}{4}\sqrt{1+3x-x^2}+\frac{13}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{13}}\right)+C$

8. $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x}-\frac{9}{8}\log\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right|+C$

9. $\frac{x}{6}\sqrt{x^2+9}+\frac{3}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$

10. A

11. D

অনুশীলনী 7.8

1. $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

2. $\frac{35}{2}$

3. $\frac{19}{3}$

4. $\frac{27}{2}$

5. $e-\frac{1}{e}$

6. $\frac{15+e^8}{2}$

অনুশীলনী 7.9

1. 2

2. $\log\frac{3}{2}$

3. $\frac{64}{3}$

4. $\frac{1}{2}$

5. 0

6. $e^4(e-1)$

7. $\frac{1}{2}\log 2$ **8.** $\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right)$ **9.** $\frac{\;}{2}$

10. $\frac{\;}{4}$ **11.** $\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$ **12.** $\frac{\;}{4}$

13. $\frac{1}{2}\log 2$ **14.** $\frac{1}{5}\log 6+\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$

15. $\frac{1}{2}(e-1)$ **16.** $5-\frac{5}{2}\left(9\log\frac{5}{4}-\log\frac{3}{2}\right)$

17. $\frac{\pi^4}{1024}+\frac{\pi}{2}+2$ **18.** 0 **19.** $3\log 2+\frac{3\pi}{8}$

20. $1+\frac{4}{\;}-\frac{2\sqrt{2}}{\;}$ **21.** D **22.** C

অনুশীলনী 7.10

1. $\frac{1}{2}\log 2$ **2.** $\frac{64}{231}$ **3.** $\frac{\;}{2}-\log 2$

4. $\frac{16\sqrt{2}}{15}(\sqrt{2}+1)$ **5.** $\frac{\;}{4}$ **6.** $\frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{21+5\sqrt{17}}{4}$

7. $\frac{\;}{8}$ **8.** $\frac{e^2(e^2-2)}{4}$ **9.** A

10. B

অনুশীলনী 7.11

1. $\frac{\;}{4}$ **2.** $\frac{\;}{4}$ **3.** $\frac{\;}{4}$ **4.** $\frac{\;}{4}$

5. 29 **6.** 9 **7.** $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8. $\frac{\;}{8}\log 2$ **9.** $\frac{16\sqrt{2}}{15}$ **10.** $\frac{\;}{2}\log\frac{1}{2}$ **11.** $\frac{\;}{2}$

12. π **13.** 0 **14.** 0 **15.** 0

16. $-\pi \log 2$ **17.** $\dfrac{a}{2}$ **18.** 5 **20.** C

21. C

অধ্যায় 7-এর বিবিধ অনুশীলনী

1. $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x^2}{1-x^2}\right|+C$

2. $\dfrac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]+C$

3. $\dfrac{2}{a}\sqrt{\dfrac{(a-x)}{x}}+C$

4. $-\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}+C$

5. $2\sqrt{x}-3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}-6\log(1+x^{\frac{1}{6}})+C$

6. $-\dfrac{1}{2}\log|x+1|+\dfrac{1}{4}\log(x^2+9)+\dfrac{3}{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{3}+C$

7. $\sin a\log|\sin(x-a)|+x\cos a+C$

8. $\dfrac{x^3}{3}+C$

9. $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{2}\right)+C$

10. $-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$

11. $\dfrac{1}{\sin(a \quad b)}\log\left|\dfrac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C$

12. $\dfrac{1}{4}\sin^{-1}(x^4)+C$

13. $\log\left(\dfrac{1+e^x}{2+e^x}\right)+C$

14. $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}x-\dfrac{1}{6}\tan^{-1}\dfrac{x}{2}+C$

15. $-\dfrac{1}{4}\cos^4 x+C$

16. $\dfrac{1}{4}\log(x^4+1)+C$

17. $\dfrac{[f(ax+b)]^{n+1}}{a(n+1)}+C$

18. $\dfrac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}}+C$

19. $\dfrac{2(2x-1)}{\ }\sin^{-1}\sqrt{x}+\dfrac{2\sqrt{x-x^2}}{\ }-x+C$

20. $2\sqrt{1\quad x}+\cos^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}+C$

21. $e^x \tan x + C$

22. $-2\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+3\log|x+2|+C$

23. $\frac{1}{2}\left[x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}\right]+C$

24. $-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{3}\right]+C$

25. $e^{\frac{\pi}{2}}$

26. $\frac{\pi}{8}$

27. $\frac{\pi}{6}$

28. $2\sin^{-1}\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$

29. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

30. $\frac{1}{40}\log 9$

31. $\frac{\quad}{2}-1$

32. $\frac{\quad}{2}(\quad -2)$

33. $\frac{19}{2}$

40. $\frac{1}{3}\left(e^2-\frac{1}{e}\right)$

41. A

42. B

43. D

44. B

অনুশীলনী 8.1

1. $\frac{14}{3}$

2. $16-4\sqrt{2}$

3. $\frac{32-8\sqrt{2}}{3}$

4. 12π

5. 6π

6. $\frac{\quad}{3}$

7. $\frac{a^2}{2}\left(\frac{\quad}{2}-1\right)$

8. $(4)^{\frac{2}{3}}$

9. $\frac{1}{3}$

10. $\frac{9}{8}$

11. $8\sqrt{3}$

12. A

13. B

অনুশীলনী 8.2

1. $\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **2.** $\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. $\frac{21}{2}$ **4.** 4 **5.** 8

6. B **7.** B

অধ্যায় 8-এর বিবিধ অনুশীলনী

1. (i) $\frac{7}{3}$ (ii) 624.8

2. $\frac{1}{6}$ **3.** $\frac{7}{3}$ **4.** 9 **5.** 4

6. $\frac{8\,a^2}{3\,m^3}$ **7.** 27 **8.** $\frac{3}{2}(\quad -2)$

9. $\frac{ab}{4}(\quad -2)$ **10.** $\frac{5}{6}$ **11.** 2 **12.** $\frac{1}{3}$

13. 7 **14.** $\frac{7}{2}$ **15.** $\frac{9}{8}-\frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3\sqrt{2}}$

16. D **17.** C **18.** C **19.** B

অনুশীলনী 9.1

1. ক্রম 4 মাত্রা সংজ্ঞাত হয়। **2.** ক্রম 1 মাত্রা 1

3. ক্রম 2 মাত্রা 1 **4.** ক্রম 2 মাত্রা সংজ্ঞাত নয়

5. ক্রম 2 মাত্রা 1 **6.** ক্রম 3 মাত্রা 1

7. ক্রম 3 মাত্রা 1 **8.** ক্রম 1 মাত্রা 1

9. ক্রম 2 মাত্রা 1 **10.** ক্রম 2 মাত্রা 1

11. D **12.** A

অনুশীলনী 9.2

11. D **12.** D

অনুশীলনী 9.3

1. $y'' = 0$
2. $xy\,y'' + x\,(y')^2 - y\,y' = 0$
3. $y'' - y' - 6y = 0$
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$
5. $y'' - 2y' + 2y = 0$
6. $2xyy' + x^2 = y^2$
7. $xy' - 2y = 0$
8. $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$
9. $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$
10. $(x^2 - 9)\,(y')^2 + x^2 = 0$
11. B
12. C

অনুশীলনী 9.4

1. $y = 2\tan\frac{x}{2} - x + C$
2. $y = 2\sin(x + C)$
3. $y = 1 + Ae^{-x}$
4. $\tan x \tan y = C$
5. $y = \log(e^x + e^{-x}) + C$
6. $\tan\ {}^{1}y = x + \frac{x^3}{3} + C$
7. $y = e^{cx}$
8. $x^{-4} + y^{-4} = C$
9. $y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1\ \ x^2} + C$
10. $\tan y = C\,(1 - e^x)$
11. $y = \frac{1}{4}\log\left[(x+1)^2\,(x^2+1)^3\right] - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$
12. $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{3}{4}$
13. $\cos\left(\frac{y-2}{x}\right) = a$
14. $y = \sec x$
15. $2y - 1 = e^x(\sin x - \cos x)$
16. $y - x + 2 = \log(x^2(y+2)^2)$
17. $y^2 - x^2 = 4$
18. $(x + 4)^2 = y + 3$
19. $(63t + 27)^{\frac{1}{3}}$
20. 6.93%
21. Rs 1648
22. $\dfrac{2\log 2}{\log\left(\frac{11}{10}\right)}$
23. A

অনুশীলনী 9.5

1. $(x - y)^2 = Cx\,e^{\frac{-y}{x}}$
2. $y = x\log|x| + Cx$

3. $\tan^{1}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+C$

4. $x^2 + y^2 = Cx$

5. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\sqrt{2}y}{x-\sqrt{2}y}\right| = \log|x|+C$

6. $y+\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$

7. $xy\cos\left|\frac{y}{x}\right| = C$

8. $x\left[1-\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]=C\sin\left(\frac{y}{x}\right)$

9. $cy = \log\left|\frac{y}{x}\right|-1$

10. $ye^{\frac{x}{y}}+x=C$

11. $\log(x^2+y^2)+2\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{\;}{2}+\log 2$

12. $y + 2x = 3x^2 y$

13. $\cot\left(\frac{y}{x}\right)=\log|ex|$

14. $\cos\left(\frac{y}{x}\right)=\log|ex|$

15. $y=\frac{2x}{1-\log|x|}(x\neq 0,\ x \neq e)$

16. C

17. D

অনুশীলনী 9.6

1. $y = \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x) + C\,e^{-2x}$

2. $y = e^{-2x} + Ce^{-3x}$

3. $xy=\frac{x^4}{4}+C$

4. $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + C$

5. $y = (\tan x - 1) + C\,e^{-\tan x}$

6. $y=\frac{x^2}{16}(4\log|x|-1)+Cx^{-2}$

7. $y\log x=\frac{-2}{x}(1+\log|x|)+C$

8. $y=(1+x)^{-1}\ \log|\sin x|+C(1+x^2)^{-1}$

9. $y=\frac{1}{x}-\cot x+\frac{C}{x\sin x}$

10. $(x + y + 1) = C\,e^{y}$

11. $x=\frac{y^2}{3}+\frac{C}{y}$

12. $x = 3y^2 + Cy$

13. $y = \cos x - 2\cos^2 x$

14. $y(1+x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$

15. $y = 4\sin^3 x - 2\sin^2 x$

16. $x + y + 1 = e^x$

17. $y = 4 - x - 2e^x$

18. C

19. D

অধ্যায় 9-এর বিবিধ অনুশীলনী

1. (i) ক্রম 2 মাত্রা 1 (ii) ক্রম 1 মাত্রা 3

(iii) ক্রম 4 মাত্রা সংজ্ঞাত নয়

3. $y' = \frac{2y^2 - x^2}{4xy}$

5. $(x + yy')^2 = (x - y)^2 (1 + (y')^2)$

6. $\sin^{-1} y + \sin^{-1} x = C$

8. $\cos y = \frac{\sec x}{\sqrt{2}}$

9. $\tan^{-1} y + \tan^{-1}(e^x) = \frac{\;}{2}$

10. $e^{\frac{x}{y}} = y + C$

11. $\log |x \quad y| = x + y + 1$

12. $ye^{2\sqrt{x}} = (2\sqrt{x} + C)$

13. $y \sin x = 2x^2 - \frac{2}{2} \, (\sin x \neq 0)$

14. $y = \log\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|, x \neq -1$

15. 31250

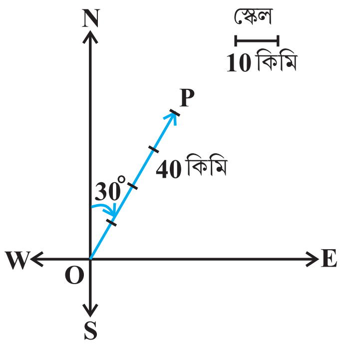
16. C

17. C

18. C

অনুশীলনী 10.1

1. পাশের চিত্রে $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরটি নির্ণেয় সরণকে নির্দেশ করে।



2. (i) স্কেলার (ii) ভেক্টর (iii) স্কেলার (iv) স্কেলার (v) স্কেলার (vi) ভেক্টর

3. (i) স্কেলার (ii) স্কেলার (iii) ভেক্টর (iv) ভেক্টর (v) স্কেলার

4. (i) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ সহ-প্রারম্ভিক ভেক্টর

(ii) $\vec{b}$ এবং $\vec{d}$ সমান ভেক্টর

(iii) $\vec{a}$ এবং $\vec{c}$ সমরেখ ভেক্টর কিছু সমান নয়।

5. (i) সত্য (ii) মিথ্যা (iii) মিথ্যা (iv) মিথ্যা

অনুশীলনী 10.2

1. $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=\sqrt{62}, |\vec{c}|=1$

2. সম্ভাব্য উত্তরের সংখ্যা অসংখ্য।

3. সম্ভাব্য উত্তরের সংখ্যা অসংখ্য।

4. $x = 2, y = 3$

5. -7 এবং 6; $7\breve{i}$ এবং $6\breve{j}$

6. $-4\breve{j}-\breve{k}$

7. $\frac{1}{\sqrt{6}}\breve{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\breve{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\breve{k}$

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}\breve{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\breve{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\breve{k}$

9. $\frac{1}{\sqrt{2}}\breve{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\breve{k}$

10. $\frac{40}{\sqrt{30}}\breve{i}-\frac{8}{\sqrt{30}}\breve{j}+\frac{16}{\sqrt{30}}\breve{k}$

12. $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$

13. $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

15. (i) $-\frac{1}{3}\breve{i}+\frac{4}{3}\breve{j}+\frac{1}{3}\breve{k}$ (ii) $-3\breve{i}+3\breve{k}$

16. $3\breve{i}+2\breve{j}+\breve{k}$

18. (C)

19. (B), (C), (D)

অনুশীলনী 10.3

1. $\frac{\ }{4}$

2. $\cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$

3. 0

4. $\frac{60}{\sqrt{114}}$

6. $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}, \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$

7. $6\left|\vec{a}\right|^2 + 11\vec{a}\cdot\vec{b} - 35\left|\vec{b}\right|^2$

8. $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1$

9. $\sqrt{13}$

10. 8

12. ভেক্টর $\vec{b}$ যেকোনো ভেক্টর হতে পারে **13.** $\frac{-3}{2}$

14. যেকোনো দুটি অশূন্য পরস্পর লম্ব ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ধরো।

15. $\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{102}}\right)$ **18.** (D)

অনুশীলনী 10.4

1. $19\sqrt{2}$ **2.** $\pm\frac{2}{3}\hat{i} \mp \frac{2}{3}\hat{j} \mp \frac{1}{3}\hat{k}$ **3.** $\frac{\ }{3}; \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}$

5. $3, \frac{27}{2}$ **6.** হয় $|\vec{a}|=0$ নতুবা $|\vec{b}|=0$

8. না; যেকোনো দুটি অশূন্য সমরেখ ভেক্টর ধরো।

9. $\frac{\sqrt{61}}{2}$ **10.** $15\sqrt{2}$ **11.** (B) **12.** (C)

অধ্যায় 10-এর বিবিধ অনুশীলনী

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}$

2. $x_2 \quad x_1, y_2 \quad y_1, z_2-z_1; \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

3. $\frac{-5}{2}\hat{i}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

4. না; একটি ত্রিভুজের বাহুগুলো উপস্থাপনের জন্য $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ ধরো।

5. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **6.** $\frac{3}{2}\sqrt{10}\,\hat{i}+\frac{\sqrt{10}}{2}\hat{j}$ **7.** $\frac{3}{\sqrt{22}}\hat{i}-\frac{3}{\sqrt{22}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{22}}\hat{k}$

8. 2 : 3 **9.** $3\vec{a}+5\vec{b}$ **10.** $\frac{1}{7}(3\hat{i} \quad 6\hat{j}+2\hat{k}); 11\sqrt{5}$

12. $\frac{1}{3}(160\hat{i} \quad 5\hat{j}+70\hat{k})$ **13.** $\lambda = 1$ **16.** (B)

17. (D) **18.** (C) **19.** (B)

অনুশীলনী 11.1

1. $0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ **2.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **3.** $\frac{-9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-2}{11}$

5. $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{17}; \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}; \frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}$

অনুশীলনী 11.2

4. $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$, যেখানে λ একটি বাস্তব সংখ্যা

5. $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ এবং কার্তেসীয় আকার হল

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

6. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+5}{6}$

7. $\vec{r} = (5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$

8. রেখাটির ভেক্টর সমীকরণ হল : $\vec{r} = \lambda(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$;

রেখাটির কার্তেসীয় সমীকরণ হল: $\frac{x}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$

9. রেখাটির ভেক্টর সমীকরণ হল : $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k} + \lambda(11\hat{k})$

রেখাটির কার্তেসীয় সমীকরণ হল : $\frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+5}{11}$

10. (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$ (ii) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)$

11. (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$ (ii) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

12. $p = \frac{70}{11}$ **14.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **15.** $2\sqrt{29}$

16. $\frac{3}{\sqrt{19}}$ **17.** $\frac{8}{\sqrt{29}}$

অনুশীলনী 11.3

1. (a) 0, 0, 1; 2 (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}; \frac{5}{\sqrt{14}}$ (d) 0, 1, 0; $\frac{8}{5}$

2. $\vec{r}\cdot\left(\frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{70}}\right) = 7$

3. (a) $x + y - z = 2$ (b) $2x + 3y - 4z = 1$

(c) $(s - 2t)x + (3 - t)y + (2s + t)z = 15$

4. (a) $\left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$ (b) $\left(0, \frac{18}{25}, \frac{24}{25}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (d) $\left(0, \frac{-8}{5}, 0\right)$

5. (a) $[\vec{r} - (\hat{i} - 2\hat{k})]\cdot(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 0$; $x + y - z = 3$

(b) $[\vec{r} - (\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})]\cdot(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$; $x - 2y + z + 1 = 0$

6. (a) বিন্দুগুলো সমরেখ। প্রদত্ত বিন্দুগুলো দিয়ে অসংখ্য সমতল অতিক্রম করতে পারবে।

(b) $2x + 3y - 3z = 5$

7. $\frac{5}{2}$, 5, –5 **8.** $y = 3$ **9.** $7x - 5y + 4z - 8 = 0$

10. $\vec{r}\cdot(38\hat{i} + 68\hat{j} + 3\hat{k}) = 153$ **11.** $x - z + 2 = 0$

12. $\cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{731}}\right)$

13. (a) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ (b) সমতলগুলো পরস্পর লম্ব।

(c) সমতলগুলো সমান্তরাল (d) সমতলগুলো সমান্তরাল।

(e) 45°

14. (a) $\frac{3}{13}$ (b) $\frac{13}{3}$

(c) 3 (d) 2

অধ্যায় 11-এর বিবিধ অনুশীলনী

3. $90°$ **4.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$ **5.** 0^{o}

6. $k=\frac{-10}{7}$ **7.** $\vec{r}=\breve{i}+2\breve{j}+3\breve{k}+\lambda(\breve{i}+2\breve{j}-5\breve{k})$

8. $x+y+z=a+b+c$ **9.** 9

10. $\left(0, \frac{17}{2}, \frac{-13}{2}\right)$ **11.** $\left(\frac{17}{3}, 0, \frac{23}{3}\right)$ **12.** $(1, -2, 7)$

13. $7x-8y+3z+25=0$ **14.** $p=\frac{3}{2}$ or $\frac{11}{6}$ এবং $\frac{7}{3}$

15. $y-3z+6=0$ **16.** $x+2y-3z-14=0$

17. $33x+45y+50z-41=0$ **18.** 13

19. $\vec{r}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(-3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k})$

20. $\vec{r}=\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ **22.** D

23. B

অনুশীলনী 12.1

1. (0.4) তে Z এর চরম (Maximum) মান =16

2. (4.0) তে Z এর অবম (Minimum) মান =12

3. $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ তে Z এর চরম মান = $\frac{235}{19}$

4. $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ তে Z এর অবম মান =7

5. (4, 3) তে Z এর চরম মান =18

6. (6, 0) এবং (0, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের উপর সকল বিন্দুতে Z এর অবম মান =6

7. (60, 0) তে Z এর অবম মান =300

(120, 0) এবং (60, 30) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের উপর সকল বিন্দুতে Z এর চরম মান =600

8. (0, 50) এবং (20, 40) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের উপর সকল বিন্দুতে Z এর অবম মান =100

(0, 200) তে Z এর চরম মান =400

9. Z-এর কোনো চরম মান নেই।

10. কার্যকর অঞ্চল (feasible region) নেই, তাই Z এর কোনো চরম মান নেই।

অনুশীলনী 12.2

1. $\left(\frac{8}{3},0\right)$ এবং $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ এর সংযোজক রেখাংশের উপর সকল বিন্দুতে সর্বোনিম্ন খরচ = 160 টাকা।

2. কেক্-এর সর্বাধিক সংখ্যা = 30টি এক প্রকারের এবং 10 টি কেক্ অপর প্রকারের।

3. (i) 4 টি টেনিস রেকেট এবং 12 টি ক্রিকেট ব্যাট।

   (ii) সর্বোচ্চ লাভের পরিমাণ = 200 টাকা।

4. 3 প্যাকেট নাট (nuts) এবং 3 প্যাকেট বোল্ট (bolts); সর্বাধিক লাভের পরিমান = 73.50 টাকা।

5. 30 প্যাকেট A স্ক্রু (screws) এবং 20 প্যাকেট B (screws) স্ক্রু; সর্বাধিক লাভের পরিমান = 410 টাকা।

6. 4 টি স্ট্যান্ড বাতি এং 4 টি কাঠের আলোকাবরণ সর্বোচ্চ লাভ = 32 টাকা।

7. A প্রকারে 8টি স্মারণিক এবং B প্রকারের 20টি স্মারণিক; সর্বাধিক লাভের পরিমান = 160 টাকা।

8. 200 টি ডেস্কটপ নমুনা এবং 50 টি পোর্টেবল নমুনা; সর্বাধিক লাভের পরিমাণ = 1150000 টাকা।

9. $Z = 4x + 6y$ এর অবম মান নির্ণয় করো।

   শর্তসাপেক্ষে বাধাসমূহ হল $3x + 6y \geq 80$, $4x + 3y \geq 100$, $x \geq 0$ এবং $y \geq 0$, যেখানে x এবং y যথাক্রমে F_1 খাদ্য ও F_2 খাদ্যের একক সংখ্যাকে নির্দেশ করে; ন্যূনতম খরচ = 140 টাকা

10. F_1 সার 100 কেজি এবং F_2 সার 80 কেজি; ন্যূনতম খরচ = 1000 টাকা।

11. (D)

অধ্যায় 12-এর বিবিধ অনুশীলনী

1. আবার P এর 40 প্যাকেট এবং খাবার Q এর 15 প্যাকেট; ভিটামিন A এর সর্বাধিক পরিমাণ = 285 একক।

2. P ব্র্যান্ড এর 3 ব্যাগ এবং Q ব্র্যান্ড এর 6 ব্যাগ; মিশ্রণের সর্বনিম্ন মূল্য = 1950 টাকা।

3. মিশ্রণের সর্বনিম্ন মূল্য হল 112 টাকা (খাবার X এর 2 কিগ্রা এবং খাবার Y এর 4 কিগ্রা)।

5. উচ্চ শ্রেণির 40 টি টিকিট এবং সাধারণ শ্রেণির 160 টি টিকিট; সর্বাধিক লাভ = 136000 টাকা।

6. A থেকে : 10,50 ও 40 একক; B থেকে : 50,0 ও 0 একক যথাক্রমে D, E এবং F এ পাঠানো হবে এবং সর্বনিম্ন মূল্য = 510 টাকা।

7. A থেকে : 500, 3000 এবং 3500 লিটার; B থেকে 4000, 0 এবং 0 লিটার যথাক্রমে D, E এবং F এ পাঠাতে হবে এবং ন্যূনতম মূল্য = 4400 টাকা।

8. ব্র্যান্ড P-এর 40 ব্যাগ এবং ব্র্যান্ড Q এর 100 ব্যাগ; নাইট্রোজেনের ন্যূনতম পরিমান = 470 কিগ্রা।

9. ব্র্যান্ড P এর 140 ব্যাগ এবং ব্র্যান্ড Q এর 50 ব্যাগ; নাইট্রোজেনের সর্বাধিক পরিমাণ = 595 কিগ্রা।

10. A প্রকারের 800 পুতুল এবং B প্রকারের 400 পুতুল; সর্বাধিক লাভ = 16000 টাকা।

অনুশীলনী 13.1

1. $P(E|F) = \frac{2}{3}, P(F|E) = \frac{1}{3}$ 2. $P(A|B) = \frac{16}{25}$

3. (i) 0.32 (ii) 0.64 (iii) 0.98

4. $\frac{11}{26}$

5. (i) $\frac{4}{11}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}$

6. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{6}{7}$

7. (i) 1 (ii) 0

8. $\frac{1}{6}$ 9. 1 10. (a) $\frac{1}{3}$, (b) $\frac{1}{9}$

11. (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

12. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}$ 13. $\frac{5}{9}$

14. $\frac{1}{15}$ 15. 0 16. C 17. D

অনুশীলনী 13.2

1. $\frac{3}{25}$
2. $\frac{25}{102}$
3. $\frac{44}{91}$
4. A এবং B পরস্পর স্বাধীন
5. A এবং B পরস্পর স্বাধীন নয়।
6. E এবং F পরস্পর স্বাধীন নয়।
7. (i) $p = \frac{1}{10}$ (ii) $p = \frac{1}{5}$
8. (i) 0.12 (ii) 0.58 (iii) 0.3 (iv) 0.4
9. $\frac{3}{8}$
10. A ও B পরস্পর স্বাধীন নয়।
11. (i) 0.18 (ii) 0.12 (iii) 0.72 (iv) 0.28
12. $\frac{7}{8}$
13. (i) $\frac{16}{81}$, (ii) $\frac{20}{81}$, (iii) $\frac{40}{81}$
14. (i) $\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{1}{2}$
15. (i), (ii)
16. (a) $\frac{1}{5}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$
17. D
18. B

অনুশীলনী 13.3

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{9}{13}$
4. $\frac{12}{13}$
5. $\frac{22}{133}$
6. $\frac{4}{9}$
7. $\frac{1}{52}$
8. $\frac{1}{4}$
9. $\frac{2}{9}$
10. $\frac{8}{11}$
11. $\frac{5}{34}$
12. $\frac{11}{50}$
13. A
14. C

অনুশীলনী 13.4

1. (ii), (iii) এবং (iv)
2. X = 0, 1, 2; হ্যাঁ
3. X = 6, 4, 2, 0
4. (i)

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(ii)

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(iii)

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

5. (i)

X	0	1	2
P(X)	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

(ii)

X	0	1
P(X)	$\frac{25}{36}$	$\frac{11}{36}$

6.

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

7.

X	0	1	2
P(X)	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

8. (i) $k = \frac{1}{10}$ (ii) $P(X < 3) = \frac{3}{10}$ (iii) $P(X > 6) = \frac{17}{100}$

(iv) $P(0 < X < 3) = \frac{3}{10}$

9. (a) $k = \frac{1}{6}$ (b) $P(X < 2) = \frac{1}{2}, P(X \leq 2) = 1, P(X \geq 2) = \frac{1}{2}$

10. 1.5 **11.** $\frac{1}{3}$ **12.** $\frac{14}{3}$

13. X -এর ভেদমান $= 5.833$, X -এর সমক পার্থক্য $= 2.415$

14.

X	14	15	16	17	18	19	20	21
P(X)	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

মধ্যক $= 17.53$, X -এর ভেদমান $= 4.78$ and X -এর সমক পার্থক্য $= 2.19$

15. $E(X) = 0.7$ এবং $(X) = 0.21$ **16.** B **17.** D

অনুশীলনী 13.5

1. (i) $\frac{3}{32}$ (ii) $\frac{7}{64}$ (iii) $\frac{63}{64}$

2. $\frac{25}{216}$

3. $\left(\frac{29}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^9$

4. (i) $\frac{1}{1024}$ (ii) $\frac{45}{512}$ (iii) $\frac{243}{1024}$

5. (i) $(0.95)^5$ (ii) $(0.95)^4 \times 1.2$ (iii) $1 - (0.95)^4 \times 1.2$
(iv) $1 - (0.95)^5$

6. $\left(\frac{9}{10}\right)^4$

7. $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left[20C_{12} + {}^{20}C_{13} + \ldots + {}^{20}C_{20}\right]$

9. $\frac{11}{243}$

10. (a) $1-\left(\frac{99}{100}\right)^{50}$ (b) $\frac{1}{2}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$ (c) $1-\frac{149}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$

11. $\frac{7}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^5$

12. $\frac{35}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^4$

13. $\frac{22\times 9^3}{10^{11}}$

14. C

15. A

অধ্যায় 13-এর বিবিধ অনুশীলনী

1. (i) 1 (ii) 0

2. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$

3. $\frac{20}{21}$

4. $1-\sum_{r=7}^{10} {}^{10}C_r (0.9)^r (0.1)^{10-r}$

5. (i) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (ii) $7\left(\frac{2}{5}\right)^4$ (iii) $1-\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (iv) $\frac{864}{3125}$

6. $\dfrac{5^{10}}{2\times 6^9}$

7. $\dfrac{625}{23328}$

8. $\dfrac{2}{7}$

9. $\dfrac{31}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^4$

10. $n \geq 4$

11. $\dfrac{-91}{54}$

12. $\dfrac{1}{15}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{8}{15}$

13. $\dfrac{14}{29}$

14. $\dfrac{3}{16}$

15. (i) 0.5 (ii) 0.05

16. $\dfrac{16}{31}$

17. A

18. C

19. B

সংযোজিত বিষয়বস্তু
(SUPPLEMENTARY MATERIAL)

অধ্যায়-7

7.6.3 $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx.$

আমরা ধ্রুবক A এবং B এমনভাবে নির্বাচন করবো যাতে

$$px + q = \mathrm{A}\left[\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)\right]+\mathrm{B}$$

$$= \mathrm{A}(2ax + b) + \mathrm{B} \quad \text{হয়।}$$

উভয় পক্ষের x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে, আমরা পাই

$$2a\mathrm{A} = p \text{ এবং } \mathrm{A}b + \mathrm{B} = q$$

এই সমীকরণগুলো সমাধান করে, A এবং B এর মান পাওয়া যায়। অতএব, সমাকলটিকে নিম্নরূপে পরিবর্তিত করে পাই

$$\mathrm{A}\int(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx+\mathrm{B}\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$= \mathrm{AI}_1 + \mathrm{BI}_2$$

যেখানে $\mathrm{I}_1 = \int(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$

ধরো $ax^2 + bx + c = t$, তবে $(2ax + b)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

সুতরাং, $\mathrm{I}_1 = \frac{2}{3}(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}+\mathrm{C}_1$

অনুরূপভাবে, $\mathrm{I}_2 = \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

[পাঠ্যবইয়ের 328 পৃষ্ঠার 7.6.2 অনুচ্ছেদ] এ আলোচিত সমাকল সূত্র সমূহ প্রয়োগ করে নির্ণয় করা হয়।

অতএব, $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ সমকালটি অবশেষে নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ 25 মান নির্ণয় করো : $\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx$

সমাধান : উপরে বর্ণিত পদ্ধতিটি অনুসারে, আমরা লিখতে পারি,

$$x = \mathbf{A}\left[\frac{d}{dx}\left(1+x-x^2\right)\right]+\mathbf{B}$$

$$= \mathrm{A}\,(1-2x)+\mathrm{B}$$

উভয়পক্ষের x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে, আমরা পাই, $-2\mathrm{A}=1$ এবং $\mathrm{A}+\mathrm{B}=0$

এই সমীকরণগুলো সমাধান করে, আমরা পাই, $\mathrm{A}=-\frac{1}{2}$ এবং $\mathbf{B}=\frac{1}{2}$. অতএব সমাকলটি পরিবর্তিত করে পাই

$$\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx+\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{I}_1+\frac{1}{2}\mathrm{I}_2 \qquad (1)$$

বিবেচনা করো, $\mathrm{I}_1 = \int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx$

যদি $1+x-x^2=t$ বসাও, তবে $(1-2x)dx=dt$

অতএব, $\mathrm{I}_1 = \int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx = \int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\mathrm{C}_1$

$$= \quad \frac{2}{3}\left(1+x-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + \mathbf{C}_1$$, যেখানে C_1 হলো ধ্রুবক।

অধিকন্তু, $I_2 = \int \sqrt{1+x-x^2}\,dx = \int \sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$ বিবেচনা করো।

ধরো $x-\frac{1}{2}=t.$ তবে $dx = dt$

তাহলে, $$I_2 = \int \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{\frac{5}{4}-t^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\sin^{-1}\frac{2t}{\sqrt{5}} + \mathrm{C}_2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2x-1)}{2}\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{5}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_2$$

$$= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{1+x-x^2} + \frac{5}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_2,$$

যেখানে C_2 হল ধ্রুবক।

(1) নং এ I_1 এবং I_2 এর মান বসিয়ে আমরা পাই—

$$\int x\sqrt{1+x} - x^2 dx = -\frac{1}{3}(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{1+x-x^2}$$

$$+\frac{5}{16}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C,$$

যেখানে, $\quad C = -\dfrac{C_1+C_2}{2}$ হলো আরেকটি স্বেচ্ছ ধ্রুবক।

অনুশীলনী 7.7 এর পরিশেষে নিম্নলিখিত সমস্যাগুলো অন্তর্ভুক্ত করো :

12. $x\sqrt{x+x^2}$ $\qquad$ 13. $(x+1)\sqrt{2x^2+3}$ $\qquad$ 14. $(x+3)\sqrt{3-4x-x^2}$

উত্তরমালা :

12. $\dfrac{1}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{8} + \dfrac{1}{16}\log\left|x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right| + C$

13. $\dfrac{1}{6}(2x^2+3)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{x}{2}\sqrt{2x^2+3} + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\dfrac{3}{2}}\right| + C$

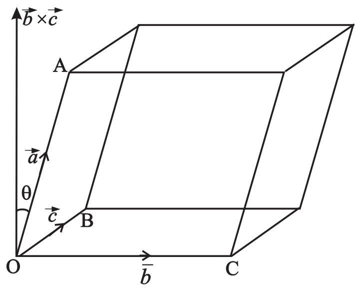
14. $-\dfrac{1}{3}(3-4x-x^2)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{7}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{7}}\right) + \dfrac{(x+2)\sqrt{3-4x-x^2}}{2} + C$

অধ্যায় 10

10.7 তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণ (Scalar Triple Product)

$\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ হলো যে কোনো তিনটি ভেক্টর। $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ এর ক্রম একই রেখে, $\vec{a}$ এবং $(\vec{b}\times\vec{c})$ এর স্কেলার গুণ অর্থাৎ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$-কে $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টর তিনটির স্কেলার গুণ বলা হয় এবং ইহাকে $[\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}]$ (অথবা $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অতএব আমরা পাই—

$$[\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$



চিত্র 10.28

পর্যবেক্ষণ (Observations) :

1. যেহেতু, $(\vec{b} \times \vec{c})$ একটি ভেক্টর, তাই $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ হলো একটি স্কেলার রাশি অর্থাৎ, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ হলো একটি স্কেলার রাশি।

2. জ্যামিতিকভাবে, তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণের মান হলো তিনটি প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ দ্বারা সূচিত তিনটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা গঠিত সামান্তরিক ষড়তলক (parallelopiped) এর আয়তন (চিত্র 10.28)। প্রকৃতপক্ষে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল, যা সামান্তরিক ষড়তলকের ভূমি গঠন করে, হলো $|\vec{b} \times \vec{c}|$। উচ্চতা হলো $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ধারণকারী সমতলের অভিলম্ব বরাবর $\vec{a}$ এর লম্ব-অভিক্ষেপ (projection), যা হলো $\vec{b} \times \vec{c}$ এর অভিমুখে $\vec{a}$ ভেক্টরের উপাংশের মান, অর্থাৎ, $\dfrac{|\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$। সুতরাং সামান্তরিক ষড়তলকের নির্ণেয় আয়তন হলো $\dfrac{|\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|}|\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})|$

3. যদি $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ এবং $\vec{c} = c_1\hat{i} + a_2\hat{j} + c_3\hat{k}$, তবে

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (b_2c_3 - b_3c_2)\,\hat{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\,\hat{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\,\hat{k}$$

এবং আবার

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

4. যদি $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$, যে কোনো তিনটি ভেক্টর হয়, তবে

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

(ভেক্টর তিনটির চক্রক্রম বিন্যাসে স্কেলার ভেক্টর তিনটির গুণের মান পরিবর্তিত হয় না)।

মনে করো, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k},\ \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ এবং $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j}_3\hat{k}.$

তখন, ঠিক উপরের পর্যবেক্ষণ দ্বারা আমরা পাই,

$$[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\ ] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\ (b_2c_3 - b_3c_2) + a_2\ (b_3c_1 - b_1c_3) + a_3\ (b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= b_1\ (a_3c_2 - a_2c_3) + b_2\ (a_1c_3 - a_3c_1) + b_3\ (a_2c_1 - a_1c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\vec{b},\vec{c},\vec{a}\ ]$$

অনুরূপভাবে, পাঠকেরা যাচাই করতে পারে যে,

$$= [\vec{a},\vec{b}\ ,\vec{c}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}\ ]$$

সুতরাং $\qquad [\vec{a}\ ,\vec{b},\vec{c},] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}\ ] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}\ ]$

5. তিনটি ভেক্টরেরর স্কেলার গুণ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ -এ, ‘ডট্’ এবং ‘ক্রস’ পরস্পর স্থান বিনিময় করতে পারে।

প্রকৃতপক্ষে,

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = [\vec{a}\ ,\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}\ ] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}\ ] = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$$

6. $[\vec{a}\ ,\vec{b},\vec{c}] = -[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\ ]$। প্রকৃতপক্ষে,

$$= [\vec{a}\ ,\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$= \vec{a}.(-\vec{c}\times\vec{b})$$

$$= -(\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b}))$$

$= -\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]$

7. $[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = 0$ প্রকৃতপক্ষে

$[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}]$

$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}]$

$= \vec{b}\cdot(\vec{a} \times \vec{a})$

$= \vec{b}\cdot\vec{0} = 0$ (যেহেতু $\vec{a} \times \vec{a} = 0$)

দ্রষ্টব্য : দুটি সমান ভেক্টরের অবস্থান যাই-ই হোক না কেন, উপরের 7-এর ফলাফল সর্বদা সত্য।

10.7.1 তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত (Coplanarity of Three Vectors)

উপপাদ্য 1 তিনটি ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ সমতলীয় হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$ হয়।

প্রমাণ : প্রথমে মনে করো যে, $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টর হলো সমতলীয়।

যদি $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ সমান্তরাল ভেক্টর হয়, তাহলে, $\vec{b}\times\vec{c} = \vec{0}$ এবং তাই $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$.

যেহেতু $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ সমতলীয়, তাই যদি $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ সমান্তরাল না হয়, তবে $\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{a}$ এর উপর লম্ব হবে।

সুতরাং $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$.

বিপরীতক্রমে, মনে করো যে $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$। যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}\times\vec{c}$ উভয়ই অশূন্য ভেক্টর হয়, তবে আমরা এই সিদ্ধান্তে পৌঁছতে পারি যে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}\times\vec{c}$ হলো লম্ব ভেক্টর। কিন্তু $\vec{b}\times\vec{c}$ ভেক্টর $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব। সুতরাং, $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ অবশ্যই সমতলের উপর অবস্থিত, অর্থাৎ এরা সমতলীয়। যদি $\vec{a} = 0$ হয়, তবে $\vec{a}$ যে কোনো দুটি ভেক্টর, বিশেষ ক্ষেত্রে $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ এর সাথে সমতলীয়। আবার, যদি $(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$ হয়, তবে $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ হলো সমান্তরাল

ভেক্টর এবং তাই, $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং ,$\vec{c}$ হলো সমতলীয়। যেহেতু যে কোনো দুটি ভেক্টর সর্বদা এদের দ্বারা নির্ণীত সমতলে অবস্থিত এবং একটি ভেক্টর যা এদের মধ্যে যে-কোনো একটির সাথে সমান্তরাল হলে .. ভেক্টরটিও ওই সমতলে অবস্থিত হবে।

দ্রষ্টব্য : তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্তের সাহায্যে চারটি বিন্দু সমতলীয় হওয়ার শর্ত আলোচনা করা যেতে পারে। প্রকৃতপক্ষে, A, B, C এবং D চারটি বিন্দু সমতলীয় হবে যদি $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরগুলো সমতলীয় হয়।

উদাহরণ 26 যদি $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + 2j + k$ এবং $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ হয় তবে, $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$ নির্ণয় করো।

সমাধান : আমরা পাই $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10.$

উদাহরণ 27 দেখাও যে $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} + 3j - 4\hat{k}$ এবং $\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টরগুলো সমতলীয়।

সমাধান : সমাধান আমরা পাই $\vec{a} . (\vec{b} \;\; \vec{c}) \qquad = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

অতএব, উপপাদ্য 1 হতে বলা যায় যে $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরগুলো সমতলীয়।

উদাহরণ 28 যদি ভেক্টর $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}$ সামতলিক হয়, তবে λ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান : যেহেতু $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ হলো সামতলিক ভেক্টর, তাই আমরা পাই [$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$]=0, অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ \lambda & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Rightarrow \quad 1(-3+7) - 3(6+\lambda) + 1(14+\lambda) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = 0.$

উদাহরণ 29 দেখাও যে, চারটি বিন্দু A, B, C এবং D যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}, -\left(\hat{j}+\hat{k}\right), 3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $4\left(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)$ সামতলিক।

সমাধান : সমাধান আমরা জানি যে চারটি বিন্দু A, B, C এবং D সামতলিক হবে যদি তিনটি ভেক্টর $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ সামতলিক হয়, অর্থাৎ যদি $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right] = 0$ হয়।

এখন, $\overrightarrow{AB} = -\left(\hat{j}+\hat{k}\right)-\left(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}\right) = -4\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k}$

$$\overrightarrow{AC} = \left(3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}\right)-\left(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}\right) = -\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$$

এবং $\overrightarrow{AD} = 4\left(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)-\left(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}\right) = -8\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

সুতরাং $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

অতএব, A, B, C এবং D সামতলিক।

উদাহরণ 30 প্রমাণ করো যে, $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}] = 2\,[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

সমাধান : আমরা জানি,

$$\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] = (\vec{a}+\vec{b}).((\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a}))$$

$$= (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})$$

$$= (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a})$$ (যেহেতু $\vec{c}\times\vec{c} = \vec{0}$)

$$= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right]+\left[\vec{a},\vec{c},\vec{a}\right]+\left[\vec{b},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{b},\vec{a}\right]+\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]$$

$$=2\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] \qquad \text{(কেন?)}$$

উদাহরণ 31 প্রমাণ করো যে $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{d}\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]$

সমাধান : আমরা জানি,

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{d}\right]=\vec{a}.(\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{d}))$$
$$=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d})$$
$$=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{d})$$
$$=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right].$$

অনুশীলনী 10.5

1. যদি $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k},\vec{b}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{c}=3i+j-2\hat{k}$ হয় তবে $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$ নির্ণয় করো।
   (উত্তর : 24)
2. দেখাও যে, $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k},\vec{b}=-2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ এবং $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টরগুলো সামতলিক।
3. যদি $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k},3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ এবং $\hat{i}+\lambda\hat{j}-3\hat{k}$ ভেক্টরগুলো সামতলিক হয় তবে, λ এর মান নির্ণয় করো।
   (উত্তর : $\lambda = 15$)
4. মনে করো $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\vec{b}=\hat{i}$ এবং $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ তখন
   (a) যদি $c_1 = 1$ এবং $c_2 = 2$ হয় তবে, c_3 নির্ণয় করো যাতে $\vec{a},\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ সামতলিক হয়।
   (উত্তর : $c_3 = 2$)
   (b) যদি $c_2 = -1$ এবং $c_3 = 1$ হয় তবে, দেখাও যে c_1 এর এমন কোনো মান থাকতে পারে না যাতে $\vec{a},\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ সামতলিক হয়।
5. দেখাও যে চারটি বিন্দু যাদের অবস্থান ভেক্টর $4\hat{i}+8\hat{j}+12\hat{k},2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k},$ এবং $5\hat{i}+8\hat{j}+5\hat{k}$ হলো সামতলিক।
6. চারটি বিন্দু A (3, 2, 1) B (4, x, 5), C (4, 2, –2) এবং D (6, 5, –1) সামতলিক হলে x-এর মান নির্ণয় করো। **(উত্তর :** $x = 5$)
7. দেখাও যে $\vec{a},\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরগুলো সামতলিক হবে, যদি $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c}$ এবং $\vec{c}+\vec{a}$ সামতলিক হয়।